Math
137

Ex Bibliotheca
Collegii Evangelici,
Aug. Vindel.

L. M. Steinberger Sculps. A. V.

Gottfr. Eichler del. *Jac. Andr. Fridrich Ser. Duc. Würt. Sculptor aulicus sc. A.V.*

Heinrich Wilhelm Clemms

der Mathematik offentlichen ordentlichen Profeſſors zu Stutgart

mathematiſches Lehrbuch

oder

vollſtändiger Auszug

aller

ſo wohl zur reinen als angewandten Mathematik gehörigen Wiſſenſchaften

nebſt einem Anhang

darinnen

die Naturgeſchichte und Experimentalphyſik in einem kurzen Plan vorgetragen wird.

DES COLLEGIUMS ST. ANNA IN AUGSBURG

Ordine, menſura, numero — —

Stutgart
bey Johann Benedict Mezler
1764.

Vorbericht.

Die mathematiſche Wiſſenſchaften, in ſo ferne ſie einem Menſchen, der eben nicht bloß damit ſeinen Unterhalt ſucht oder davon zu leben gedenket, theils Vergnügen theils Nuzen ſchaffen ſollen, müſſen ohne Abbruch der Deutlichkeit und Gründlichkeit, ſo viel möglich, in einer angenehmen Kürze vorgetragen werden. Dann man kann ihm, da er nach ſeinem Hauptzwek noch ſo viel anders zu lernen hat, keine mathematiſche Quartanten und Folianten in die Hände geben; giebt man ihm aber ein mageres Compendium in die Hand, wo nur die vornehmſte Säze ſtehen, bey deren Beweis man ihn auf gröſſere Bücher verweißt, ſo bekommt ſein Verſtand nichts reelles zu denken, und er wird entweder die Künſte des Geome-

ters mit den Unwiſſenden bewundern, oder wenn er klůger iſt, das Buch hinweg legen, bis er ein beſſer demonſtrirtes zu leſen bekommt; wollte man ihm endlich gar ſolche ins kleine gebrachte Schriften, zu leſen geben, worinnen der tiefſinnige Meßkůnſtler ſeine Beweiſe mit einer geheimnißvollen Dunkelheit umhůllet, und zwanzig Zwiſchenſåze und Formeln, die ihme wohl, aber dem angehenden Lehrling nicht ſogleich einfallen, in ſeinen enthymematiſchen Schlůſſen auslåßt, auch was er ſagt durch eine ſteganographiſche Zauberſprache, dazu man den Schlůſſel erſt můhſam ſuchen muß, noch undeutlicher macht, ſo möchte dem Lehrling der Halleriſche Gedanke dabey einfallen:

— — Das will ich nicht verſtehen,
Es můſſe ſich mein Feind mit ſolchen Bůchern quålen!

Dem ungeachtet ſcheinen die meiſte mathematiſche Handbůcher unſerer Zeiten, unter eine der angefůhrten drey Claſſen zu gehören. Denn entweder ſind ſie zu weitlåuftig und allzugroß zum Leſen; oder ſie ſind zu mager und zu wenig demonſtrirt; oder ſie ſind zwar demonſtrirt, aber ſo, daß man dabey ſagen muß, was Keppler von des Apollonii Schriften ſagte: Quis tolerat laborem perlegendi iſta? Wenn alſo in gegen

genwärtigem Handbuch dieſe drey Fehler vermieden worden, ſoglaubt man, den übrigen in Menge vorhandenen mathematiſchen Schriften wenigſtens keinen Abbruch mit deſſen Ausgabe zu thun, weil es von ganz anderer Art, und weder zu groß, noch zu mager, noch, in ſeinen Demonſtrationen, zu geheimnißvoll iſt; neben deme darf man auch hoffen, daß dem verſtändigen Publico damit vielleicht mehr als mit andern gedient ſeye. Zu dem Ende muß man von dem Werk ſelbſt folgendes ſich bekannt machen.

Unter den mathematiſchen Compendien iſt bekannter maſſen das Wolfiſche am meiſten beliebt; es iſt auch unter allen das Beſte, aber nur vor fünfzig Jahren, geweſen. Dann wenn einer es weiß, ſo weiß er, was man in der Mathematik zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts wußte; was inzwiſchen dazu gekommen, das bleibt ihm verborgen, wenn ers nicht aus andern Schriften lernt. Es bliebe ihm aber, ein wichtiger und bey nahe der ſchönſte Theil der Mathematik verborgen, wenn ihm die Erfindungen unſers Zeitalters verborgen blieben, die dem Wolfiſchen Handbuch bey ſeinen ſo häuffigen und immer neuen Auflagen doch nie einverleibt worden. Inzwiſchen hat das Wolfiſche Handbuch, auſſer dem,

 daß

daß es in vorigen Zeiten das Beſte war, noch jezo einen Vorzug, wodurch es ſich immer erhält; und dieſer beſteht in ſeiner groſſen Deutlichkeit. Man hat dahero, in gegenwärtiger Schrift ſich, in Rukſicht auf die Deutlichkeit, nach dieſem Handbuch gerichtet, und bey den Lehrſäzen, Saz und Beweis immer unterſchieden, auch alle Zwiſchenſäze nach der mathematiſchen Syllogiſtik angeführt, und alſo in beeden Theilen, die Lehren der neuen Mathematik, auch den Anfängern gleichſam vorbuchſtabiret; auf dieſe Weiſſe, findet man nicht uur alles hier was die Hauptſachen betrift, die in dem Wolfiſchen Handbuch ſtehen; ſondern es iſt noch ungleich mehr, nemlich dasjenige dazu eingetragen, was theils in gegenwärtigem Jahrhundert neu erfunden, theils in dem Euclideiſchen ſchon bekannt, und nachgehends in Vergeſſenheit gekommen war.

Die Beweiſe ſelbſt, beſonders die neuern, hat man mit aller Deutlichkeit ſo ausführlich hingeſezt, als ein Anfänger ſolche wünſchen kann, und alſo dem Mangel abzuhelfen geſucht, darüber man bey verſchiedenen gelehrten Compendien dißfalls klagt; der Nervenſaft eines verſtändigen Menſchen, iſt doch ungleich koſtbarer, als die Buchdrukerſchwärze. Dieſe darf man eher verſprü-

zen, als jenen, wenn man nicht eben bloß für Gelehrte, ſondern auch für Anfänger ſchreibt; doch hat man ſich auch gehütet, daß man keine Ueberdeutlichkeit affectire, welche ſelbſt in Folianten, und noch vielmehr in Compendien unangenehm läßt; bey derjenigen Methode, die man alſo gebraucht, wird man, woferne noch einige Leſer ſich der Undeutlichkeit wegen beſchweren ſollten, den andern Halleriſchen Ausdruk anführen können:

Sie ſind geſtraft genug, daß ſie es nicht verſtehn.

Sollten aber einige ſeyn, welche die allzugroſſe Deutlichkeit in den ausführlichen Beweiſſen tadelten, ſo kann man ſie nur an das erinnern, daß nicht nur Anfänger ſondern auch manche Profeſſores der Mathematik das Vorbuchſtabieren nöthig haben; wenigſtens werden wenige ſeyn, die einen Newton, ohne dieſes Mittel leſen können. Worunter beſonders diejenige gehören, von deren mathematiſchen Einſichten die Wolfiſche Elemente noch immer die Aſymptoten bleiben.

Endlich muß man noch was vom erſten Theil in Anſehung der Anfänger ſagen; es iſt leicht begreiflich, daß die ganze reine Mathematik in einem Lehrbuch nicht auf einmal mit Anfängern

 durch-

durchgemacht werden kann; dahero die ſogenannte Analyſis von andern beſonders abgehandelt wird; man hat aber hie alles unter dem Titel der arithmetiſchen und geometriſchen Wiſſenſchaften vorgetragen, weil nach dem Urtheil der Kenner, auch ſelbſt Hr. Profeſſor Käſtners, nicht nur die ganze Mathematik unter dieſe zween Titel gehört, ſondern ein etwas geübter Leſer dabey den Vortheil hat in einem Zuſammenhang alles ſich bekannt zu machen, ohne daß man nöthig hätte, ein anders Buch für die Arithmetik, ein anders für die Algebra, ein anders für die höhere Analyſis, zur Hand zu nehmen, und alſo drey bis vier Bücher aufzuſchlagen. Was aber die Anfänger betrift, denen man nur die gemeine Arithmetik und Geometrie in einem Leſebuch erklärt, ſo hat man, durch die Aſteriſcos bey den Artikeln, der Sache abgeholfen. Diejenige Artikel, die keine Aſteriſcos oder ** haben, wird man ohne Anſtand im erſten Curſu, mit den Anfängern, in einem eben ſo guten Zuſammenhang, abhandeln können, als wenn ſie einzeln ohne die höhere Artikel abgedrukt wären; und über dieſen erſten Curſum können meine erſte Gründe alle mathematiſchen Wiſſenſchaften, die ich vor vier Jahren herausgab, ein ausführlicher Commentarius ſeyn.

Im

Im zweyten Curſu, wie dann in Stutgart die reine Mathematik mit einerley Zuhörern, zween Curſus ordnungsmäſſig hat, nimmt man die Artikel mit, wo nur ein Aſteriſcus ſteht; endlich wenn man Leute von beſondern Gaben hat, ſo kann noch ein dritter Curſus in einem Privatcollegio hinzu gethan werden, in welchem die beede erſte kürzlich wiederholt, und die Artikel von zween Aſteriſcis vollends mitgenommen werden. Den zweyten Theil wird man verſtehen, wenn man beede erſte Curſus durchgemacht; daher die Artikel deß II. Theils keine Aſteriſcos haben.

In Abſicht auf die Geſchichte der mathematiſchen Wiſſenſchaften, glaubte man den Leſern einen Gefallen zu erweiſen, wenn man ihnen zeigte, wie dieſe oder jene Wiſſenſchaften von Zeit zu Zeit empor gekommen, ſich erhalten und weiter ausgebreitet haben. Zu dem Ende hat man jedem Hauptſtük ſo wohl der reinen als angewandten Mathematik eine kurze Geſchichte vorangeſchikt, worinnen man findet, wie weit man in jeder Wiſſenſchaft gekommen, wie ſie vor Zeiten beſchaffen geweſen, und was die Hauptperſonen ſeyen, denen man ihre Aufnahme zu danken habe. Eben ſo hoft man mit dem zum Beſchluß angehängten

Plan einer Naturgeſchichte und Experimental-phyſik den Leſern gefällig zu ſeyn.

Soviel wollte man zum voraus von gegenwärtiger Ausgabe dieſes Compendii melden. Der Verfaſſer davon, findet ſein Vergnügen in zwo Wiſſenſchaften, welche er vielleicht mit vielen andern Kennern für die wichtigſten in der Welt hält; ſie ſind die Religion, und die Mathematik. Sein tragendes Amt iſt neben her ſo beſchaffen, daß er mit beeden ſich immer bekannter machen muß. Da er alſo nicht nur nach ſeinem Vergnügen, ſondern auch nach ſeinem Amt, an dieſen beeden Wiſſenſchaften arbeitet, ſo wird man ſich um ſo weniger wundern, wenn er, wie bisher, in Rukſicht auf beede Wiſſenſchaften, die Erkenntniß GOttes nach dem Gnadenreich ſo wohl als nach dem Naturreich, in ſeinen Schriften auszubreiten, und verehrungswürdig zu machen ſucht. Geſchrieben, Stutgart den 2. April 1764.

Inhalt

der

abgehandelten Materien. (*)

Der arithmetiſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtük, von der Rechnung in Zahlen. Seite 3.
Allgemeine Erklärungen. 3.
Geſchichte der Zahlenrechnung. 4.
Allgemeiner Vortrag von den vier Rechnungsarten. 7.
Das Ausſprechen und Schreibeu der Zahlen. 11.
Die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen. 14.
Die Rechnung in Brüchen. 24.
* Von Decimal= und Sexageſimal=Brüchen. 32.
Von den Potenzen. 36.
Von Ausziehung der Quadratwurzel in Zahlen. 39.
Von Auszlehung der Cubicwurzel in Zahlen. 47.
Zweytes Hauptſtük der arithmetiſchen Wiſſenſchaften von der Buchſtabenrechnung. 49.
Die Geſchichte der Buchſtabenrechnung. 49.
Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchſtaben. 54.
Von den Potenzen oder Dignitäten und ihren Veränderungen. 68.
* Die Irrationalwurzeln und eingebildete oder unmögliche Gröſſen. 80.
* Der binomiſche Lehrſaz. 83.
* Die höchſte Uuterſchiede oder Differenzen der Po=

(*) Die Aſteriſci ſind in dem Vorbericht nach ihrer Bedeutung erklärt.

Potenzen und die Natur der geraden und ungeraden Zahlen. Seite 88.
* Die Combinationen. 91.
Von den Proportionen. 96.
* Von den arithmetiſchen Proportionen und Reyhen. 97.
Die geometriſche Proportionen 101.
* Von den geometriſchen Progreſſionen oder Reyhen. 108.
Von den Logarithmen. 113.
* Vnn den quadratiſchen ſowohl reinen als unreinen Gleichungen. 120.
* Von höhern Gleichungen überhaupt. 123.
** Von den Wurzeln der Zuſammengeſezten Gleichungen. 126.
** Die Erfindung der Wurzeln und der Diviſorum einer Gleichung. 128.
** Die Veränderung der Gleichungen. 131.
** Die Beſtimmung der Coefficienten bey Ausdrukungen durch unendliche Reyhen. 133.
* Von unbeſtimmten Aufgaben. 137.
Drittes Hauptſtük der arithmetiſchen Wiſſenſchaften, von der practiſchen Rechenkunſt. 140.
Geſchichte der practiſchen Rechenkunſt. 140.
Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen. 145.
Von der Regel Detri, ſowohl directa als inverſa, der zuſammengeſezten Regel Detri oder Regel Quinque, Geſellſchaftsrechnung, Kettenregel, u. ſ. w. 148.
* Von höhern Aufgaben der practiſchen Rechenchenkunſt, und beſonders auch vom leibniziſchen Intercuſurio, mit den Bilfingeriſchen Erläuterungen. 155.
Der geometriſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtük, von der gemeinen oder Elementar-Geometrie. 171.
Allgemeine Säze von Linien, Winkeln und Figuren. 176.
Die Verhältniß der Winkel gegen einander, nebſt den daraus flieſenden Folgen. 188.

Die

Die Verwandlung der Figuren. Seite 201.
Die Ausmeſſung geradelinigter Figuren. 211.
Die Aehnlichkeit der Dreyecke und der Figuren überhaupt. 214.
Von dem Cirkel, deſſen Verwandlung und Ausmeſſung. 225.
* Die Lage der Linien gegen die ebene Flächen und der Flächen gegen einander. 239.
Allgemeine Begriffe geometriſcher Cörper, oder Einleitung in die Stereometrie. 246.
Die Verwandlung der Cörper. 249.
Die Ausmeſſung der Cörper. 253.
Die Kugel oder Sphäre. 256.
* Die Kugelſchnitte. 261.
Zweytes Hauptſtück, von der Trigonometrie. 265.
Geſchichte der Trigonometrie. 265.
Erſtes Capitel, von der ebenen Trigonometrie. 268.
Allgemeine Begriffe von Sinus, Coſinus, Tangenten, Secanten und Coſecanten. 269.
Allgemeine Theorie der trigometriſchen Rechnung. 279.
* Die Erfindung der Sinus von den Summen und Differenzen der Bogen, aus den gegebenen Sinuſſen und andern trigonometriſchen Linien. 287.
Die Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreyecks, aus drey gegebenen Stücken, eine Seite mit darunter gerechnet. 294.
* Anwendung der trigonometriſchen Lehrſäze auf die Polygone. 299.
Die Berechnung der Sinus und der Logarithme, nebſt dem Gebrauch der Tafeln. 302.
Zweytes Capitel, von der ſphäriſchen Trigonometrie. 307.
Allgemeine Betrachtung der ſphäriſchen Dreyecke. 308.
* Betrachtung und Auflöſung der rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyeke. 310.
* Betrachtung der Fälle, in welchen Winkel und Seiten gröſſer oder kleiner als 90. Grade werden. 314.
* Betrachtung der ſchiefen Dreyecke. 317.
** Betrachtung und Auflöſung der ſchiefen Dreyecke,

in welchen drey Seiten oder drey Winkel gegeben ſind. Seite 319.

Drittes Hauptſtük, von der practiſchen Geometrie 327.

Geſchichte der practiſchen Geometrie. 328.

Die Vergleichung der vornehmſten Maaſſe. 330.

Die Meſſung und Verjüngung der Linien und Figuren. 333.

Die Meſſung und Verjüngung der Flächen, oder das Aufnehmen einer Gegend. 338.

* Etwas von der Markſcheidekunſt. 339.

Viertes Hauptſtück, von der höhern Geometrie. 342.

Geſchichte der höhern Geometrie. 343.

Allgemeine Begriffe von algebraiſchen und höhern Functionen. 349.

Die algebraiſche Linien, beſonders die Kegelſchnitte, oder die Parabel, Ellipſe und Hyperbel. 353.

* Die Parabel. 354.

* Die Ellipſe. 356.

* Die Hyperbel. 361.

* Allgemeine Betrachtungen der coniſchen Sectionen und Linien der zweyten Ordnung. 368.

** Von einigen andern, beſonders auch transſcendentiſchen Linien. 373.

** Die geometriſche Oerter und die Conſtruction der Gleichungen. 376.

* Allgemeine Gründe der Differentialrechnung. 378.

* Die Anwendung der Differentialrechnung, auf die vier Rechnungsarten, in poſitiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen, auch Wurzeln, Potenzen und zuſammengeſezten Gröſſen. 381

** Allgemeiner Beweis des Newtoniſchen Binomii und des Harriotiſchen Lehrſazes. 387.

** Allgemeine Betrachtung der höhern Differentialien, und die Verwandlung der Gleichungen durch eben dieſe Mittel. 395.

** Nic. Bernoulli Methode, alle mögliche Reyhen, durch die ſich eine Gleichung auflöſen läßt, und die Geſtalt der Reyhen, zu finden. 397.

Die

* Die Methode vom Kleinſten und Gröſten. (Methodus de maximis & minimis.) Seite 400.

* Von den Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien. 403.

* Allgemeine Regeln der Integralrechnung, auch in Ruckſicht auf die Wiederherſtellung der beſtändigen Gröſſen. 407.

** Einige ſchwerere Integralformeln für zuſammengeſezte Differentialien. 409.

** Von der Quadratur der krummen Linien. 414.

** Die Rectification der krummen Linien, beſonders auch der Neiliſchen Parabel. 417.

** Newtons und Leibnizens Methoden, den Cirkel zu quadriren uud zu rectificiren, nebſt Diff. Formeln für den Cirkel. 420.

* Die umgekehrte Methode der Tangenten. (Methodus Tangentium inverſa.) 423.

** Die logarithmiſche Differentialien, und der Unterſchied der natürlichen oder hyperboliſchen, und der künſtlichen Logarithmen. 425.

** Die Exponentialrechnung nebſt einigen Integralformeln für logarithmiſche Differentialien. 428.

** Johann Bernoulli Vergleichung der Ausſchnitte des Cirkels und der Hyperbel. 430.

** Einige andere Vergleichungen der Sinus, Coſinus, Tangenten, nach Johann Bernoulli Methode. 434.

** Herrn Eulers und Clairaut Betrachtungen über die Differentiale der Functionen, die zwo und mehr veränderliche Gröſſen enthalten. 437.

** Die Lehre von der Evolution, Evoluten, und als Evolution erzeugten Linien, den Krümmungscirkeln und Radiis, (circulis curvaturæ, radiis oſculi.) Seite 442.

Zweiter Theil.

Der Statiſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtück, von der Statik ſonſt Mechanik. 4.

Geſchichte der Statik. 4.

Allgemeine Begriffe von den in der Statik vorkommenden Wörtern der Kraft, Laſt, Schwere, Direction & ll. Th. 7.

Allgemeine Theorie des Hebels, Theoria vectis. 9

Allgemeine Theorie der Zuſammenſezung der Kräfte, nebſt dem Varignoniſchen Beweis vom Hebel. 13.

Anwendung der Lehre vom Hebel auf die Erfindung des Schwerpunkts, der Gewichter, der Zeiten, und ferner die Waagen und Schnellwaag. 18.

Das Rad und die Rolle, oder Kloben; (Axis in Peritrochio & trochlea.) 23.

Allgemeine Theorie der ſchiefen Fläche, (Planum inclinatum.) 29.

Die Schraube und der Keil. (Cochlea & cuneus.) 32.

Die Waſſer- und Windmühlen. 38.

Von den Uhrwerken nehmlich Penduluhren und den darzu nöthigen mechaniſchen Lehrſäzen, ferner von den Hinderniſſen der Maſchinen, wie auch vom Geſez der kleinſten Wirkung. 43.

Zwey-

Zweytes Hauptſtük, von der Hydroſtatik. Seite 51.

Die Geſchichte der Hydroſtatik. 51.

Allgemeine Begriffe und Såze vom Druk der flůſſigen Cörper. 52.

Das Gleichgewicht der flůſſigen Materien untereinander. 56.

Das Gleichgewicht flůſſiger und veſter Cörper. 55.

Die Archimedeiſche Gold- und Silberprobe, oder die Probe zweyer vermiſchten Metalle. 62.

Etwas von dem Mathematiſchen bey dem Můnzweſen. 64.

Das Schwimmen der Cörper beſonders in Rükſicht auf das Schifweſen. 67.

Drittes Hauptſtůk, von der Aerometrie. 71.

Die Geſchichte der Aerometrie. 71.

Die Exiſtenz der Luft, ihre Schwere und Elaſticitåt. 74.

Die angenehme Eigenſchaften der Luft, nebſt ihren Folgen und zwar erſtlich die Akuſtik. 77.

Die Muſik oder das Mathematiſche bey der Muſik. 81.

Die Luftpumpen und die durch die Luftpumpe gemachte weitere Entdekungen. 89.

Vom Druk der Atmoſphåre auf die Erde und von dem Torricelliſchen Vacuo. 92.

Die Luftmeſſer oder das Barometer, Thermo-

mometer, Hygrometer und Manometer, auch Anemometer oder Windmeſſer. Seite 96.

Vierdtes Hauptſtük, von der Hydraulik. 101.

Die Geſchichte der Hydraulik. 101.

Die Bewegung des Waſſers durch Pumpen, Drukwerk und andern Maſchinen. 103.

Die Bewegung des Waſſers durch Luft und die verſchiedene Gattungen der Heber, beſonders auch der Würtembergiſche. 106.

Die Springbrunnen und Waſſerſprizen. 109.

Der optiſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtück von der Optik beſonders. 116.

Die Geſchichte der Optik beſonders. 116.

Die Ausbreitung der Stärke des Lichts in verſchiedenen Entfernungen. 118.

Kurze Beſchreibung des Auges. 122.

Betrachtung der Erſcheinungen entfernter Cörper nach ihrer Gröſſe und Beobachtung: 123.

Zweytes Hauptſtück, von der Catoptrik. 126.

Die Geſchichte der Catoptrik. 126.

Allgemeines Geſez der reflectirten Strahlen. 132.

Von den ebenen und Hohl-Spiegeln. 133.

Drittes Hauptſtück, von der Dioptrik. 138.

Geſchichte der Dioptrik. 138.

Allgemeines Geſez der Refraction. 143.

Die Dioptriſche Gläſer und deren Brennweite, durch Zeichnung und Rechnung. 146.

Von den Fernröhren oder Teleſcopiis, nehm-

lich

lich den Aſtronomiſchen den Erdröhren, (Tubis Terreſtribus) den Newtoniſchen und Gregorianiſchen Teleſcopiis wie auch dem Polemoſcop. Seite 156.

Von den Vergröſſerungsgläſern, Kleinigkeiten in der Nähe zu ſehen, oder von den Mikroſcopiis ſowohl einfachen als zuſammengeſezten, auch von den Brillen. 160.

Von einigen andern Dioptriſchen Inſtrumenten. 164.

Viertes Hauptſtük, von der Perſpectiv. 168.

Geſchichte der Perſpectiv. 168.

Allgemeine Theorie der Perſpectiv und ihre Fundamentalgeſeze. 169.

Von dem Schatten. 174.

Etwas von dem Practiſchen in der Perſpectiv. 175.

Der aſtronomiſchen Wiſſenſchaften erſtes Hauptſtük, von der Aſtronomie. 179.

Geſchichte der Aſtronomie. 179.

Erſtes Capitel, von der Sphäriſchen Aſtronomie. 184.

Die Kenntniß der Fixſterne, nach ihrer Lage und Sternbildern. 185.

Die Kenntniß der Planeten nach ihrer Lage und Bewegung. 189.

Die Kenntniß der vornehmſten Cirkel am Himmel und die darauf beruhende ſphäriſche Rechnungen der Höhen, Abweichung, Längen, Breiten, Aſcenſion, Deſcenſion. 193.

Die Bewegung der Sonne beſonders, und die

dadurch entſtehende Tage und Jahre, wie auch die Zeitgleichung, (æquatio temporis.) Seite 200.

Die Vorrückung der Nachtgleichen, (Præceſſio æquinoctiorum,) nebſt ihrer Urſache. 205.

Die Parallaxe. 207.

Die Refraction. 211.

Zweytes Capitel, von der Theoriſchen Aſtronomie. 213.

Die Copernicaniſche Theorie vom Sonnen und Planeten-Syſtem. 214.

Die Kepleriſche Theorie von den zwey Hauptgeſezen der Bewegung der himmliſchen Cörper. 218.

Die Bradleyiſche Theorie von der Aberration der Fixſterne. 226.

Die Newtoniſche Mondstheorie. 231.

Einige Folgen aus den bisherigen Theorien, beſonders auch in Rukſicht auf den Mond, und die durch ihn entſtehenden Finſterniſſe. 238.

Die Theorie oder Methode der Interpolationen. 244.

Etwas von der Cometen-Theorie. 250.

Etwas von dem Practiſchen in der Aſtronomie. 253.

Zweytes Hauptſtück, von der Geographie. 259.

Geſchichte der Mathematiſchen Geographie. 259.

Die wahre Geſtalt der Erde. 261.

Die Unterſchiede der Mittagscirkel in Zeit und Graden. 263.

Von

Von der Breite und Länge der Oerter. Seite 265.

Die Correction der Differenzen der Mittagscirkel durch Beobachtung der Finſterniſſen. 267.

Die Berechnung der Grade in Parallelkreiſen, und die verſchiedenen Zonen, nebſt einigen andern Geographiſchen Rechnungen. 269.

Die Loxodromie oder etwas von der Schiffarth. 271.

Drittes Hauptſtück, von der Chronologie. 275.

Geſchichte der Chronologie. 275.

Von den Tagen, Wochen, Monathen und Jahren. 276.

Von den Cyclis. 278.

Von der Reduction verſchiedener Jahrzahlen. 282.

Von dem Calender und der Feſtrechnung. 285.

Viertes Hauptſtück, von der Gnomonik. 289.

Geſchichte der Gnomonik. 289.

Die Sonnenuhren überhaupt, beſonders die Aequinoctial- und Horizontaluhren, welche das Fundament der übrigen ſind. 290.

Die Monds- und Sternenuhren. 292.

Allgemeine Theorie der Verticaluhren. 294.

Der Architectoniſchen Wiſſenſchaften, erſtes Hauptſtük, von der Civilbaukunſt. 301.

Geſchichte der Civilbaukunſt. 301.

Allgemeine Regeln der Baukunſt nebſt den Folgen daraus. 303.

Die Theorie der Säulenordnungen. Seite 309.

Allgemeine Theorie von den Säulenweiten, Ordnung der Balkenköpfe, Triglyphen und ihren Zwiſchenweiten. 311.

Vom guten Geſchmak in der Baukunſt, und von den Eigenſchaften eines guten Baumeiſters. 317.

Zweytes Hauptſtük, von der Militairbaukunſt. 322.

Geſchichte der Militairbaukunſt. 322.

Allgemeine Regeln der Fortification und die Nahmen der Hauptheile. 324.

Die verſchiedene Beveſtigungsſyſteme, (beſonders die Vaubaniſche und Bilfingeriſche. 327.

Von der irregulairen Beveſtigung. 333.

Etwas von der Artillerie. 335.

Die arithmetiſche Wiſſenſchaften,

oder

die Rechnung in Zahlen, die Buchſtabenrechnung und die practiſche Rechenkunſt.

Der arithmetiſchen Wiſſenſchaften
Erſtes Hauptſtück,
von der Rechnung in Zahlen.

Allgemeine Erklärungen.

§. 1.

Die Gröſſe, das iſt, was vermindert oder vermehret werden kann, läßt ſich von den übrigen Eigenſchaften einer Sache als abgeſondert betrachten; eine abgeſondert betrachtete Gröſſe iſt der Gegenſtand der Mathematik; ſie iſt alſo möglich und beſchäftiget ſich mit möglichen Dingen.

§. 2. Die Gröſſe kann man entweder als eine Menge von Theilen überhaupt anſehen, oder man kann die Verbindung und Ordnung ihrer Theile zugleich betrachten: in jenem Fall gehört ſie in die Arithmetik, in dieſem aber in die Geometrie. Folglich gibt es nicht weiter mathematiſche Wiſſenſchaf-

ten als dieſe zwo, worunter ſich alle übrige bringen laſſen; wenn man aber ihre Lehren auf die wirkliche Sachen anwendet, ſo wird man ſo viel Theile der angewandten Mathematik erfinden können, als verſchiedene Gattungen von Dingen in der Welt ſind. Ihre Anzahl läßt ſich alſo nicht beſtimmen, und erfindſame Köpfe werden ſie noch immer mit neuen Diſciplinen bereichern können.

§. 3. Die Arithmetik beſchäftigt ſich mit der Gröſſe, in ſofern ſie als ein Ganzes betrachtet wird, das aus Theilen beſtehet, die ſich vermindern und vermehren, und alleſamt zugleich genommen, für das Ganze, einzel aber für einander ſetzen laſſen, ohne daß man auf die Verbindung und Ordnung dieſer Theile, wie in der Geometrie, zu ſehen nöthig hätte; die Möglichkeit dieſer Erklärung erhellt aus §. 1. Sie hat alſo ihre Richtigkeit.

§. 4. Die Rechenkunſt in Zahlen iſt von der Arithmetik überhaupt nur darinnen unterſchieden, daß die Gröſſen durch die unter uns gewöhnliche Zahlzeichen ausgedruckt werden; von welchem wir in der folgenden kurzen Geſchichte der Rechenkunſt was ſagen werden.

Geſchichte der Zahlenrechnung.

§. 5. Das Rechnen war den Alten ungleich beſchwerlicher, als es heutzutag iſt. Man bediente ſich des Alphabeths, deſſen erſter Buchſtabe eins, der andere zwey u. ſ. w. beditten hatte, wie man aus den hebräiſchen und griechiſchen Grammatiken es weiß. Die Lateiner machten aus ihrem Alphabeth

eine Auswahl, und nahmen nur die Buchſtaben I, V, X, L, C, D, M, zu ihren Zahlzeichen. Einige wollen zwar das M nicht darunter zehlen.

§. 6. So beſchwerlich nun dieſe Rechnung war, ſo hat doch vor ſchon zwey tauſend Jahren Euclides die Eigenſchaften der Zahlen oder die Theorie der Arithmetik in ſeinem ſiebenden, achten und neunten Element auf eine ſo demonſtrative Weiſe vorgetragen, daß man den groſſen Geiſt der Alten, die uns vorgearbeitet haben, darinnen bewundern muß.

§. 7. Anmerkung. In verſchiedenen neuern Ausgaben des Euclides ſind zwar dieſe drey Elemente weggelaſſen; es iſt aber wo nicht ein Fehler, doch eine unzeitige Herablaſſung gegen die Anfänger, für welche man ſelbige zu ſchwer hielte; dahero die meiſte Commentatores nur über die ſechs erſte Elemente geſchrieben haben. Andreas Tacquet hat ſich um die mathematiſche Wiſſenſchaften beſſer verdient gemacht, da er dieſe drey Elemente in ſeine Theoriam & praxin Arithmetices völlig eingerückt und erläutert hat. Wenn Anfänger gründlich geführt werden, ſo müſſen ſie von dem was ſchwer ſcheinet, nicht zurückgehalten werden, oder lieber die Sache gar nicht lernen; es iſt allemal beſſer, etwas langſam aber recht, als geſchwind aber ſchlecht lernen. Euclides und Archimedes wollten ſelbſt den königlichen Prinzen keinen andern Weg zur Wahrheit bahnen. Aber eben darum wurden ihre Schüler ſo vollkommen gebildet. Die Neuere bilden durch ihr Nachgeben zwar viele, aber ſehr mittelmäßige Mathematiker, wenn anders dieſer Nahme nicht zu gut für ſie iſt.

§. 8. Anmerkung. Auſſer dem Euclides hat ſich unter den Alten keiner gleich verdient um die Arithmetik gemacht. Nicomachus ſchrieb dreyhundert Jahr vor Chriſti Geburt zwey Bücher der Arithmetik, welche im ſechsten Jahrhundert nach Chriſti Geburt Anit. Manl. Severinus Boethius in ſeiner Arithmetik gröſtentheils abgeſchrieben hat; Es ſind aber nichts, als Eintheilungen der Zahlen; und was man daraus lernen kann, iſt höchſtens dieſes, daß man von den logicaliſchen Definitionen und Diviſionen etwa einen Begriff bekommt. Von dem Pſellus, einem griechiſchen Schriftſteller des zehenden Jahrhunderts, deſſen Arithmetik Wilhelm Xylander ins Lateiniſche 1556. überſetzt und erläutert hat, müſſen wir ein gleiches ſagen.

§. 9. Seitdeme die ſogenannte arabiſche Zahlzeichen, die heutzutag üblich ſind, in Europa bekannt wurden, hat die Rechenkunſt eine andere Geſtalt bekommen. Dann es iſt mit den Zahlzeichen, die wir haben, ungleich leichter zu rechnen, als mit den griechiſchen Buchſtaben.

§. 10. Die Erfindung dieſer Zahlzeichen ſchreibt man insgemein den Arabern oder überhaupt den Morgenländern zu, und es iſt auch ſehr wahrſcheinlich, daß ſie von ihnen herkommen, weil die Europäer ſonſt alles von der Rechten zur Linken ſchreiben, bey den Zahlen aber allein eine Ausnahm machen, welche einen orientaliſchen Urſprung verräth. Die eigentliche Zeit der Erfindung ſelbſt läßt ſich nicht genau beſtimmen.

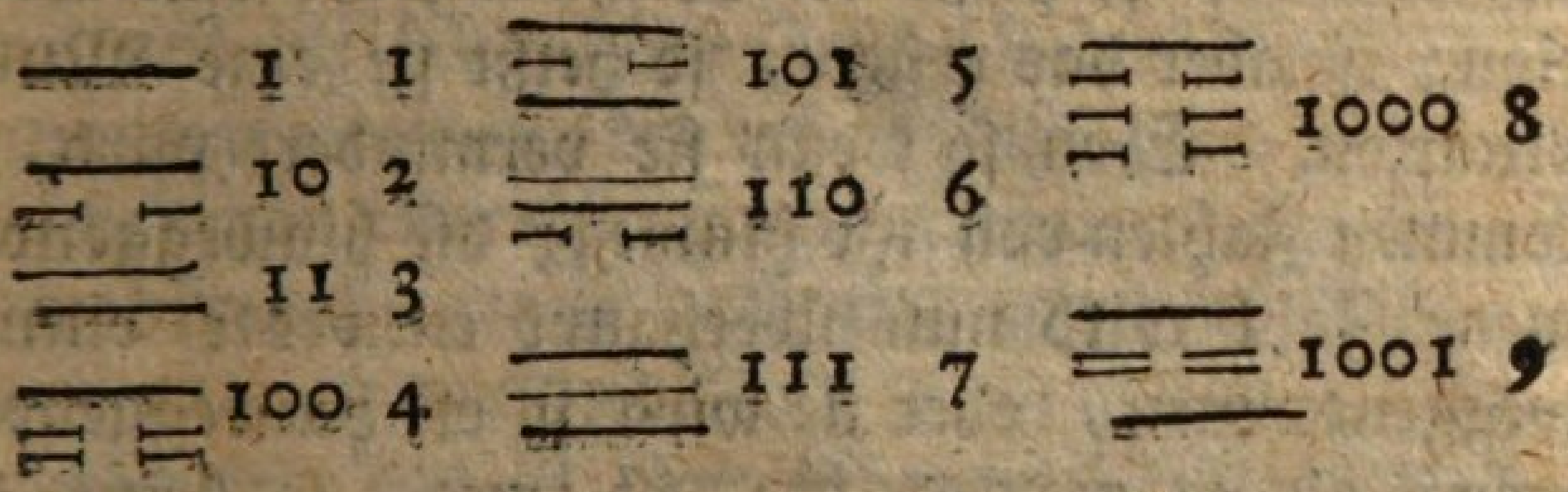
§. 11. Der allgemeine Nutzen dieſer Erfindung iſt ſo groß, daß ſie ſich von keiner andern Erfindung zu rechnen bisher hat verdringen laſſen, und auch vielleicht in Zukunft nicht wird verdrungen werden. Denn man kann mit wenig Zahlzeichen eine ſo groſſe Summe ſchreiben als man verlangt; und die Art der Verbindung, die wir im II. Hauptſtück erklären, iſt ſo bequem und künſtlich, daß man ſchwerlich eine beſſere wird ausfindig machen können.

§. 12. Anmerk. Herr von Leibnitz hat, auſſer der Rechenmaſchine, die bey unſerer Rechnung mit Zahlen entbehrlich iſt, eine eben ſo entbehrliche Dyadik erfunden, welche aus 1 und 0 alle Zahlen zuſammen ſetzt, andere haben eine noch mehr entbehrliche Tetractyk hinzugethan, die nur bis vier zehlet, anſtatt daß unſere Rechnung bis zehen zehlt. Die Leibnitzianiſche Dyadik hat den einigen Vorzug, daß man multipliciren und dividiren kann, ohne das manchen beſchwerliche Einmal Eins zu lernen; hingegen muß man eine groſſe Zahl zu ſchreiben, z. E. nur eine

Mil-

Million, vier hundertmal 1 und 0 auf das Papier ſchreiben, durch welches langweilige Geſchäfte man billig abgeſchröckt wird, eine ſo bequeme Rechnung, die nur ſieben Zahlzeichen zu einer Million gebraucht, mit einer ſo weitläuftigen zu verwechſeln, wenn man auch ſchon das Einmal Eins dabey nicht lernen darf.

§. 13. Anmerk. Uebrigens hat Herr von Leibnitz durch ſeine Dyadik auch einige chineſiſche Charactere zu erläutern geſucht, in welchen gebrochene und ganze Linien vorkamen; und wovon folgende Ordnung zur Erläuterung dient.



§. 14. Anm. Das artigſte bey dieſer Dyadik iſt noch die Anwendung auf die Schöpfung aus Nichts, welche Leibnitz auf einer Gedächtnißmünze, worauf etliche Rechnungsproben nach der Dyadik geprägt waren, mit folgender Innſchrift erläutert hat:

Omnibus ex nihilo ducendis ſufficit unum.

Allgemeiner Vortrag von den vier Rechnungsarten.

§. 15. Erklärungen. Solche Dinge, welche man in Ruckſicht blos auf das, was ſie miteinander gemein haben, betrachtet, und in ſofern für einerley halten kann, ſind Dinge von einerley Art; z. E. ein Engländer, ein Däne und ein Deutſcher haben das miteinander gemein, daß ſie Europäer ſeyen; und in ſofern kann ich ſie zuſammen zehlen; dann es ſind weder drey Engländer, noch drey Dänen, noch drey Deutſche, aber drey Europäer ſind es. Und

dieſer gemeinſchaftliche Character heißt die Einheit; eine Menge von ſolchen Einheiten aber eine Zahl.

§. 16. Lehrſatz. Eine Zahl wird entweder vermindert oder vermehrt; wenn ſie vermehrt wird, ſo kommen mehr Zahlen hinzu; dieſe Zahlen ſind nun der gegebenen Zahl gleich oder nicht gleich; iſt das letztere, ſo heißt die Rechnungsart eine Addition; iſt aber das erſtere, ſo heißt ſie eine Multiplication. Eben ſo wenn ſie vermindert wird, ſo kommen Zahlen von ihr hinweg; die hinweggenommene Zahl wird nun überhaupt entweder einmal weggenommen, oder ſie wird ſo oft hinweggenommen, als es möglich iſt; iſt jenes, ſo heißt die Rechnungsart die Subtraction; iſt dieſes, ſo heißt ſie Diviſion.

§. 17. Erklärungen. Addiren heißt alſo eine Zahl finden, die verſchiedenen andern gegebenen Zahlen zuſammen genommen gleich iſt; dieſe gefundene Zahl wird die Summe genannt, die gegebene heiſſen die ſummirenden. Multipliciren heißt eine Zahl etlichmal zu ſich ſelbſt addiren; was durch dieſe Addition herauskommt, nennt man das Product; und die beede Zahlen, davon die eine zu wiederholten malen wirklich addirt wird, die andere aber anzeigt, wie oft die erſte zu ſich ſelbſt addirt werden ſolle, heiſſen die Factores.

§. 18. Zuſatz. Der eine Factor iſt demnach in dem Product ſo vielmal enthalten, als die Einheit in dem andern Factor enthalten iſt; und es iſt gleich-

gleichgültig, welcher Factor zuerſt geſetzt wird, dann ihr Product wird auch bey veränderter Ordnung immer einerley ſeyn.

§. 19. **Erklärungen.** Subtrahiren heißt von einer gegebenen Zahl eine andere nach Belieben wegnehmen; was übrig bleibt, nennt man die Differenz, oder den Unterſchied. Dahero die Differenz und die ſubtrahirte Zahl (Subtrahendus) zuſammengenommen, der erſten Zahl gleich ſind, von welcher man ſubtrahirt hat (dem numero minuendo). Dividiren hingegen heißt eine gegebene Zahl von einer andern gegebenen Zahl ſo oft abziehen, als es möglich iſt, das iſt, bis nichts mehr übrig bleibt, oder die übriggebliebene Gröſſe ſo klein wird, daß ſie für nichts zu achten iſt. Die Zahl, welche dividirt wird, heißt der Dividendus, die Zahl, womit man dividirt, der Diviſor, und die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Diviſor ſich vom Dividendus habe abziehen laſſen, der Quotient.

§. 20. **Zuſatz.** Der Diviſor muß alſo in dem Dividendus ſo oft enthalten ſeyn, als die Einheit im Quotienten; oder, wenn der Diviſor gröſſer iſt, ſo iſt der Dividendus im Diviſor ſo vielmal enthalten, als der Quotient in der Einheit.

§. 21. **Zuſatz.** Das Product des Diviſors in den Quotienten gibt den Dividendus; und das Product durch einen Factor dividirt, gibt den andern Factor.

§. 22. **Erklärungen.** Gleiche Dinge ſind, welche einerley Gröſſe haben; ähnliche Dinge,

welchen alles einerley iſt, ausgenommen die Gröſſe; gleiche und ähnliche Dinge heißt man Congruent.

§. 23. **Grundſätze.** Das Ganze iſt ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich, folglich gröſſer als ein jeder einzeler Theil. Jede Gröſſe iſt ſich ſelbſt gleich; und wenn zwo Gröſſen einer dritten gleich ſind, ſo ſind ſie einander ſelbſt gleich. Was aber gröſſer oder kleiner iſt, als eine von zwo gleichen Gröſſen, das iſt auch gröſſer oder kleiner als die andere. Gleiches zu gleichem addirt, oder von gleichem ſubtrahirt, oder mit gleichem multiplicirt und dividirt, gibt gleiche Summen, Differenzen, Producte und Quotienten. Sie werden aber ungleich, wenn man ungleiches addirt, oder ſubtrahirt, oder damit multiplicirt und dividirt. Das Gröſſere zum Gleichen addirt oder damit multiplicirt, gibt mehr als das Kleinere, weniger aber, wenn man es ſubtrahirt oder damit dividirt.

§. 24. **Willkührliche Sätze.** Die Zeichen der arithmetiſchen Operationen ſind folgende:

$+$	Zeich. der Addition;	$=$	Zeich. der Gleichheit;	∞	Zeich. des unendlich Groſſen;
$-$	der Subtraction;	$\backsim$	der Aehnlichkeit;	0	was keine Gröſſe hat, oder unendlich klein iſt;
$\cdot$	der Multiplication;	$\cong$	der Congruenz;		
		$<$	deſſen was gröſſer iſt;		
$:$	der Diviſion;	$>$	deſſen was kleiner iſt;	$\surd$	das Wurzelzeichen.

§. 25. Anmerk. Damit die obige Grundſätze, welche in alle mathematiſche Wiſſenſchaften ihren beſtändigen Einfluß haben, als allgemeine, leichte und jedermann faßliche Sätze deſto beſſer erkannt werden, ſo wollen wir ſie mit Exempeln erläutern, die den Gebrauch der Zeichen zugleich beſtimmen können.

5 + 10

$$\begin{array}{c}5+10=15\\ 20>15\\ \hline 20>5+10\end{array}\qquad\begin{array}{c}5+10=15\\ 6<15\\ \hline 6<5+10\end{array}\qquad\begin{array}{c}5+10=15\\ 12+3=15\\ \hline 12+3=5+10\end{array}$$

$$\begin{array}{c}6=4+2\\ 3=3\\ \hline 6+3=4+2+3\end{array}\quad\begin{array}{c}6=4+2\\ 3=3\\ \hline 3.6=3.(4+2)\end{array}\quad\begin{array}{c}6=4+2\\ 3=3\\ \hline 6-3=(4+2)-3\end{array}\quad\begin{array}{c}6=4+2\\ 3=3\\ \hline 6:3=(4+2):3\end{array}$$

$$\begin{array}{c}10=8+2\\ 5>3\\ \hline 10+5>8+2+3\end{array}\quad\begin{array}{c}10=8+2\\ 5>3\\ \hline 5.10>3.(8+2)\end{array}\quad\begin{array}{c}10=8+2\\ 5>3\\ \hline 10-5<(8+2)-3\end{array}\quad\begin{array}{c}10=8+2\\ 5>3\\ \hline 10:5<(8+2):3\end{array}$$

Durch dieſe Exempel werden alle gegebene Grundſätze erläutert, und von dem Geheimnißvollen, das ſie an ſich zu haben ſcheinen, befreyet ſeyn. Was die Zeichen betrift, ſo merken wir noch an, daß eine zuſammengeſetzte Gröſſe, wenn ſie durch eine andere dividirt oder multiplicirt wird u. ſ. w. oder wenn beede zuſammengeſetzt ſind, in () eingeſchloſſen werden; z. E. $(5+7).(3+6)$ oder $(9+2):(4-1)$; bey der Multiplication kann das Zeichen auch in dieſem Fall wegbleiben, z. E. $(4+1)(5+9)$, wie es bey der Multiplication der Buchſtaben allemal wegbleibt, z. E. $a.b=ab$; wie weiter unten gezeigt werden ſolle; ſonſten iſt auch das ſogenannte Andreas-Creuz das Zeichen der Multiplication; z. E. $5\times 10=50$. Die Diviſion zeigt man auch durch einen Querſtrich zwiſchen dem Dividendus und Diviſor an, z. E. $\frac{5}{3}$, $\frac{(6+4)}{(3+2)}$; von den Wurzeln und Potenzen reden wir im folgenden; vorläufig ſetzen wir doch einen Ausdruck ſtatt eines Exempels bey. Dann weil $6.6=36$, ſo heißt 6 die Quadratwurzel aus 36, und wird geſchrieben $\sqrt{36}$, oder $6=\sqrt{36}$; und dieſe Wurzel iſt allemal die Quadratwurzel, wenn nichts in der Oeffnung des Zeichens ſtehet; ſoll es aber eine andere Wurzel ſeyn, ſo muß man es in die Oeffnung hineinſchreiben, die wievielte man verlange, z. E. $\sqrt[3]{27}$, $\sqrt[4]{64}$, oder überhaupt $\sqrt[n]{100}$, die $n$te Wurzel aus hundert.

Das Ausſprechen und Schreiben der Zahlen.

§. 26. Willkührl. Satz. Man zehlet von eins

eins bis zehen, ſo daß man den neun erſten Einheiten beſondere Zeichen gibt, die Zahl zehen aber durch die Verbindung von 1 und 0 ausdrücket. Daß dieſer Satz willkührlich ſeye, erhellet daher, weil man nicht genöthigt iſt, mit einfachen Zeichen gerade ſo weit zu zehlen; man könnte eher noch aufhören, etwa ſchon bey zwey, wie die Leibnitzianiſche Dyadik es weiſet. Inzwiſchen hat dieſe übliche Rechnungsart ihre groſſe Vortheile, davon wir §. 9. etwas geſagt. Die dabey übliche bekannte Zeichen ſind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und die 0, welche durch Verbindung mit 1 zehen, mit 2 zwanzig u. ſ. w. nemlich allemal zehenmal ſo viel als die einfache Zahl gibt.

§. 27. Anmerk. Man hätte ſtatt der 0 auch ein anderes Zeichen, z. E. ein Sternlein * oder ſo was gebrauchen können; dann das Zeichen der 0 iſt hier keine Nulle, wie man ſonſt die Nullen nimmt, ſondern eine bloſſe Anzeige, daß die Einheit um eine Stelle weiter vor ſich gerückt worden ſeye.

§. 28. **Lehnſatz.** Neun Zeichen laſſen ſich nicht weiter als neunmal neun, oder 81mal ſetzen und combiniren, wenn je zwey und zwey combinirt werden; wie in der Lehre der Combinationen gezeigt werden ſolle; folglich kann man mit den gewöhnlichen 9 Zahlzeichen hundert nicht anders ſchreiben, als durch eine dreyfache Verbindung; denn 81mal werden die neun Einheiten miteinander, neunmal mit der 0 combinirt, das gibt neunzig; dazu kommen noch die neun einzele Einheiten; das macht 99; folglich muß bey der Zahl hundert die dreyfache Combination anfangen.

§. 29.

§. 29. Zuſatz. Eben ſo kann man beweiſen, daß bey tauſend die vierfache, bey zehentauſend die fünffache Combination u. ſ. w. anfangen muß.

§. 30. Willkührl. Satz. Die neun einfache Zahlzeichen haben ihre eigene Namen. Das erſte zuſammengeſetzte Zahlzeichen, nemlich 10, hat ebenfalls einen beſondern Namen, und heißt zehen; die folgende bekommen ihre Benennungen aus den Namen der einfachen, und erſten zuſammengeſetzten Zahl; z. E. ſiebenzehen, achtzehen, dreyſig, vierzig u. ſ. w. zehenmal zehen wird hundert genannt; zehenmal hundert heißt tauſend, u. ſ. w. endlich um aller Verwirrung bey den zu oft wiederholten Tönen vorzubeugen, nennt man tauſendmal tauſend eine Million, millionmal million eine Billion, millionmal billion eine Trillion u. ſ. w.

§. 31. Willkührl. Sätze. In der erſten Stelle zur Rechten ſtehen die Einheiten, in der zweyten gegen die Linke die Zehner, in der dritten die Hunderter, in der vierten die Tauſender u. ſ. w. Die Nullen dienen, die leeren Plätze auszufüllen, wenn z. E. kein Zehner, kein Hunderter, aber ein Tauſender u. ſ. w. vorhanden iſt. Es wird dahero leicht ſeyn eine Zahl auszuſprechen, wenn man ſie hinter ſich lißt, oder will man ſie von vornen leſen, ſo muß man, wofern die Zahl groß iſt, weil man nicht leicht über 3 oder 6 Zahlen auf einmal ſchnell überſchauen kann, von 3 zu 3, oder wenigſtens von 6 zu 6 Zeichen machen, welches Strichlein oder Punkten ſeyn können, wodurch man die Claſſen und den Wehrt der Zahlen, das iſt, die Stellen der Tauſender und der Millionen anzeigt.

§. 32. Anmerk. Nun wird ſich eine jede Zahl leicht ausſprechen laſſen. Z. E. 4'568,423 ſind, wenn man hinter ſich lißt, 3 Einheiten, 2 Zehner, 4 Hunderter, 8 Tauſender, 6 Zehentauſender, 5 Hunderttauſender, 4 Tauſendmaltauſender, oder 4 Millionen; von vornen aber, durch Hülfe der Strichlein, wo die Tauſender und Millionen anfangen; 4 Millionen, Fünfhundert und Acht und Sechzig Tauſend, Vierhundert und Drey und Zwanzig. Eben ſo läßt ſich eine Zahl mit Nullen vermengt ausſprechen. Z. E. 302'004,603 ſind 3 Einheiten, kein Zehner, 6 Hunderter, 4 Tauſender, kein Zehentauſender, kein Hunderttauſender, 2 Millonen, kein Zehner von Millionen, 3 Hunderter von Millionen; wenn man hinter ſich lißt; von vornen aber, durch Hülfe der Strichlein, Dreyhundert und zwo Millionen, Viertauſend Sechshundert und Drey.

§. 33. Anmerk. Die deutſche Sprache hat etwas beſonders und dabey ſehr unſchickliches vor den meiſten andern Sprachen, daß ſie gemeiniglich die kleinere Zahl vor der gröſſern im Ausſprechen ſetzt, und z. E. drey und zwanzig ſtatt zwanzig drey, fünf und neunzig ſtatt neunzig fünf u. ſ. w. ſagt. Man iſt es aber einmal ſo gewohnt, und muß alſo der dabey zu beſorgenden Verwirrung durch deſto gröſſere Aufmerkſamkeit zu begegnen ſuchen. Doch gibt es auch Gelehrte, welche die natürliche Ordnung der eingewurzelten Gewohnheit vorziehen, und ſchlechterdings, fünfzig vier, ſechzig drey, ſtatt vier und fünfzig und drey und ſechzig ausſprechen. In Rechnungen mit genannten Zahlen, in Capitalbriefen und Schuldverſchreibungen findet man dieſe letztere Art ſich auszudrucken nicht ſelten, wenn man nemlich die Zahlen ganz ausſchreibet, und nicht nur mit den ſogenannten arabiſchen Zahlzeichen anzeigt.

Die vier Rechnungsarten in ganzen Zahlen.

§. 34. Lehrſ. Verſchiedene Zahlen werden addirt, wenn man von der Rechten zur Linken die Zahlen ſo untereinander ſchreibt, daß Einheiten unter die Einheiten, Zehner unter die Zehner, Hunderter unter die Hunderter u. ſ. w. zu ſtehen kommen, worauf man jede Reyhe, nemlich die Reyhe der Einheiten, der Zehner, der Hunderter u. ſ. w.

zuſammen zehlt, und hernach entweder die einzele Summen wieder addirt, oder wenn man eine Fertigkeit im Zuſammenzehlen beſitzt, ſie gleich bey dem erſten Addiren ſo zuſammen zehlt, daß Einheiten, Zehner, Hunderter ihre rechte Stelle bekommen, wenn ſie etwa für eine der folgenden Reyhe im Sinn aufbehalten werden müßten. Wenn man nun keinen Fehler begeht, ſo wird die Summe den gegebenen Zahlen vollkommen gleich ſeyn, weil das Ganze ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich iſt.

§. 35. Anmerk. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern. Es ſeyen folgende Zahlen gegeben. So ſagt man: 4 und 1 und 5 geben 10; die man hinter den Strich ſetzt; wiederum 9 und 2 und 4 geben 15 (Zehner); die man unter den Zehner von der Rechten zur Linken ſchreibt; ferner 8 und 3 und 3 geben 14 (Hunderter), in ihre Reyhe geſetzt; 4 und 5 und 8 geben 17 (Tauſender); und noch 67 Zehentauſender ſind 67 Zehentauſender; dieſe Partial-Summen addirt man wiederum, und ſagt, 0 iſt 0, 5 und 1 iſt 6, 4 und 1 iſt 5, 7 und 1 iſt 8, 7 und 1 iſt 8, 6 iſt 6; da dann die untere Zahl heraus kommt. Wenn aber dieſe Methode zu langweilig ſcheint, wie ſie es in der That iſt, ſo muß man nur ſo viel Fertigkeit bekommen, daß man im Stand iſt, Zahlen im Kopf zu behalten; da dann das Exempel alſo gemacht wird: 4 und 1 und 5 geben 10, ſetze 0 behalt 1, (einen Zehner in die folgende Claſſe) 9 und 2 und 4 geben 15 und 1 behalten geben 16, ſetze 6 behalte 1, (einen Hunderter in die folgende Claſſe;) 8 und 3 und 3 geben 14 und 1 behalten geben 15 Hunderter; ſetze 5 behalte 1 (einen Tauſender in die folgende Claſſe;) 4 und 5 und 8 geben 17 und 1 behalten, geben 18; ſetze 8, behalte 1, (einen Zehentauſender in die folgende Claſſe;) 7 und 1 behalten geben 8 Zehentauſender; ſetze 8; 6 (Hunderttauſender) ſind 6 (Hunderttauſender) ſetze 6. In dieſem Fall wird die obige Summe ſchneller und eben ſo richtig herauskommen, wie die Operation es zeiget, wenn man nur eine Fertigkeit im Zuſammenzehlen erlangt hat.

$$\begin{array}{r} 678345 \\ 5321 \\ 4894 \\ \hline 10 \\ 15 \\ 14 \\ 17 \\ 67 \\ \hline 688560 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 678345 \\ 5321 \\ 4894 \\ \hline 688560 \end{array}$$

§. 36.

§. 36. Anmerk. Man hat bey dem Addiren eine ſogenannte Neuner-Probe, nach welcher man in den ſummirenden Zahlen ſo oft 9 hinwegwirft, als in der Summe, wobey man aber auch diejenige Neuner mit einrechnen muß, die man bey dem Summiren hinweggeworfen hat; wenn beyderſeits gleiches übrig bleibt, ſo hat man recht gerechnet. Dann ſonſt, wenn man nur die Neuner aus der Summe und den ſummirenden Zahlen wegwirft, ohne auf diejenige zu ſehen, die man bey der Addition ſelbſt weggeworfen hat, würde, wenn man gerad allemal um 9 fehlet, die Probe richtig, und doch das Exempel falſch gerechnet ſeyn. Z. E. Es iſt grundfalſch, daß 548 + 572 = 2029; und doch hält das Exempel die Neuner-Probe; wenn man bloß die Neuner in der Summe und in den ſummirenden Zahlen wegwirft; der Fehler aber wird entdeckt, wenn man auf die bey der wirklichen Addition hinweggeworfene Neuner Achtung gibt.

§. 37. Anmerk. Die Addition muß zuweilen dem Ausſprechen der Zahlen zu Hülfe kommen, beſonders bey den ſogenannten Vexier-Aufgaben; wenn man z. E. eilf tauſend eilf hundert und eilf einem zu ſchreiben aufgibt, ſo muß er einzele Zahlen ſetzen, und ſodann addiren, da dann die Summe iſt 12111. Die Sache ſelbſt iſt übrigens von gar keiner Wichtigkeit.

§. 38. Lehrſatz. Eine kleine Zahl wird von einer gröſſern abgezogen, wenn man die Zahlen ſo untereinander ſchreibt, daß Einheiten auf Einheiten, Zehner auf Zehner, Hunderter auf Hunderter, oder wenigſtens auf ihre Stellen, wenn Nullen da ſind, zu ſtehen kommen; da man dann von der Rechten zur Linken die Einheiten, Zehner u. ſ. w. ſubtrahirt, bis alles abgezogen iſt was man verlangt. Wenn alle Zahlzeichen der obern Reyhe gröſſer ſind, als der untern, ſo iſt die Sache vor ſich klar genug. Wenn aber einige Zahlzeichen der obern Zahl kleiner als der untern ſind, oder wenn gar Nullen vorhanden wären, ſo entlehnt man von den höhern Stellen zur Linken eine Einheit der Zehner, oder der Hunderter, oder der Tauſender u. ſ. w. welche in der nächſt niedern Stelle allemal das Zehenfache ſeyn wird,

weil

weil eine Einheit der Hunderter zehen Zehner, eine Einheit der Tauſender zehen Hunderter u. ſ. w. gibt. In welchem Fall man allemal wird ſubtrahiren können. Was endlich die Nullen betrift, ſo iſt es entweder eine, oder es ſind mehrere hintereinander; iſt es eine einige, ſo wird durch das Entlehnen 10 daraus, weil 10 + 0 = 10; davon man allemal die untere Zahl abziehen kann; ſtehen aber mehrere hintereinander, ſo geht man ſo weit zur Linken, bis man ein Zahlzeichen findet, ſollte es auch in der Millionen Stelle von der Einheit an gerechnet ſeyn, davon man entlehnen kann, da dann die dazwiſchen liegende Nullen zu Neuner werden, weil z. E. 1000 — 1 = 999 und 2000 — 1 = 1999 oder 3000 — 2 = 2998. u. ſ. w. dann wenn die letzte Null in 10 verwandelt wird, ſo müſſen alle vorhergehende in 9 verwandelt werden, wie die bey den Zahlen angenommene Combinations-Lehre zeiget; z. E. 2000 = 1990 + 10.

§. 39. Anmerkung. Exempel machen die Sache deutlich: wir ſetzen fünf Fälle. Der I. iſt, wenn alle untere Zahlen kleiner als die obere ſind;

3648 2125 1523	Da es heißt: 5 von 8 läßt 3 (Einheiten) 2 von 4 läßt 2 (Zehner) 1 von 6 läßt 5 (Hunderter) 2 von 3 läßt 1 (Tauſender). Die Differenz iſt alſo 1523.

II. Fall, wenn die untere Zahlen theils kleiner, theils gleich groß ſind mit den obern, und noch über das die untere Reyhe weniger Zahlzeichen hat;

5482 472 5010	Da es heißt: 2 von 2 geht auf, läßt keine Einheit, alſo ſetzt man eine Null in die Stelle der Einheit; 7 von 8 läßt 1 (Zehner) 4 von 4 läßt keinen Hunderter, alſo ſetzt man eine 0 in die Stelle der Hunderter; nichts von 5 läßt 5 (Tauſender) dann es iſt eben ſo viel, als ob unter dem 5 eine Nulle ſtünde.

III. Fall, wenn in der untern Zahl einige gröſſere Zahlzeichen ſich befinden als in der obern, da man dann von den höhern Stellen entlehnt;

65.3.2
249
6283

z. E. 9 von 2 läßt ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der Zehner eine Einheit, die hernach 10.1 gibt; 10 + 2 machen 12, davon läßt ſich 9 abziehen, und der Reſt iſt 3; ferner 4 von 2, weil der Dreyer eine Einheit verlohren hat, läßt ſich wieder nicht abziehen, man entlehnt dahero von 5 aus der Stelle der Hunderter eine Einheit, die zehen Zehner gibt, 10 + 2 gibt 12, davon läßt ſich 4 abziehen, und der Reſt iſt 8; 2 von 4, weil 5 eines verlohren hat, läßt 2; nichts von 6 läßt 6. Dahero die Differenz richtig gefunden iſt.

IV. Fall, wenn Nullen theils oben theils unten vorhanden ſind.

604.02
50061
10341

1 von 2 läßt 1, 6 von 0 geht nicht an, man entlehnt eins, ſo wird die Nulle zehen; 6 von 10 läßt 4; 0 von 3 läßt 3; 0 von 0 läßt 0, 5 von 6 läßt 1.

V. Fall, wenn oben mehrere Nullen nach einander vorhanden ſind.

7.0.0.2.0.0.4
1003025
5998979

5 von 4 läßt ſich nicht ſubtrahiren, und weil nächſt vorher Nullen ſtehen, ſo entlehnt man aus der Stelle der Tauſender eine Einheit, durch welches Entlehnen die zwo Nullen zu Neuner werden, weil von der letztern, die eigentlich 10 worden, auch eine Einheit zu den 4 hinweg kommt; nun kann man entlehnen; 5 von 14 läßt 9; 2 von 9 läßt 7, 0 von 9 läßt 9; 3 von 1 geht nicht an, man entlehnt alſo aus der Stelle der Millionen, und ſagt 3 von 11 läßt 8, 0 von 9 läßt 9, 0 von 9 läßt 9, 1 von 6 läßt 5.

§. 40. Anmerk. Man hat noch eine Methode bey dem Entlehnen, die aber ohne Noth gekünſtelt und weitläuftiger als dieſe iſt, wenn man nemlich des Subtrahendi folgende Stelle mit einem Punkt bezeichnet, dadurch ſie um eine Einheit vermehrt wird. Z. E. 9 von 18 läßt 9, 7 von 14 läßt 7, 3 von 5 läßt 2; dieſe widerſinniſche Art zu ſubtrahiren iſt zwar richtig, dann es kommt eben ſo viel heraus, wenn man ſagt, 9 von 18 läßt 9, 6 von 13 läßt 7, 2 von 4 läßt 2; aber ſie iſt nicht in der Natur der Subtraction und des Wehrts der Zahlzeichen gegründet; indeme die untere Zahlen niemalen wirklich vermehrt werden, wenn man oben etwas entlehnt.

548
2.6.9
279

§. 41. Zuſatz. Wenn man die Differenz und die ſubtrahirte Zahl wiederum zuſammen addirt, ſo kommt die zu vermindernde Zahl (numerus minuendus) wieder heraus; dann wenn man von einem Ganzen was hinwegnimmt, und addirt das hinweggenommene wieder zu dem verminderten Ganzen, ſo muß das vorige Ganze wieder herauskommen. Diß heißt man auch die Probe der Subtraction. Eben ſo erhellt, daß wenn man von der Summe einige Reyhen der ſummirenden Zahlen ſubtrahirt, die übrige ſummirende Zahlen die Differenz geben. Auf dieſe Weiſe dienen die Addition und Subtraction einander wechſelsweiſe zur Probe.

§. 42. Lehrſatz. Alle Producte der neun einfachen Zahlen laſſen ſich finden, wenn man die neun Zahlzeichen in einer Horizontal-Reyhe ſchreibt, und in dem Vertical-Reyhen herabwärts eine jede neunmal nach einander zu ſich ſelbſt addirt, da dann die von beeden Seiten gezogene Parallelen die Producte richtig zeigen werden. Z. E. 3 mal 4 weißt im Parallelogramm auf 12, 8 mal 7 auf 56, u. ſ. w.

A B

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

C D

§. 43. Zuſatz. Iſt einer von den Factoribus ein Zehner, Hunderter, oder überhaupt von höherer Ordnung, ſo darf man nur das Product mit der höhern Ordnung multipliciren; z. E. 300.6 = 3.6. 100 = 18 . 100 = 1800; eben ſo macht mans, wenn beede Factores höherer Ordnung ſind; z. E. 300.40 = 3.4.100.10 = 12.100.10 = 12000. Folglich kann man das angegebene Rechentäfelein für alle Zahlen gebrauchen, man heißt es ſonſt das **Einmal Eins**.

§. 44. **Lehrſatz.** Zwo Zahlen werden mit einander multiplicirt, wenn man die Einheiten, Zehner, Hunderter u. ſ. w. des einen Factors mit den Einheiten, Zehnern, Hundertern u. ſ. w. des andern multiplicirt, und die Partialproducte addirt, da dann die Summe dem ganzen Product gleich ſeyn muß, weil das Ganze ſeinen Theilen zuſammen genommen gleich iſt.

§. 45. Anmerk. Die Sache wird durch ein Exempel deutlich werden; es gibt zween Fälle; der erſte iſt, wenn der eine Factor nur ein Zahlzeichen hat, der andere, wenn beede mehrere Zahlzeichen haben. Ein Exempel des erſten Falls iſt das folgende:

3428	
6	
48	
12	
24	
18	
20568	

6.8 ſind 48 (Einheiten) 6 . 2 ſind 12 (Zehner) 6 . 4 ſind 24 (Hunderter) u. ſ. w. Dieſe Partial-Producte, in ihre Stelle geſetzt, geben durch die Addition die untere Summe; 20568. Das Exempel wird aber kürzer gerechnet, wenn man die Zehner, Hunderter u. ſ. w. im Sinn, wie in der Addition behält; da es dann heißt: 6.8 ſind 48, ſetze 8, behalte 4, 6 mal 2 ſind 12 und 4 behalten ſind 16, ſetze 6, behalte 1 (Hunderter); 6 mal 4 ſind 24, und 1 behalten ſind 25, ſetze 5, behalte 2 (Tauſender), 6 mal 3 ſind 18 und 2 behalten ſind 20 (Tauſender); wie beygeſetztes Exempel in Zahlen zeiget; und dadurch wird der II. Fall deſto leichter: wenn nemlich beede Factores mehrere

3428	
6	
20568	

```
   3452
    346
  -----
  20712
 13808
10356
-------
1194392
```

Ziffer haben, z. E. 6.2 ſind 12, ſetze 2 behalt 1, 6.5 ſind 30 und 1 behalten ſind 31, ſetze 1 behalt 3 u. ſ. w. hernach multiplicirt man mit dem Factor der Zehner, 40.2 ſind 80, oder 8 Zehner, in die Stelle der Zehner geſetzt, da die Nulle wegbleiben kann, u. ſ. w. endlich mit dem Factor der Hunderter, 300.2 = 600, oder 6 in die Stelle der Hunderter geſetzt, da dann wieder beede Nullen wegbleiben können; die Partial-Producte addirt man, ſo iſt die Summe das ganze Product.

§. 46. Anmerk. Wenn ein Factor am Ende Nullen hat, ſo wird nur mit den Zahlzeichen multiplicirt, z. E. 423 . 200 = 423 . 2 . 100 = 846 . 100 = 84600, und die Nullen werden nach geſchehener Multiplication angehängt; und wenn ein Factor in der Mitte Nullen hat, ſo wird die nächſtfolgende Reyhe um ſo viel Stellen weiter hinausgerückt, als Nullen in einem fort ſtehen; weil man ſonſt eine ganze Reyhe Nullen ohne Noth ſchreiben müßte; der Grund von dieſer Abkürzung der Rechnung erhellet aus §. 43.

4235	52832
302	2006
8470	316992
12705	105664
1278970	105980992

§. 47. Lehrſatz. Eine Zahl wird durch eine andere kleinere dividirt, wenn man ſucht, wie vielmal der Diviſor in den höchſten Ziffern des Dividendus, und ſo weiter in allen nachfolgenden enthalten iſt, z. E. in den Tauſendern, Hundertern, Zehnern, Einheiten; und die Partial-Quotienten hernach addirt; oder weil die Stellen des Quotienten durch die nachfolgende ſelbſt beſtimmt werden, nur, um die Weitläuftigkeit im Schreiben zu vermeiden, in der Ordnung ohne Nullen fortſchreibt.

§. 48. Anmerk. Es gibt bey der Diviſion zwo Hauptfälle wie bey der Multiplication; nemlich wenn der Diviſor ein einiges Zahlzeichen iſt, und zweytens, wenn er aus mehrern beſteht;

5945	1000
(5)	100
5000	80
945	9
(5)	1189
500	
445	
(5)	
400	
45	
(5)	
45	
0	

I. Fall. 5 iſt in 5 Tauſendern enthalten 1000 mal, dieſe 1000 mit 5 multiplicirt geben 5000, u. von der erſten Zahl abgezogen laſſen 945; 5 in 9 Hunderter ſind enthalten 100 mal; dieſer Quotient mit 5 multiplicirt gibt 500, welche von 945 abgezogen 445 übrig laſſen; 5 in 44 Zehner ſind enthalten 80 mal, 80 . 5 ſind 400, dieſe von 445 abgezogen laſſen 45; 5 in 45 Einheiten ſind enthalten 9 mal; 5 . 9 iſt 45, 45 von 45 läßt nichts. Wenn man nun die Partial-Producte addirt, ſo hat man 1189. Die Operation enthält den Beweis ſelbſt, folglich auch von der kürzern, wenn man die Nullen wegläßt, und in einem fort die Quotienten ſchreibt, welches bey einfachen Diviſoribus über ſich ſo leicht als unter ſich angeht, wie folgendes Exempel ausweißt:

~~5~~
~~5945~~ | 1189.
~~5555~~

Der andere Fall iſt, wenn der Diviſor aus mehr Zahlzeichen beſteht, ſo ſucht man, wie oft die kleinere Zahl in der unmittelbar darüber ſtehenden gröſſern enthalten ſeye; und weil man kein Einmal Eins für zuſammengeſetzte Zahlen hat, ſo muß man es eben verſuchen, da dann der Fehler, wenn man allenfalls es nicht recht getroffen hätte, bey der Methode unter ſich zu dividiren, leicht entdeckt und verbeſſert werden kann. Z. E.

7654	$206\frac{32}{37}$
(37)	
74	
25	
(37)	
00	
254	
(37)	
222	
32	

7654 ſollen durch 37 dividirt werden; da man ſagt, 3 in 7 iſt zweymal enthalten, 2 . 37 iſt 74, diß von der obigen Zahl 76 ſubtrahirt läßt 2, wozu man die folgende Zahl 5 herabſetzt; 3 in 2 iſt kein ganzes mal enthalten, man ſetzt alſo in den Quotienten 0, und weil 0 . 37 = 0, ſo bleiben 25 ganz übrig, wozu man die folgende Zahl 4 ſetzt, und abermal den Diviſor unterſchreibt; 3 in 25 iſt wegen dem folgenden 7 des Diviſors nur 6 mal enthalten, oder 37 in 254 iſt 6 ganze mal enthalten; 6 . 37 = 222, dieſe Zahl von der obigen abgezogen läßt 32, welche Zahl nicht mehr ganz dividirt werden kann,

man

man ſchreibt ſie daher zum Quotienten als einen Bruch $\frac{32}{37}$, davon im folgenden gehandelt wird.

§. 49. Zuſatz. Wenn die erſte Zahl des Diviſors gröſſer iſt als des Dividendus, ſo wird der Diviſor um eine Stelle weiter zurückgeſetzt. Z. E.

```
4.2.3 6 | 68 20/62
 (6 2) 1 |
 3 7 2 1 └
 -------
   5.1 6
    (62)
   4 9 6
 -------
      20
```

§. 50. Zuſatz. Wenn an dem Ende des Diviſors Nullen ſtehen, ſo werden von dem Dividendus ſo viel Zahlzeichen am Ende abgeſchnitten, als der Diviſor Nullen hat; z. E. 3248 dividirt durch 200 iſt

```
 1
 32 | 48 |  =  16 48/200
 22 | 00 └
```

§. 51. Anmerk. Die Art und Weiſe unter ſich zu dividiren iſt bis §. 50. vorgetragen worden; ſie iſt die leichteſte, und der Sache am meiſten gemäß, indem die Producte ordentlich unter einander geſchrieben werden, daß nicht leicht eine Verwirrung entſtehen kann. Wer das über ſich Dividiren gewohnt iſt, wird wohl thun, wenn er auch dieſe Art lernet, weil man doch ſie können muß, wenn man Quadrat- und Cubicwurzeln ausziehen will; bey einfachen Diviſoribus iſt es ſchneller geſchehen, wenn man über ſich dividirt; ſonſt aber iſt die Art unter ſich zu dividiren allemal vorzuziehen; übrigens ſieht das obige Exempel §. 48. wenn man über ſich dividirt, folgendermaſſen aus:

```
  2(3 2
7 6 8 4 | 206
3 7 7 7 └
  3 3
```

man muß nemlich alle Producte im Kopf behalten und abziehen können.

§. 52. Zuſatz. Wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multiplicirt, und wenn was übrig geblieben iſt, zum Product addirt, ſo muß der Dividendus wieder herauskommen; und wenn man das Product durch einen von den Factoribus dividirt, ſo muß der andere Factor wieder herauskommen, woferne man im Rechnen nicht gefehlet hat; auf dieſe Weiſe dienen die Multiplication und Diviſion einander gegenſeitig zur Probe.

§. 53. Zuſatz. Eine Zahl durch Eins multiplicirt oder dividirt wird nicht verändert. 6 . 1 = 6. und $\frac{6}{1}$ = 6.

Die Rechnung in Brüchen.

§. 54. Erklärungen. Wenn ein Ganzes in etliche oder mehrere gleiche Theile getheilet wird, ſo heißt man einen oder mehrere Theile die von dieſem Ganzen genommen werden, in Vergleichung mit dem Ganzen einen Bruch (fractio). Diejenige Zahl, welche anzeigt, in wie viel Theile das Ganze getheilet worden, heißt der Nenner, (denominator); die andere Zahl, welche anzeigt, wie viel Theile genommen werden, heißt der Zehler, (numerator); den Zehler ſchreibt man oben, und den Nenner unten, ſo, daß beede durch einen Querſtrich abgeſondert werden; z. E. $\frac{4}{7}$. Wenn der Zehler kleiner iſt als der Nenner, ſo heißt der Bruch ein eigentlicher Bruch (fractio propria), uneigentlich aber, oder (fractio ſpuria), wenn der Zehler gröſſer iſt als der Nenner; z. E. $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{7}$ ſind uneigentliche Brüche.

§. 55. Anmerk. Man kann die Brüche wie die Quotienten in der Diviſion anſehen; weil aber in einem eigentlichen Bruch der Nenner im Zehler nicht ein ganzes mal enthalten iſt, ſo fragt ſichs, wie oft ein gegebener Theil vom Ganzen, oder was für ein Theil vom Ganzen in dem Zehler enthalten ſeye; z. E. in dem Bruch $\frac{7}{10}$ iſt die groſſe Zahl 10 in der kleinen 7 kein ganzes mal enthalten; aber das Ganze ſelbſt iſt in 10 Theil abgetheilt worden, und der zehente Theil vom Ganzen iſt in dem Zehler ſiebenmal enthalten.

§. 56. Lehrſatz. Brüche bleiben unverändert, wenn man den Zehler und Nenner mit einer und eben derſelben Zahl multiplicirt; dann wenn beede mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden, ſo iſt es eben ſo viel, als ob ſie mit eins multiplicirt oder dividirt würden; weil $\frac{6}{6} = 1$, oder allgemein $\frac{m}{m} = 1$; dieſe Multiplication und Diviſion durch eins läßt die Gröſſe unverändert §. 53. Oder auf folgende Weiſe: Wenn der Zehler und Nenner mit einer und eben derſelben Zahl multiplicirt werden, ſo wird der Bruch durch die eine Multiplication um ſo viel gröſſer, um ſo viel er durch die andere wieder kleiner wird. Folglich muß er ungeändert bleiben. Eben das gilt bey der Diviſion. z. Ex. $\frac{5}{6} = \frac{5.3}{6.3} = \frac{15}{18}$; und wiederum $\frac{6}{8} = \frac{6:2}{8:2} = \frac{3}{4}$.

§. 57. Zuſatz. Man kann alſo leicht Brüche von verſchiedenen Nennern unter einerley Benennung bringen, das heißt, ſchaffen, daß ſie alle einerley Nenner bekommen, wenn man nur einen jeden Bruch durch den Nenner des andern, oder wenn es mehr als zween ſind, einen jeden Bruch, das iſt, Zehler und Neuner, in das Product aller übrigen Nenner, ſeinen eigenen ausgenommen, mul-

tiplicirt. z. E. $\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{3.5}{4.5} + \frac{2.4}{4.5} = \frac{15}{20} + \frac{8}{20}$, oder $\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{4}{5} = \frac{2.2.5}{3.2.5} + \frac{1.3.5}{3.2.5} + \frac{4.2.3}{3.2.5} = \frac{20}{30} + \frac{15}{30} + \frac{24}{30}$.

§. 58. Zuſatz. Eben auf dieſe Weiſe iſt leicht zu urtheilen, ob ein Bruch gröſſer oder kleiner als der andere ſey; wenn man ſie nur vorher unter einerley Benennung gebracht hat; So iſt unter den drey Brüchen $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{4}{5}$ der letzte der gröſte, und der mittlere der kleinſte, weil $\frac{24}{30} > \frac{20}{30} > \frac{15}{30}$.

§. 59. Zuſatz. Brüche kann man dahero auch leicht aufheben, das iſt, kleiner ausdrücken, wenn ſich Zehler und Nenner mit einer dritten Zahl genau dividiren laſſen.

§. 60. Anmerk. Die Diviſores von groſſen Zahlen muß man durch Uebung finden lernen, oder wenn man es nicht ſchnell genug kann, den Nenner durch den Zehler ſo lang dividiren, als er ſich dividiren läßt, die letzte Zahl wird hernach beede dividiren, und den Bruch aufheben. Sonſten hat man folgende Regel die Diviſores ſchnell zu finden; man ſetze die Buchſtaben des Alphabeths, a, b, c; a ſollen die Einheiten, b die Zehner, c die Hunderter bedeuten u. ſ. w. ſo wird der allgemeine Ausdruck aller Zahlen ſeyn $a + 10b + 100c + 1000d + 10000e + 100000f$ u. ſ. w. Dividirt man nun dieſe allgemeine Zahl durch die 9 erſte Zahlzeichen oder auch mit den folgenden, und merkt auf die Reſte, ſo kann man gewiſſe Regeln machen.

2	a
3	$a + b + c + d + e + f$
4	$a + 2b$
5	a
6	$a + 4b + 4c + 4d + 4e$ &c.
7	$a + 3b + 2c + 6d + 4e + 5c + g + 3h + 2i + 6k$ &c.
8	$a + 2b + 4c$
9	$a + b + c + d + e$ &c.
10	a
11	$a + 10b + c + 10d + e + 10f$ &c. das iſt $a - b + c - d + e - f$ &c.

Das gibt folgende Regeln. 1. Wenn ſich das letzte Zahlzeichen durch 2, oder 5, oder 10 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze Zahl durch 2, 5, und 10 dividiren. 2. Wenn ſich die Summe aller Zahlzeichen durch 3 oder 9 dividiren läßt, ſo läßt ſich die ganze

Zahl

Zahl dadurch dividiren u. ſ. w. Dann z. E. a + 10b + 100c + 1000d dividirt durch 2, iſt $\frac{a}{2}$ + 5b + 50c + 500d u. ſ. w. es gibt alſo bey allen folgenden Zahlen keinen Bruch; wenn daher $\frac{a}{2}$ ſich ganz dividiren läßt ohne Bruch, ſo läßt ſich die ganze Zahl gewiß dadurch dividiren.

§. 61. Lehrſatz. Brüche laſſen ſich addiren und von einander ſubtrahiren, wenn man, woferne ſie einerley Nenner haben, nur die Zehler addirt oder von einander ſubtrahirt, und hernach den gemeinſchaftlichen Nenner darunter ſetzt. Dann der Nenner iſt der Name des Bruches; was aber gleichnahmig iſt, das kann man zuſammen zehlen; ſind aber die Nenner verſchieden, ſo muß man ſie vorher unter einerley Benennung bringen, und hernach addiren oder ſubtrahiren.

Exempel $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$; $\frac{7}{8} + \frac{3}{8} = \frac{10}{8} = 1\frac{2}{8} = 1\frac{1}{4}$

So iſt die Summe der Brüche §. 57. zuſammen $\frac{59}{30} = 1\frac{29}{30}$.

§. 62. Zuſatz. Man begreift von ſelbſt, wie man bey der Addition, wenn mehrmalen uneigentliche Brüche herauskommen, ſolche Brüche in ganze Zahlen verwandeln könne, wenn man nur wirklich mit dem Nenner dividirt, und was übrig bleibt, als einen Bruch ſetzt, den man nach Befinden aufheben kann, wie denn $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. nach §. 59.

§. 63. Zuſatz. Wenn man ganze Zahlen und Brüche addiren will, ſo muß man ſie unter einerley Benennung bringen, das iſt, die ganze Zahl als einen uneigentlichen Bruch anſehen, deſſen Nenner = 1, und ſodann nach geſchehener Reduction unter einerley Benennung addiren. z. E. $4 + \frac{3}{8}$
$= \frac{4}{1}$

$= \frac{4}{1} + \frac{3}{8} = \frac{4.8}{1.8} + \frac{3.1}{1.8} = \frac{32}{8} + \frac{3}{8} = \frac{35}{8}$. Eben das gilt bey der Subtraction, z. E. $5 - \frac{3}{4} = \frac{5}{1} - \frac{3}{4} = \frac{5.4}{1.4} - \frac{3.1}{1.4} = \frac{20 - 3}{4} = \frac{17}{4}$.

§. 64. Zuſatz. Wenn man die Differenz zu dem ſubtrahirten Bruch wieder addirt, ſo kommt der erſte Bruch heraus. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$ und $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

§. 65. Lehrſatz. Brüche werden miteinander multiplicirt, wenn man Zehler mit Zehlern und Nenner mit Nennern multiplicirt; denn es iſt eben ſo viel, als ob man den Bruch als ein Ganzes anſiehet, das wieder in ſo viel Theile getheilet wird, als des Multiplicators Nenner Einheiten hat; von dieſen Theilen nimmt man ſo viel, als der Zehler Einheiten in ſich begreift; das aber geſchieht, wenn man Nenner mit Nennern und Zehler mit Zehlern multiplicirt; man ſoll $\frac{3}{4}$ mit $\frac{2}{5}$ multipliciren; $\frac{3}{4}$ ſey A $\frac{2}{5}$ ſey B. ſo iſt, weil

$$\frac{3}{4} = A \quad \cdot 4 \qquad\qquad \frac{2}{5} = B \quad \cdot 5$$

$$3 = 4A \qquad\qquad 2 = 5B.$$

$$2 = 5B$$

$$2 \cdot 3 = 4 \cdot 5 \cdot A \cdot B \quad : 4 \cdot 5$$

$$\frac{2 \cdot 3}{4 \cdot 5} = \frac{6}{20} = A \cdot B.$$

das geſuchte Product;

ſetzt man nun ſtatt der Zahlen lauter Buchſtaben, ſo kann man den Satz in der höchſten Allgemeinheit erweiſen.

§. 66. Zuſatz. Das Product von zween eigentlichen Brüchen iſt alſo kleiner als ein jeder Factor; dann man nimmt die gegebene Gröſſe nicht ein ganzes mal, ſondern etwa ein halb, ein drittel mal u. ſ. w.

u. ſ. w. wie z. E. die Helfte einer halben Ehlen noch einmal kleiner iſt, als die halbe Ehle; ſo iſt $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$.

§. 67. Zuſatz. Wenn man eine ganze Zahl durch einen Bruch, oder einen Bruch durch eine ganze Zahl multiplicirt, ſo wird nur der Zehler des Bruchs mit der ganzen Zahl multiplicirt; dann man kann die ganze Zahl als einen Bruch anſehen, deſſen Nenner $= 1$; z. E. $6 \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{3}{4} = \frac{18}{4} = 4\frac{2}{4} = 4\frac{1}{2}$.

§. 68. Zuſatz. Das Product aus einer ganzen Zahl in einem eigentlichen Bruch wird alſo auch kleiner als die ganze Zahl; weil ſie nicht einmal ganz vielweniger mehrmalen genommen wird.

§. 69. Zuſatz. Das Product von zween Brüchen ſteckt in dem einen Factor ſo oft, als der andere Factor in der Einheit ſteckt. z. E. $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{8}$; folglich $\frac{3}{8} : \frac{3}{4} = \frac{1}{2} : 1$ oder unter einerley Benennung $\frac{12}{32} : \frac{24}{32} = \frac{1}{2} : 1$.

§. 70. Lehrſatz. Brüche werden durch Brüche dividirt, wenn man den dividirenden Bruch umkehrt, das iſt, den Nenner zum Zehler, und den Zehler zum Nenner macht, und hernach multiplicirt; dann wenn ſie einerley Nenner haben, ſo fragt man nur, wie oft der Zehler des Diviſors im Zehler des Dividendus ſtecke? z. E. $\frac{3}{8}$ iſt in $\frac{7}{8}$ enthalten $\frac{7}{3}$ mal; oder $\frac{1}{4}$ in $\frac{3}{4}$ dreymal; haben ſie aber verſchiedene Nenner, ſo muß man ſie unter einerley Benennung bringen, und hernach anzeigen, wie oft der Zehler des Diviſors im Zehler des Dividendus enthalten ſey; dieſe Arbeit aber wird erhalten, wenn man den Diviſor umkehrt, und hernach multiplicirt; daher

her kein ſo weitläuftiges Geſchäfte nöthig iſt. z. E. $\frac{3}{4} : \frac{1}{2} = \frac{6}{8} : \frac{4}{8} = \frac{6}{4}$; aber eben das kommt heraus, wenn ich $\frac{3}{4}$ durch den umgekehrten Diviſor $\frac{1}{2}$ multiplicire, dann $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{1} = \frac{6}{4}$. Der Beweis wird allgemein, wenn man ſtatt Zahlen Buchſtaben ſetzt. Folglich darf man nur den Diviſor umkehren, und hernach multipliciren.

§. 71. Zuſatz. Eine ganze Zahl wird durch einen Bruch dividirt, wenn man den Bruch umkehrt, und hernach multiplicirt; das iſt, wenn man die ganze Zahl in den Nenner des Bruchs multiplicirt, und mit ſeinem Zehler das Product dividirt; dann man kann die ganze Zahl als einen Bruch anſehen, deſſen Nenner eins iſt. z. E. $6 : \frac{3}{4} = \frac{6}{1} \cdot \frac{4}{3} = \frac{24}{3}$.

§. 72. Zuſatz. Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividirt, wenn man die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs multiplicirt; aus obigem Grund §. 71. z. E. $\frac{4}{5} : 6 = \frac{4}{5} : \frac{6}{1} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{4}{30}$.

§. 73. Zuſatz. Wenn man einen eigentlichen Bruch durch Brüche, oder auch eine ganze Zahl durch einen Bruch dividirt, ſo wird der Quotient gröſſer werden, als der Dividendus; weil ein Bruch in einem andern, und noch vielmehr in einer ganzen Zahl etlich ganze mal enthalten ſeyn kann und iſt.

§. 74. Zuſatz. Hingegen wenn ein eigentlicher Bruch durch eine ganze Zahl dividirt wird, ſo wird der Quotient kleiner; welches ebenfalls geſchiehet, wenn uneigentliche Brüche einander dividiren.

§. 75. Zuſatz. Der Dividendus enthält den Diviſor ſo oft in ſich, als der Quotient die Einheit.

$\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$

$\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3}$; folglich $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{8}{3} : 1$, oder unter einerley Benennung $\frac{4}{12} : \frac{3}{12} = \frac{8}{3} : \frac{3}{3}$.

§. 76. Zuſatz. Wenn man den Quotienten mit dem Diviſor multiplicirt, ſo kommt der Dividendus heraus; und wenn man das Product durch einen Factor dividirt, ſo kommt der andere Factor heraus.

§. 77. Zuſatz. Hat man Brüche, die an ganzen Zahlen hangen, und ſolle damit rechnen, ſo iſt es am beſten, wenn man alles unter einerley Benennung bringt, und ſodann das verlangte berechnet. z. E. $3 + \frac{2}{5} : 5 - \frac{1}{2} = \frac{15+2}{5} : \frac{10-1}{2} = \frac{17}{5} \cdot \frac{2}{9} = \frac{34}{45}$. In der practiſchen Arithmetik werden ſich einige andere Vortheile noch ſagen laſſen.

§. 78. Zuſatz. Wenn man den Zehler eines Bruchs mit einem Bruch multiplicirt, ſo werden Zehler mit Zehlern, und Nenner mit Nennern multiplicirt; dann $\frac{2 \cdot \frac{5}{7}}{3} = \frac{2 \cdot 5 : 7}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}$. nach §. 72. Hingegen wenn man den Nenner eines Bruchs mit einem Bruch multiplicirt, ſo wird der multiplicirende Bruch umgekehrt. $\frac{2}{3 \cdot \frac{5}{7}} = \frac{2}{3 \cdot 5 \cdot \frac{1}{7}} = \frac{2}{3 \cdot 5 : 7} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$.

§. 79. Zuſatz. Dividirt man den Zehler eines Bruchs mit einem Bruch, ſo iſt es eben ſo viel, als ob man den ganzen Bruch damit dividirte; $\frac{2 : \frac{5}{7}}{3} = \frac{2 \cdot \frac{7}{5}}{3} = \frac{2 \cdot 7 : 5}{3} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5}$; dividirt man aber den Nenner mit einem Bruch, ſo iſt es eben ſo viel, als ob man den ganzen Bruch damit multiplicirte; $\frac{2}{3 : \frac{5}{7}} = \frac{2}{3 \frac{7}{5}} = \frac{2}{3 \cdot 7 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 7}$. nach §. 67. 72. Man

heißt

heißt dergleichen Brüche ſonſten auch fractiones fractioſas, ehe ſie noch aufgelößt werden.

Von Decimal- und Sexageſimal-Brüchen.

§. 80. **Erklärungen.** Ein Decimal- oder zehentheiliger Bruch iſt ein Bruch, deſſen Nenner nach dem Geſetz der decadiſchen Arithmetik fortgehen, und alſo 10, 100, 1000, 10000 u. ſ. w. ſind. z. E. $\frac{3}{10}$, $\frac{4}{100}$, $\frac{6}{1000}$ ſind Decimalbrüche; welche zuſammen geſetzt $\frac{346}{1000}$ heiſſen; man läßt aber, um alle Weitläuftigkeit zu vermeiden, die Nenner im Schreiben weg, weil man ſie jedesmal leicht hinzudenken kann; der Nenner iſt nemlich allemal die Einheit mit ſo viel angehängten Nullen, als der Zehler Zahlzeichen hat. Die ganze Zahlen vor den Decimalbrüchen werden mit einem, oder . von den Brüchen abgeſondert, und heiſſen in der logarithmiſchen Rechnung die Characteriſtik. z. E. 3,4682 iſt 3, $\frac{4682}{10000}$, 3 Ganze, 4 Zehentheile, 6 Hunderttheile u. ſ. w. Wenn kein Ganzes vorhanden iſt, ſo kommt eine Nulle in die Stelle, z. E. 0,347 = 0, $\frac{347}{1000}$, kein Ganzes, aber 3 Zehentheile, 4 Hunderttheile u. ſ. w.

§. 81. **Lehrſatz.** Ein jeder Bruch kann in Decimalbrüche verwandelt werden, wenn man dem Zehler ſo viel Nullen anhängt, auf wie viel Ziffer man die zehentheilige Brüche fortſetzen will, wofern ſich nemlich die Rechnung nicht ſelbſt endiget, und hernach durch den Nenner gewöhnlicher maſſen dividirt. Der Beweis gründet ſich auf §. 56. Der

Bruch

Bruch bleibt einerley, wenn oben und unten mit gleichem multiplicirt wird; es geſchieht aber dieſes, wenn man Nullen anhängt und dividirt; dann $\frac{1}{2} = \frac{1,0}{2} = 0,5 = 0,\frac{5}{10}$ weil $\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{5} = \frac{5}{10}$ und alſo ein Decimalbruch; $\frac{1}{4} = \frac{1,00}{4} = 0,25 = 0,\frac{25}{100} = \frac{1}{4} \cdot \frac{25}{25}$.

§. 82. Zuſatz. Wenn der Bruch durch die Diviſion nicht genau ſich ausdrücken läßt, ſo ſucht man ſeinem wahren Wehrt ſo nah zu kommen, daß der Fehler kaum ein Milliontheilchen betrift; z. E. $\frac{1}{3} = \frac{1,00000}{3} = 0,33333\ldots = 0,\frac{33333}{100000}$; der Fehler iſt hier kaum ein Milliontheilchen eines Ganzen.

§. 83. Lehrſatz. Man kann alle vier Rechnungsarten bey den Decimalbrüchen anbringen; der Beweis gründet ſich auf die Lehre von den Potenzen, deren Exponente negativ ſind; wir wollen ihn im zweyten Hauptſtück vortragen, und inzwiſchen als einen Lehnſatz annehmen. Die Exempel werden die Rechnung doch deutlich machen.

§. 84. Exempel der vier Rechnungsarten in Decimalbrüchen.

Addition.

$$\frac{3}{7} = 0,42857$$
$$\frac{4}{7}.\ 0,57142$$
$$\frac{7}{7} = 1 = 0,99999$$

Man addirt von der Rechten zur Linken wie in der gewöhnlichen Addition mit ganzen Zahlen; weil aber die beede Brüche ſelbſt nicht genau in Decimalbrüchen gegeben ſind, ſo iſt auch in der Summe ein Fehler von einem Hunderttauſendtheilchen, den man für nichts achten darf; eigentlich ſollten 1,00000 herauskommen; weil $\frac{7}{7} = 1 = \frac{3}{7} + \frac{4}{7}$.

Subtraction.

$\frac{5}{4} = 1,25$

$\frac{1}{2} = 0,5$

$\frac{5}{4} - \frac{1}{2} = 0,75 = \frac{3}{4}$

Bey der Subtraction befolgt man wieder die gewöhnliche Regeln; nur merkt man, daß, wenn bey einer Zahl kein Ziffer ſteht, wie bey 5, man in Gedanken eine 0 ſetzt, dann $\frac{1}{2} = 0,5$ oder 0,50, weil $\frac{50}{100} = \frac{5}{10}$, folglich ſagt man 0 von 5 läßt 5, 5 von 12 läßt 7, 0 von 0 läßt 0.

Multiplication.

$\frac{5}{4} = 1,25$

$\frac{8}{5} = 1,6$

1,25

0,750

$\frac{40}{20} = 2,000$

In dem Exempel der Multiplication hat man mit der erſten Zahl zur Linken angefangen zu multipliciren, es iſt aber gleichviel, wenn man von der hinterſten Zahl anfängt; da die Partialproducte hernach gegen die linke Seite vorrücken, wie vorher gegen die rechte. Z. E.

1,25

1,6

0,750

1,25

2,000

Die erſte Manier aber iſt gewöhnlicher; wenn einer oder beede Factores ohne Ende fortgiengen, und alſo nicht ganz wären, wo man ſie abbricht: ſo geben ſie auch kein genaues Product.

Diviſion.

1,6.00 | 2,56

(0,625)

1,250

0,35.0.0

(0,625)

3125

3750

(0,625)

3750

0

Die Diviſion befolgt einerley Regeln mit der gewöhnlichen Art unter ſich zu dividiren; nur muß man merken, daß man, ſo lang die Diviſion fortgeſetzt wird, jedesmal eine Nulle dem Reſt des Dividendus anhängen muß, weil durch die angehängte Nullen die Decimalprogreſſion von ſelbſt ſich beſtimmt: geht es ohne Ende fort, ſo hört man auf, wo man glaubt, daß der Fehler klein genug und kaum merklich ſey.

§. 85. **Erklär.** Sechzigtheilige Brüche ſind ſolche Brüche, deren Nenner in der Progreſſion 60, 60.60, 60.60.60 u. ſ. w. fortgehen. Wenn alſo ein

ein Ganzes, wie z. E. die Stunden, in ſechzig Theile, (Minuten) der ſechzigſte Theil wieder in ſechzig kleinere Theile, (Secunden) u. ſ. w. eingetheilt werden, ſo bekommt man ſechzigtheilige Brüche, (fractiones ſexageſimales) man ſchreibt ſie wie in der Geometrie die Minuten, Secunden, Terzen, z. E. 4 St. $50' 20'' 30'''$. Das iſt 4 St. $+ \frac{50}{60} + \frac{20}{60.60} + \frac{30}{60.60.60}$ einer Stunde; welche als die Einheit betrachtet wird; und weil 60 allemal auf die Einheit gehen, ſo kann man den obigen Ausdruck 4 St. u. ſ. w. auch ſchreiben $4 . 60 + 50 + \frac{20}{60} + \frac{30}{60.60}$ u. ſ. w.

§. 86. Zuſatz. Man kann alſo auch hier alle vier Rechnungsarten anwenden, nur muß man bey dem Entlehnen oder Behalten merken, daß man von der nächſten höhern Stelle die entlehnte nach der Sexageſimalprogreſſion nehme, weil eine Einheit der höhern Ordnuug nicht 10 ſondern 60 von der unmittelbar niedern enthält.

§. 87. Anmerk. Die Exempel werden die Sache deutlich machen.

Addition.	Subtraction.
6 St. $04' 32'' 08'''$	12 St. $18' 52'' 07'''$
20 $12' 50'' 16'''$	3 St. $20' 04'' 12'''$
26 St. $17' 22'' 24'''$	9 St. $58' 47'' 55'''$

Dann 16 und 8 Terzen geben 24 Terzen; $50''$ und $32''$ geben $82''$ das iſt $1'$ und $22''$ die $1'$ behalte ich für die höhere Stelle; $12'$ und $4'$ nebſt $1'$ die ich behalten, geben $17'$; 6 und 20 St. geben 26. Eben ſo macht man es bey der Subtraction; $12'''$ von $7'''$ kann man nicht ſubtrahiren, man entlehnt alſo eine Secunde, die $60'''$ gibt, $12'''$ von $67'''$ läßt 55; oder 2 von 7 läßt 5, 1 von 6 (weil die 0 durch das Entlehnen 6 wird) läßt 5; u. ſ. w. die leere Plätze zur Linken füllt man mit einer Nulle aus, damit man nicht ſo leicht fehle; dann $7''' = 07'''$; und weil man nie über 60 zehlt, ſo braucht man nur eine einige Stelle auszufüllen, welches geſchiebet, ſo oft die Anzahl unter 10 iſt.

Bey der Multiplication merkt man nur auf die obige Ausdrücke §. 85. z. E. man ſolle 17 St. mit 46‴ multipliciren, ſo iſt das im Zeichen ausgedruckte Product $= 17 . 60 . \frac{46}{60.60.60} = \frac{17.46}{60.60} = \frac{782}{60.60} = 782'' = 13' 2''$. Um die letzte Diviſion durch 60 zu erſparen, hat man einen Canon Hexacontad. ſchon gemacht, worinnen man alle Producte von 1 bis 60 nachſchlagen kann, ſo iſt 17 . 46 in dem Canon 13 02 ausgedruckt. Die Diviſion hat auch keine Schwürigkeit, wenn man nur die Lehre von den Brüchen verſtehet, wie wir ſie vorgetragen haben. Dann z. E. $33' : 16'' = \frac{33}{60} : \frac{16}{60.60} = \frac{33}{60} . \frac{60.60}{16} = \frac{33.60}{16} = 123 + \frac{12}{16}$ $= 120 + 3 + \frac{12}{16} = 2.60 + 3 + \frac{12.60}{16.60} = 2.60 + 3 + \frac{45}{60}$. wenn man beederſeits mit 16 dividirt.

§. 88. Anmerk. Wie man dieſe Rechnung durch die Potenzen und durch die Vergleichung mit ihren theils poſitiven theils negativen Exponenten erweiſen könne, wird im zweyten Hauptſtück vorkommen.

§. 89. Anmerk. Der Nutzen der Sexageſimalbrüche zeigt ſich vornemlich in aſtronomiſchen und chronologiſchen Rechnungen.

Von den Potenzen.

§. 90. Erklärungen. Wenn man eine Zahl mit ſich ſelbſt etlichmal multiplicirt, ſo iſt das Product ihre Potenz, und zwar die zweyte, oder das Quadrat, wenn man ſie zweymal, die dritte oder der Cubus, wenn man ſie dreymal, die vierte, die fünfte, die ſechste Potenz u. ſ. w. wenn man ſie vier, fünf, ſechsmal mit ſich ſelbſt multiplicirt. Die Zahl, welche anzeigt, wie oft der Factor mit ſich ſelbſt multiplicirt worden, heißt der Exponent, und der einfache Factor die Wurzel. Wenn die Wurzel nicht genau ſich ergibt, ſo heißt ſie irrational. z. E. $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{10}$.

§. 91. Willkührl. Satz. Den Exponenten ſchreibt man mit einer kleinen Ziffer, welche oben

an

an die groſſe Ziffer angehängt wird; z. E. $4^3 = 64$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$. Die Wurzelzeichen haben wir ſchon erklärt; wenn man die Quadratwurzel verlangt, ſo wird kein Ziffer in das Wurzelzeichen geſetzt, verlangt man aber höhere Wurzeln, ſo muß allemal innerhalb dem Wurzelzeichen eine kleine Ziffer ſtehen, welche anzeigt, die wievielte Wurzel man wolle. z. E. $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{27} = 3$ $\sqrt[4]{625} = 5$, $\sqrt[6]{1000000} = 10$.

§. 92. Zuſatz. Das Quadrat eines Bruchs iſt alſo das Quadrat des Zehlers dividirt durch das Quadrat des Nenners, und der Cubus eines Bruchs der Cubus des Zehlers dividirt durch den Cubus des Nenners, oder überhaupt die höhere Potenz eines Bruchs die Potenz des Zehlers durch eben die Potenz des Nenners dividirt; weil die Potenz eines Bruchs der Bruch mit ſich ſelbſt etlichmal multiplicirt iſt. $(\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$, $(\frac{4}{5})^2 = \frac{16}{25}$; eben ſo muß man auch, wenn man Wurzeln verlangt, aus dem Zehler und Nenner die nemliche Wurzel ausziehen. $\sqrt{(\frac{16}{25})} = \frac{4}{5}$, $\sqrt[3]{(\frac{8}{27})} = \frac{2}{3}$.

§. 93. Lehrſatz. Eine jede Wurzel kann man anſehen, als beſtünde ſie aus zween Theilen, (radix binomia) dann eine Zahl mag groß oder klein ſeyn, ſo läßt ſie ſich in zween Theile zerfällen; z. E. $320 = 300 + 20$; $5 = 4 + 1$; $1 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}$ u. ſ. w.

§. 94. Zuſatz. Wenn man alſo das erſte Glied der Wurzel a und das andere b nennet, ſo kann der Ausdruck $a + b$ alle mögliche Wurzeln,

$(a+b)^2$ alle mögliche Quadrate, $(a+b)^3$ alle mögliche Cubos u. ſ. w. bedeuten.

§. 95. Zuſatz. Der allgemeine Ausdruck des erſten Glieds kann dahero in Zahlen viel einzele Stellen anzeigen; z. E. $3428 = 3000 + 400 + 20 + 8$, da dann $a = (3000 + 400 + 20)$ und $b = 8$, oder $(a+b)^2 = ((3000+400+20) + 8))^2$.

§. 96. Lehnſatz. Das Quadrat von $a+b$, wenn man es wirklich ausdruckt, iſt $a^2 + 2ab + b^2$; wie im zweyten Hauptſtück erwieſen werden ſoll; folglich beſtehen alle mögliche Quadrate aus dem Quadrat des erſten Glieds, aus dem doppelten Product der Glieder, und aus dem Quadrat des zweyten Gliedes.

§. 97. Zuſatz. Man kann alſo das zweyte Glied jedesmal finden, wenn man, nach abgezogenem Quadrat des erſten Glieds, den Reſt durch die doppelte Wurzel des abgezogenen Quadrats dividirt, da man dann das Product dieſes Diviſors in das zweyte gefundene Glied nebſt dem Quadrat dieſes Gliedes nochmalen ſubtrahirt, und hernach wiederum die zwey gefundene Glieder als eines, nemlich als das erſte anſiehet, durch deſſen Duplirung man das neue Glied auf eine ähnliche Weiſe ſuchet.

§. 98. Lehnſatz. Ein jeder Cubus von $a+b$ oder $(a+b)^3$ wirklich ausgedruckt, heißt $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; daher beſteht er aus dem Cubus des erſten Glieds, aus dem dreyfachen Product des Quadrats des erſten Glieds in das zweyte, aus dem dreyfachen Product des erſten Glieds in das Quadrat des zweyten, und aus dem Cubus des zweyten Glieds.

§. 99.

§. 99. Zuſatz. Man kann alſo das zweyte Glied finden, wenn man nach Abzug des Cubus vom erſten Glied den Reſt mit dem dreyfachen Quadrat des erſten Glieds dividirt, hernach die drey Partialproducte abziehet, und was abermal übrig bleibt, auf eine ähnliche Weiſe behandelt, wenn man nur merkt, daß man die zwey gefundene Glieder als eines anſehen, und dahero mit ihrem dreyfachen Quadrat wieder dividiren muß u. ſ. w.

§. 100. Anmerk. In der Zahlenrechnung verlangt man nur Quadrat- und Cubicwurzeln; höhere Potenzen kommen ſelten vor; man hat zu dem Ende für die Zahlen das Wurzeltäfelein nur bis auf die Cubiczahlen berechnet: wir wollen die Biquadrate noch hinzuthun: ſie gehen in vierfacher Ordnung bis auf 9, oder 10 wie folgende Tabell zeigt:

Wurzeln	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Cubi	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000
Biquadrate	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561	10000

Aus dieſem Täfelein erhellt, daß von eins bis 9 kein Quadrat mehr als zwey, und kein Cubus mehr als drey, und kein Biquadrat mehr als vier Zahlzeichen, wohl aber weniger enthalte.

Von Ausziehung der Quadratwurzel in Zahlen.

§. 101. Lehrſatz. Weil kein Quadrat von eins bis neun mehr als zwey Zahlzeichen hat, ſo theilt man die gegebene Zahl in Claſſen von der Rechten zur Linken ein, da dann die äuſſerſte zur Linken auch nur ein Zahlzeichen haben kann, weil es auch ſolche Quadrate gibt; §. 100. Von der äuſſerſten Claſſe zur Linken wird das nächſt kleinere Quadrat,

das man im Wurzeltäfelein ſucht, abgezogen, und die im Wurzeltäfelein darüber ſtehende Wurzel in die Stelle des Quotienten geſetzt; dieſe Wurzel oder dieſen Quotienten duplirt man, und dividirt damit den Reſt; der Quotient iſt das zweyte Glied; §. 97. das Product des zweyten Glieds oder des neuen Quotienten in den Diviſorem, und das Quadrat des zweyten Glieds zieht man von dem dividirten Reſt ab, und was übrig bleibt, dividirt man abermal mit dem doppelten Quotienten, deſſen zwey Glieder nur für eines angeſehen werden. §. 97. u. ſ. w. bis entweder die Wurzel genau ſich ergibt, oder bis man, wenn ſie nicht genau kann gefunden werden, durch anhängen je zwoer Nullen, die Diviſion in Decimalbrüchen ſo lang fortgeſetzt hat, als man für nöthig findet, um etwa den Fehler auf Millionentheilgen herabzuſetzen, daß er kaum merklich iſt.

§. 102. Zuſatz Wenn man das zweyte Glied zum Diviſor in die nächſtfolgende Stelle ſetzt, und hernach dieſe vermehrte Zahl mit dem zweyten Glied multiplicirt, ſo kommt das doppelte Product der Glieder und das Quadrat des zweyten Glieds heraus; dann 4 ſey das erſte Glied doppelt, alſo der Diviſor, und 3 das zweyte Glied, ſo iſt $(40+3) \cdot 3 = 43 \cdot 3 = 40 \cdot 3 + 3 \cdot 3. = 2 . 20 . 3 + 3 \cdot 3 = 2ab + bb$. Dahero man jedesmal nur den neuen Quotienten der unmittelbar niedrigern Stelle an den Diviſor hinſetzen darf, um die Rechnung abzukürzen.

§. 103. Zuſatz. Bey den angehängten Nullen iſt es nicht nöthig, im Quotienten die Nenner, welche in der Decimalprogreſſion fortgehen, wirklich

zu ſchreiben, wenn man nur durch ein Strichlein nach den ganzen Zahlen anzeigt, daß jetzo die Decimalbrüche anfahen; daß aber durch die angehängte Nullen die Zahl nicht vermehrt werde, erhellt daher, weil man ſie eigentlich mit einem Bruch, deſſen Nenner dem Zehler gleich iſt, nemlich $\frac{100}{100} = 1$ multiplicirt, welches die Zahl nicht vermehrt; ſondern nur behülflich iſt, den Reſt der Wurzel genauer zu finden.

§. 104. Anmerk. Die Sache läßt ſich durch Exempel am beſten erläutern. Man ſolle aus 1703025 die Quadratwurzel ausziehen; man theilt die Zahl in Claſſen von der Rechten zur Linken, und giebt jeder Claſſe zwey Zahlzeichen §. 100. auf der äuſſerſten zur Linken darf eins ſtehen. Von dieſer äuſſerſten Claſſe wird das gleiche oder nächſt kleinere Quadrat abgezogen: hier iſt es das gleiche nemlich 1 und die Wurzel iſt auch 1; der Reſt 70 wird herabgeſetzt, und mit der doppelten Wurzel dividirt; die doppelte Wurzel iſt 2, die man unter die 7 ſetzt, weil ſie eigentlich 20, oder wegen den folgenden Stellen 2000 iſt; mit 2 dividirt man, und ſetzt in den Quotienten 3; dieſe 3 ſetzt man neben die 2 nach §. 102. und multiplicirt dieſe Zahl 23 mit dem neuen Quotienten 3; das Product 69 ſubtrahirt man von 70; und zum Reſt 1 ſetzt man die folgende

1 | 70 | 30 | 25 ∫ 1305
1
| 70
(23)
69
1 | 30
(2 60)
000
1 30 | 25
(2 6 05)
1 30 25
0

Claſſe 30 herab; den Quotienten 13 ſieht man nun als [illegible] erſte Glied an, und duplirt es, damit man 2 . 13 = 26 zum Diviſor bekomme; man unterſchreibt ihn ſo, daß ſeine letzte Zahl 6 unter die erſte Zahl 3 der folgenden Claſſe zu ſtehen kommt; weil er eigentlich 260 iſt: der Quotient iſt = 0, denn 26 in 13 iſt 0 mal enthalten; dieſen Quotienten = 0, ſetzt man neben die 6, und multiplicirt alles mit dem neuen Quotienten = 0, ſo kommt 0 heraus; das ſubtrahirt von dem obigen, läßt die Zahl 130 ganz; man ſetzt die folgende Claſſe 25 dazu herab; ſieht 130 als das erſte Glied an, duplirt es, und bekommt den Diviſor 260, deſſen letzte Zahl, die Nulle unter die erſte der folgenden Claſſe, nemlich unter 2 geſchrieben wird, aus ſchon gemeldten Gründen; man di-

vidirt wirklich, ſetzt den Quotienten 5 herab; multiplicirt alles damit; das Product ſubtrahirt man; und der Reſt iſt nichts.

§. 104. Anmerk. Will man die Quadratwurzel aus einer Zahl die kein vollkommenes Quadrat iſt, ausziehen, ſo geſchiehet ſolches durch Näherung (per approximationem) indeme man der gegebenen Zahl ſo vielmal je zwo und zwo Nullen anhängt, als man glaubt, daß zur Näherung genug ſeye, nach §. 100. 103. Die Sache wird durch ein Exempel deutlich werden. Man ſolle die Quadratwurzel aus 3 ausziehen, ſo ſetzt man 3, und ſucht das nächſt kleinere Quadrat 1, das man von 3 abziehet, und deſſen Wurzel 1 man in die Stelle des Quotienten ſetzt; den Reſt vermehrt man mit 2 Nullen oder 00, das iſt, man multiplicirt den Reſt 2 mit $\frac{100}{100}$, da dann $\frac{200}{100}$ = 2 die vorige Zahl iſt; aus dem Nenner 100 zieht man in Gedanken die Quadratwurzel aus, = 10; welches der Nenner in dem Quotienten iſt, den man aber nicht ſchreibt, weil man die Nenner in Decimalfractionen hinzuzudenken gewohnt iſt; nur wird der Anfang der Brüche durch ein, von der vorhergehenden Zahl abgeſondert; den gefundenen Quotienten duplirt man, damit man den Diviſor 2 bekomme; man ſchreibt ihn wie §. 103, nemlich unter die erſte Zahl der folgenden Claſſe, und ſagt 2 in 20 iſt 7 mal enthalten; zwiſchen dieſem Quotient 7 und dem 1

```
3 | 1,73205.... = √3
1 |
-----
2 |,00
 (27)
1 89
-----
 1 1,0,0
 (3 4 3)
 1 0 2 9
-----
   7.1.|0.0
  (3 4 |6 2)
   6 9 2 4
-----
    1 7 6|0 0
   (3 4 6|4 0)
    0 0 0 0 0
-----
    1 7 6.0.0.|0.0
     (3 4 6 4|0 5)
    1 7 3 2 0 2 5
-----
        2 7 9 7 5
```

wird ein, geſetzt, weil mit 7 die Decimalbrüche anfahen, und es eigentlich heißt $\frac{7}{10}$; den Zehler 7 ſetzt man neben die 2, multiplicirt alles mit 7, und zieht das Product von 200 ab; den Reſt dividirt man abermal mit dem duplirten ganzen Quotienten 1,7 oder $\frac{17}{10}$; der nun als das erſte Glied angeſehen wird, und fährt wie §. 104. fort, bis man den Fehler unerheblich macht; da dann $\sqrt{3}$ = 1,73205 oder = 1,$\frac{73205}{100000}$ wenn man den Nenner wirklich ſetzt, bey nahe ſeyn wird.

§. 106.

§. 106. Anmerk. Wenn man die gefundene Wurzel mit ſich ſelbſt multiplicirt, und was übrig geblieben, zum Product addirt, ſo muß die gegebene Zahl wieder herauskommen. Dieſe Operation nennt man die Probe der Quadratrechnung.

Von Ausziehung der Cubicwurzel in Zahlen.

§. 107. Lehrſatz. Aus der Wurzeltafel iſt klar, daß keine Cubiczahl von 7 bis 9 über drey Zahlzeichen enthält, wohl aber weniger; folglich muß man eine gegebene Zahl, woraus man die Cubicwurzel ausziehen ſolle, in ſolche Claſſen von der Rechten zur Linken eintheilen, deren jede drey Zahlzeichen bekommt, die äuſſerſte zur Linken aber auch zwey oder eins haben kann. §. 100. Von der äuſſerſten Claſſe zur Linken zieht man den entweder gleichen oder nächſt kleineren Cubus ab, und ſetzt ſeine Wurzel in die Stelle des Quotienten; dieſes Quotienten Quadrat triplirt man, und dividirt hernach den Reſt der Zahl dergeſtalt damit, daß man das letzte Zahlzeichen des Diviſors unter das erſte Zahlzeichen der folgenden Claſſe ſchreibe, in welchem Fall man das zweyte Glied der Wurzel bekommen wird. Dieſen neuen Quotienten multiplicirt man in den Diviſor, und ſchreibt die letzte Zahlzeichen des Products unter das erſte Zahlzeichen der folgenden Claſſe; hernach multiplicirt man das Quadrat des neuen Quotienten mit dem vorhergehenden Glied des Quotienten, triplirt das Product, und ſchreibt ſein letztes Zahlzeichen unter das zweyte Zahlzeichen der ſchon genannten Claſſe, und ſodann weiter gegen die Rechte; endlich cubirt man den neuen Quotienten,

ten, und ſchreibt ſein letztes Zahlzeichen unter das letzte Zahlzeichen der gegebenen Claſſe; die Partialproducte addirt man zuſammen, und ſubtrahirt ſie von der obenſtehenden Zahl, die man dividirt hat. Den Reſt dividirt man von neuem, und ſieht den ganzen Quotienten nunmehro als das erſte Glied an, das man quadrirt und triplirt, welches Product den neuen Diviſor gibt, u. ſ. w. bis entweder alles aufgeht, oder bis man, wenn in der letzten Claſſe noch was übrig bleibt, durch je drey und drey angehängte Nullen, weil nemlich hier drey Zahlzeichen in die Claſſe gehören, dem wahren Wehrt der Wurzel in Decimalbrüchen ſich ſo nähert, daß der Fehler endlich unmerklich wird. Der Beweis erhellet aus §. 97 — 99.

§. 108. Anmerk. Wir wollen die Sache durch einige Exempel erläutern. Man verlangt die Cubicwurzel aus 47437928, welche man genau geben kann, ohne daß man nöthig hätte, Nullen anzuhängen; man ſetze alſo die Zahl hin, und theile ſie von der Rechten zur Linken in ihre Claſſen ein nach §. 107. von der äuſſerſten Claſſe zur Linken ziehe man den nächſt kleinern Cubus 27 ab, und ſetze ſeine Cubicwurzel 3 in die Stelle des Quotienten. Man quadrire den Quotienten 3, ſo hat man 9, dieſe Quadrat triplire man, ſo hat man 27, den neuen Diviſor, deſſen letztes Zahlzeichen man unter das erſte der herabgeſetzten folgenden Claſſe ſetzt; man ſchließt ihn in ( ) ein, damit man bey Ad-

	47 | 437 | 928	362
	27	
	20 | 437	
Diviſor $3a^2 =$	(27)	
Partialproducte $3a^2b =$	162	
$3ab^2 =$	324	
$b^3 =$	216	
ihre Summe	19656	
Reſt	781 | 928	
Neue Diviſor $3a^2 =$	(3888)	
100a = 36.		
Partialproducte $3a^2b =$	7776	
$3ab^2 =$	432	
$b^3 =$	8	
ihre Summe	781928	
Reſt	0.	

Addirung der Partialproducte alle Verwirrung vermeide; nun dividirt man wirklich; 2 in 20 iſt wegen der folgenden 7 und den vielen abzuziehenden Partialproducten nur 6 mal enthalten, mit dieſem neuen Quotienten multiplicirt man den Diviſor, ſo hat man das erſte Partialproduct, nemlich das dreyfache Product aus dem Quadrat des erſten Theils in den zweyten $= 3a^2b$; man ſetzt es ſo, daß das letzte Zahlzeichen 2 unter den 7 oder 4, das erſte der folgenden Claſſe zu ſtehen kommt; hernach quadrirt man den neuen Quotienten 6, multiplicirt ihn mit dem vorhergehenden Glied 3, und triplirt das Product, ſo hat man $3ab^2 = 324$; das letzte Zahlzeichen wird unter das mittlere der obigen Claſſe, nemlich gerade unter 3 geſchrieben; endlich cubirt man den neuen Quotienten 6; da im Wurzeltäfelein $6.6.6 = 216$, ſo hat man b^3; man ſchreibt ſein letztes Zahlzeichen unter das letzte der gegebenen Claſſe; addirt alle Partialproducte zuſammen; ſubtrahirt die Summe von den obern dividirten Zahlen 20437, und dividirt den Reſt 781 mit der folgenden herabgeſetzten Claſſe, alſo 781928 auf die nemliche Weiſe, wenn man nur merkt, daß nun a oder das erſte Glied der ganze Quotient 36, folglich $a^2 = 36.36$ und $3a^2 = 3.36.36 = 3888$, welchen neuen Diviſor man ſo unterſchreibt, daß ſein letztes Zahlzeichen unter das erſte der herabgeſetzten folgenden Claſſe zu ſtehen kommt; worauf man wie bey der erſten Operation fortfährt.

§. 109. Anmerk. Wenn man die Wurzel nicht genau finden kann, ſo ſucht man ſie durch Näherung, und hängt, ſo vielmal man will, je drey und drey Nullen der gegebenen Zahl an, da man dann wie §. 108. zu werke geht. z. E. die Cubicwurzel aus 67 ſoll gefunden werden; man ſetzt die Zahl hin, und zieht den nächſt kleinern Cubus 64 von ihr ab, die Wurzel dieſes Cubus, 4 kommt in die Stelle des Quotienten. Den Reſt 3 vermehrt man mit drey Nullen, oder eigentlich zu reden, multiplicirt ihn mit $\frac{1000}{1000}$; welches ſchon Decimalbrüche gibt; nemlich die Wurzel des Nenners iſt 10, weil $10.10.10 = 1000$; die Wurzel des Zehlers ſucht man indem das erſte Glied 4 quadrirt und hernach triplirt $3.4.4 = 48$ zum Diviſor wird, den man unterſetzt wie §. 108. 4 in 3 iſt 0 mal enthalten, alſo geben die Partialproducte lauter Nullen; folg-

```
              67 | 4,061
              64 |
              -- | --
               3 | 000
             (4    8)
               0 000
           ---------
           3. 0.00 | 0.0.0
3a2   =      (4 8 0 0) . .
3a2b  =    2 8 8 0 0 . .
3ab2  =        4 3 2 0 .
b3    =            2 1 6
------------------------
Summe =    2 9 2 3 4 1 6
Reſt. =      7 6 5 8 4|000
3a2   =    (4 9 4 5 0|8) .
3a2b  =     4 9 4 5 0 8 .
3ab2  =           1 2 1 8 .
b3    =                 1
--------------------------
Summe =     4 9 4 6 2 9 8 1
Reſt  =   2 7 1 2 1 0 1 9 u. ſ. w.
```

folglich bleibt die obige Zahl im Reſt, daran man abermal drey Nullen hängt; man ſucht den neuen Diviſor, indem man $\frac{40}{10}$ oder 40 für das erſte Glied anſieht, es quadrirt und triplirt, um den Diviſor zu bekommen, den man wie §. 108. unterſetzt; er iſt nemlich 4800; die letzte Null wird unter die erſte Null der neuen Claſſe geſchrieben; hernach dividirt man wirklich; 4 in 30 iſt 6 mal enthalten, (wegen der folgenden 8 und wegen abzuziehenden Partialproducte). Die Partialproducte ſucht man wie §. 108. und fährt fort ſo lang man will.

§. 110. Zuſatz. Weil das Quadrat und Cubus, und überhaupt die Potenz eines wahren Bruchs, er mag eigentlich oder uneigentlich ſeyn, niemal eine ganze Zahl wird, wie im zweyten Hauptſtück von den Irrational- oder ſurdiſchen Gröſſen gezeigt werden ſolle, ſo kann die Wurzel durch Näherung niemalen ganz und vollkommen gefunden werden; dann man müßte ohne Ende fortrechnen.

§. 111. Zuſatz. Wenn man die Cubicwurzel wieder cubirt, das iſt, dreymal mit ſich ſelbſt multiplicirt, und den Reſt zum Product addirt, ſo muß die gegebene Zahl wieder herauskommen; das iſt die Probe der Cubicrechnung.

§. 112. Anmerk. Man könnte noch weitere Wurzeln arithmetiſch ausziehen; gemeiniglich aber läßt man es bey dieſen zwo Gattungen bewenden. Zum Beweis, daß alles auf einerley Manier geſchehe, will ich ein Exempel von der Biquadratrechnung geben; man ſolle aus 4236789 die Biquadratwurzel ausziehen; weil keine Biquadrat von 1 bis 9 aus mehr als 4 Ziffern beſteht, wohl aber auch weniger haben kann nach §. 99. ſo wird die Zahl in ſolche Claſſen getheilt, davon jede vier Ziffer hat, die letzte zur Linken aber auch weniger haben darf; von der äuſſerſten Claſſe zur Linken zieht man das gleiche oder nächſt kleinere Biquadrat ab, und ſetzt die Wurzel in die Stelle des Quotienten. Dieſen Quotienten cubirt man, und nimmt ſein vierfaches, welches der neue Diviſor; den gefundenen Quotienten multiplicirt man mit dem Diviſor, und fängt das Product an zu ſchreiben unter die erſte Ziffer der folgenden Claſſe; man multiplicirt hernach die Quadrate der beeden gefundenen Glieder, nemlich des erſten und neuen Quotienten mit einander, und ſchreibt ihr ſechsfaches Product ſo, daß unter die nächſte Ziffer der herabgeſetzten Claſſe die

letzte Ziffer dieſes ſechsfachen Products geſchrieben wird; hernach cubirt man den neuen Quotienten, multiplicirt ihn mit den vorhergehenden, und nimmt das Quadrat vierfach, das man eine Stelle weiter zur Rechten zu ſchreiben anfängt; in der letzten Stelle zur Rechten der Claſſe fängt man noch das Biquadrat des neuen Quotienten von hinten zu ſchreiben an, addirt die Partialproducte zuſammen, zieht die Summe von der erſten Zahl ab, und dividirt abermal den mit einer neuen Claſſe vermehrten Reſt auf eben dieſe Art, da man wie bey der Quadrat- und Cubicrechnung den ganzen Quotienten, oder das erſte und zweyte Glied für eines annimmt und es $= a$ ſetzt. Der Grund von dieſer Rechnung iſt der allgemeine Ausdruck eines Biquadrats $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Von den Verhältniſſen in Zahlen.

§. 113. Anmerk. Die Lehre von den Verhältniſſen iſt die Seele der ganzen Mathematik; hier kann ſie noch nicht ſo gründlich als im folgenden Hauptſtück, dahin ſie eigentlich gehöret, vorgetragen werden. Wir verweiſen alſo den Leſer um ſo eher dahin, als die practiſche Rechenkunſt, worinnen dieſe Lehre vorzüglich genutzet wird, erſt das dritte Hauptſtück ausmacht, folglich im gegenwärtigen Hauptſtück noch keine ausführliche Erklärung nöthig hat. Inzwiſchen wollen wir nur was weniges in Ruckſicht auf die Zahlen hier vortragen.

§. 114. **Erklär.** Wenn zwo Zahlen ſo mit einander verglichen werden, daß die Quotienten in beeden gleich ſind, ſo ſtehen die vier Zahlen in einer (geometriſchen) Proportion, welche man in der gemeinen Arithmetik eigentlich zu wiſſen nöthig hat. Man ſchreibt ſie durch die Diviſionszeichen, welche die natürlichſte Art ſie auszudrucken iſt; z. E. $3 : 6 = 4 : 8$; 3 in 6 iſt 2 mal enthalten, und 4 in 8 auch zweymal; wenn das zweyte Glied dem dritten gleich iſt, ſo heißt die Proportion continuirlich $3 : 6 = 6 : 12$.

§. 115. Zuſatz. Man kann alſo die Proportion auch durch die Multiplication der Quotienten in das 2 und dritte Glied ſchreiben: z. E. $3 : 2 . 3 = 4 : 2 . 4$; $3 : 2 . 3 = 2 . 3 : 2 . 2 . 3$.

§. 116.

§. 116. Lehrſatz. Aus drey gegebenen Zahlen läßt ſich allemal die vierte Proportionalzahl finden, wenn man das Product des zweyten und dritten Glieds mit dem erſten dividirt; weil nach §. 115. allemal $\frac{2.3.4}{3} = 2.4$, oder wenn a das erſte Glied, m der Exponent, b das dritte; $\frac{mab}{a} = mb$; und wie §. 114. $a : ma = b : mb$.

§. 117. Zuſatz. In der continuirlichen Proportion wird das Quadrat des zweyten Glieds durch das erſte dividirt, das letzte geben.

§. 118. Zuſatz. Durch die Verſetzung kann man ein jedes der vier Glieder zum vierten machen, folglich was man für eines von den vier Gliedern ſuchen will, finden.

§. 119. Lehrſatz Das mittlere Glied in einer continuirlichen Proportion wird gefunden, wenn man aus dem Product der beeden äuſſerſten die Quadratwurzel extrahirt; denn weil $a : ma = ma : m^2a$ ſo iſt das Product der beeden äuſſerſten m^2a^2, folglich ſeine Quadratwurzel ma dem mittlern Glied gleich. Oder in Zahlen $3 : 6 = 6 : 12$ folgl. $\sqrt{3.12} = \sqrt{36} = 6$.

§. 120. Anmerk. Diß iſt das Fundament von der Regel de Tri, und allen übrigen darauf ſich gründenden Regeln der practiſchen Arithmetik, davon wir im dritten Hauptſtück handeln werden, wenn wir vorher in dem nun folgenden Hauptſtück von der Buchſtabenrechnung neben andern wichtigen Lehren auch die Lehre von den Verhältniſſen ausführlich werden vorgetragen haben.

Zwey=

Zweytes Hauptſtück
von der
Buchſtabenrechnung.

§. 121.
Erklärung.

Die Buchſtabenrechnung drückt die Gröſſen durch allgemeine Zeichen aus, und lehret, wie man mit dieſen allgemeinen Zeichen rechnen, das iſt, aus gegebenen Gröſſen andere unbekannte ſuchen ſolle. Man heißt ſie Buchſtabenrechnung, weil die allgemeine Zeichen der Gröſſen die wirkliche Buchſtaben der lateiniſchen beſonders kleinern, auch zuweilen wenn man viel ſchickliche Zeichen braucht, des griechiſchen und deutſchen Alphabeths u. ſ. w. ſind. Wir werden die Lehre davon nach dem Plan des vorigen Hauptſtücks ausführen, und dahero zuerſt von der Geſchichte dieſer Rechnung was ſagen.

Die Geſchichte der Buchſtabenrechnung.

§. 122. Es iſt ein gemeines Vorurtheil, daß man ſich entweder vor der Buchſtabenrechnung fürchtet, weil man ſie für die ganze Algebra hält, oder auch, daß man ſich was darauf einbildet, und

ſchon für einen vollkommenen Algebraiſten ausgibt, wenn man dieſe Rechnung verſteht. Die Geſchichte davon wird das Vorurtheil heben, und den Anfänger beherzt machen, etwas mit einer nur halbjährigen Aufmerkſamkeit zu lernen, wodurch er in den Stand geſetzt wird, manche wegen der darinn angebrachten Buchſtabenrechnung für tiefſſinnig gehaltene Werke unſeres Jahrhunderts nicht nur leſen, ſondern auch ſelbſt ſchreiben zu können, wenn es nöthig wäre, und wenn man an ſolchen Büchern einen Mangel haben ſollte.

§. 123. Unter den Alten wird insgemein der Diophantus zuerſt genannt, welcher in ſeinen Libris arithmeticorum die Anweiſung gegeben, wie man unbeſtimmte und beſtimmte Aufgaben in Zahlen durch eine Art von Gleichungen auflöſen ſolle. Er trug dieſe Lehre in der Arithmetik vor, ſie gehört alſo auch nach den Einſichten der Alten dahin. Und daß Diophantus unter den einſichtsvollen Alten einen entſcheidenden Rang behaupte, wird niemand läugnen. Er lebte in der Mitte des zweyten Jahrhunderts unter den Antoninen, und war einer der größten Mathematiker zu Alexandrien. Seine gegebene Anweiſung heißt noch jetzo die Ars Diophantea. Sie beſtehet aus 13 Büchern, davon aber nur noch ſechs vorhanden ſind, welche Xylander im Jahr 1575 lateiniſch überſetzt zuerſt in öffentlichen Druck gab; die nachfolgende Ausgab des Caſpar Bachet vom Jahr 1621 iſt ungleich beſſer, weil der griechiſche Text nicht nur beygedruckt, ſondern auch richtiger erklärt iſt.

§. 124. Vielleicht würde dieſer Nahme der Diophanteiſchen Kunſt ſo gemein als der Nahme Algebra ſeyn, wenn man nicht, ehe noch die Schriften des Diophantus wieder bekannt wurden, von den Arabern eine Art von Rechenkunſt erhalten hätte, welche mit der oben genannten übereinkommt, und nur durch ihren arabiſchen Nahmen ſich unterſcheidet.

§. 125. Anmerk. Eigentlich iſt die Algebra eine Regel aus der Rechenkunſt, wie z. E. die Regel de Tri, die Regel Quinque, die Regula Falſi, Coeci u. ſ. w. worzu noch die Dignitäten und Potenzen kamen, welche man die Coſſiſche Rechnung nannte, und worauf ſich unſere alte deutſche Rechenmeiſter gut verſtunden, unerachtet ſie zu lernen ungleich ſchwerer war, als die heutige neuere Algebra; Wir wollen nur etwas von den Kunſtwörtern und Zeichen der Coſſiſten ſagen. Die erſte Dignität hieſſe nach der arabiſchen Benennung Zenſus, und wurde geſchrieben Z, weil Zenſus mit einem Z anfängt; die Wurzel daraus druckt man durch ℞ aus. Die dritte Dignität oder der Cubus hieß C, und die Wurzel ℞C. Die vierte Dignität hieß Zenſizenſus, und wurde geſchrieben ZZ; die fünfte Surdeſolidum, und geſchrieben Sz; die ſechste Zenſicubus, ZC; die ſiebende Biſurdeſolidum, Bß. Die achte Zenſizenſizenſus, ZZZ. Die neunte Cubicubus, CC; die zehente Zenſiſurdeſolidum, Zß, u. ſ. w. welche Nahmen und Ausdrücke ungleich ſchwerer zu behalten ſind, als die heutzutag übliche; doch muß man ſie wiſſen, wenn man die Schriften der coſſiſchen oder überhaupt algebraiſchen Bücher leſen und verſtehen will, die vor dem Vieta und Carteſius herausgekommen ſind. Die erſte algebraiſche Schriftſteller dieſer Art, wie ſie von den Arabern gebildet wurden, waren Lucas Paciolus, oder nach dem Ordensnahmen Lucas de Burgo ſancti ſepulcri, ein Italiäner, der im Jahr 1494 Summam Arithmeticæ & Geometricæ Proportionumque & proportionalitatum herausgegeben, und im 8 Buch die Algebra nach der Lehrart der Araber doch nur kurz vorgetragen hat. Unter den deutſchen Rechenmeiſtern folgten Adam Rieſe, und Michael Stiefel, welcher letzterer in ſeiner Arithmetica integra und deren dritten Buch, die Algebra als ein Stück der Arithmetik abgehandelt hat. Sie ſind aber in ihren Auflöſungen nicht weiter als auf die quadratiſche Gleichungen gekommen; bis endlich Scipio Ferreus und Cardanus, in Arte Magna, quam vulgo Coſſam vocant, 1545 Regeln für cubiſche Gleichungen gefunden haben u. ſ. w. ehe noch die neuere Algebra aufkame.

§. 126. Endlich bekam die Algebra eine neue Geſtalt, welche nach und nach immer verſchönert wurde, als **Franz Vieta**, einer der größten Mathematiker der franzöſiſchen Nation, von Fontenai in Poitou gebürtig, geweſener Requetenmeiſter bey der Königin Margaretha, im Jahr 1590 die eigentliche Buchſtabenrechnung zuerſt erfunden, und ſtatt der Ziffern allgemeine Zeichen, nemlich Buchſtaben, und zwar die gröſſern Buchſtaben des Alphabeths eingeführt hatte. Doch war er zu beſcheiden, den alten Nahmen der Algebra mit dem ſeinigen zu verwechſeln, und die Nachkommen haben ihm auch die Ehre nicht gethan, daß ſie dieſe Kunſt die Artem Vieteam genannt, und dadurch den arabiſchen Nahmen verdrungen hätten. Inzwiſchen bekame doch die Algebra einen Beynahmen, und hieſſe ſeit den Zeiten des **Vieta** Algebra Specioſa; andere haben auch ſynonymiſche Ausdrücke eingeführt, und ſie bald Arithmeticam ſpecioſam, bald univerſalem, wie **Newton**, bald literalem, oder auch nur Calculum literalem genannt.

§. 127. An dieſer Buchſtabenrechnung hat man immer verbeſſert, ſo viel man konnte; wir wollen aber hier nur die Hauptveränderungen erzehlen. Die erſte ſchreibt ſich vom **Thom. Harriot**, einem Engländer, her, welcher ſtatt der groſſen Buchſtaben kleine eingeführt, und bey der Multiplication die Buchſtaben blos ohne Zeichen zuſammengeſetzt hat; wie ſolches aus ſeiner zu London 1631 herausgekommenen Praxi Artis analyticæ erhellet. Die andere Hauptverbeſſerung hat man dem **Carteſius** zu danken, welcher die Potenzen durch

hinten

hinten angeſetzte kleine Ziffern bezeichnet, da er z. E. ſtatt aaa ſchrieb a^3, und noch überdiß dieſe Rechnung auf die höhere Geometrie angewandt hat. Die dritte Verbeſſerung iſt dem Newton und Leibnitz zuzuſchreiben, von welchen ohnehin die Algebra auf den höchſten Gipfel gebracht worden; in der Buchſtabenrechnung haben ſie unbeſtimmte Exponenten eingeführt, und noch überdas die Rechnung des Unendlichen erfunden, davon die Geſchichte in einem andern Hauptſtück vorkommen wird. Hier merken wir nur dieſes an, daß in neuern Zeiten die Buchſtabenrechnung zween Haupttheile noch in ſich begreift, deren einer Analyſis finitorum genannt wird, wenn man aus gegebenen endlichen Gröſſen andere unbekannte findet; der andere Analyſis infinitorum, wenn man aus unendlich kleinen Gröſſen durch die Differential- und Integralrechnung endliche unbekannte Gröſſen ſuchet.

§. 128. Anmerk. Aus dieſer kurzen Geſchichte wird man doch begreifen, daß es um die Buchſtabenrechnung gar nichts ſo ſchweres ſey, als man meynt. Die Zahlenrechnung iſt noch ſchwerer, oder wenigſtens mühſamer, wie man aus der Vergleichung bald merken wird, beſonders wenn einem das Einmal Eins ſo beſchwerlich zu lernen iſt. Dann in der Buchſtabenrechnung hat man keins. Der arabiſche Nahme darf einen eben ſo wenig ſchröcken. Unſere zehn Zahlzeichen, die doch Kinder ſchon wiſſen, haben wir ja auch von den Arabern erhalten. Der eigentlich arabiſche Witz in der Algebra beſteht etwa in etlich Regeln, wie z. E. die Regel de Tri iſt; und dieſe verſteht doch ſchon ein jeder Kaufmannsjunge. Wem aber diß alles noch nicht genug zur Aufmunterung iſt, dem will ich die Worte des Herrn Prof. Käſtners aus der Vorrede zu ſeiner Mathematik I. Th. anführen, wenn er ſchreibt: "Die Buchſtabenrechnung iſt jedem unentbehrlich, der ohne allzugroſſe Weitläuftigkeit die nothwendigſte Lehren einſehen, und in den Stand kommen will, ſich ſelbſt einigermaſſen zu helfen. Sollte ja einer zu furchtſam ſeyn, ſo will ich ihm zehn bis zwölf Octavbände und Quartanten weiſen, deren Verfaſſer auf verſchiedenen Univerſitäten

„Deutſchlands wegen der darinnen angebrachten Buchſtabenrech„nung für tiefſinnige Mathematiker, ja gar für Algebraiſten ge„halten werden, und ich will ihn auf meine Ehre verſichern, „daß ihn ein halbes Jahr in den Stand ſetzen ſoll, eben ſo tief„ſinnige Werke zu ſchreiben, wenn er nur einen mittelmäſſigen „Fleiß anwenden will!„

Die vier Rechnungsarten mit Zeichen und Buchſtaben.

§. 129. Erklärungen. Die Art mit Zeichen und Buchſtaben zu rechnen kann man nicht gründlich verſtehen, es ſey dann, daß man ſich einen deutlichen Begriff von entgegengeſetzten Gröſſen, das iſt, von poſitiven und negativen, oder bejahenden und verneinenden Gröſſen bilde. Man heißt nemlich entgegengeſetzte Gröſſen, die in einer ſolchen Verhältniß gegeneinander betrachtet werden, daß eine die andere vermindert; z. E. Vorwarts und Rückwartsgehen; Vermögen und Schulden; 7 Thl. Vermögen und 4 Thl. Schulden, machen 3 Thl. Vermögen; oder 7 Thl. Schulden und 4 Thl. Vermögen machen 3 Thl. Schulden. Wenn man die Schulden poſitiv nennt, ſo iſt das Vermögen, als verneinende Schulden negativ; nennt man aber das Vermögen poſitiv, ſo ſind die Schulden, ein verneinendes Vermögen, negativ, daher es gleichgültig und willkührlich iſt, welche man von beeden poſitiv oder negativ nennet. Die negative haben das Zeichen — und die poſitive das Zeichen +. Beede aber ſind wirkliche Gröſſen, wie z. E. beedes Vorwarts und Rückwartsgehen was wirkliches iſt.

§. 130. Zuſatz. Negative Gröſſen ſind alſo wahrhaftige Gröſſen, und der Ausdruck, weniger als nichts, ſchickt ſich nicht hieher, es wäre dann, daß man das Nichts vorher erklärte, und zeigte, daß man kein abſolutes, ſondern nur reſpectives Nichts darunter verſtünde.

§. 131. Anmerk. Dieſe kurze Lehre muß man ſich vorzüglich bekannt machen, wenn man die erſte Gründe dieſer Wiſſenſchaft genau lernen und verſtehen will. Man kann die Sache mit Exempeln deutlich genug machen. Wenn man den Zuſtand, wo man weder vor ſich noch rückwärts geht, ein Nichts heißt, ſo wäre Rückwartsgehen weniger als nichts, woferne man Vorwartsgehen was poſitives nennt; oder wenn der Zuſtand, wo einer weder Vermögen noch Schulden hat, ein Nichts genannt wird, ſo ſind Schulden weniger als nichts, wofern man das Vermögen was poſitives heißt, oder Vermögen weniger als nichts, woferne Schulden poſitiv genannt würden. Wenn einer 100 Thl. Schulden hat, und bekommt 100 Thl. zu Tilgung ſeiner Schulden geſchenkt, ſo hat er erſt nichts; vorher hatte er alſo 100 Thl. weniger als dieſes reſpective Nichts. In den geometriſchen Wiſſenſchaften wird dieſe Lehre weiter erläutert. Die Sinus zwiſchen 180 und 360 Graden ſind negativ, unerachtet ſie wirkliche Linien ſind, die den entgegengeſetzten poſitiven Sinuſſen gleich ſind; die Coſinus über 90° ſind negativ u. ſ. w. oder Linien des Diameters vom Mittelpunkt gegen die rechte Hand genommen, ſind poſitiv, gegen die linke negativ, oder umgekehrt; es ſind aber alles wirkliche Gröſſen. Durch dieſe Exempel wird unſer Vortrag hinlänglich erläutert ſeyn.

§. 132. Lehrſatz. Ungleiche entgegengeſetzte, das iſt, poſitive und negative Gröſſen von einer Art werden addirt, wenn man die kleinere von der gröſſern abzieht, und dem Reſt das Zeichen der gröſſern gibt; dann das was einander aufhebt, muß man aufheben, weil es ſolche Gröſſen ſind, die einander vermindern §. 129. Von der gröſſern aber, weil ſie ungleich ſind, wird allemal noch was übrig bleiben, alſo muß man auch dem Reſt das Zeichen der gröſſern Gröſſe geben. z. E. $+6-2=4$, $+3$

— 8 = — 5. Wenn man, was ſich gleich gegeneinander aufhebt, ſchnell überſchauet, und ſodann den Reſt mit dem gehörigen Zeichen ſetzt, ſo hat man dieſe Regel nicht ſo nöthig; wie wir unten in Exempeln zeigen.

§. 133. Zuſatz. Gleiche entgegengeſetzte Gröſſen heben alſo einander auf, und werden ein reſpectives Nichts, weil nichts übrig bleibt, $+3-3=0$.

§. 134. Zuſatz. Wenn einerley Zeichen vorhanden ſind, ſo iſt es vor ſich klar, daß man ſie ſchlechthin addirt, mit Beybehaltung des Zeichens. $+3+5=+8$; $-3-2=-5$.

§. 135. Willk. Satz. Bey der Buchſtabenrechnung wird im Anfang, wenn kein Zeichen vorhanden iſt, allemal das Zeichen + verſtanden; oder das Zeichen + wird im Anfang der Reyhe von Zahlen und Buchſtaben nicht ausgedruckt; wohl aber das Zeichen —; wenn es da ſeyn ſoll; Eine einzele Gröſſe wird ohne das Zeichen 1 geſchrieben, z. E. $+a$, nicht $+1a$, $-b$, nicht $-1b$.

§. 136. Zuſatz. Wenn Gröſſen von verſchiedener Art addirt werden ſollen, ſo werden ſie blos mit ihren Zeichen zuſammen gehängt. z. E. $2a+3b=2a+3b$.

§. 137. Lehrſatz. Man kann alſo in der Buchſtabenrechnung I. wo beederſeits einerley Zeichen ſind, nach §. 134. II. wenn verſchiedene Zeichen + und — untereinander ſtehen, nach §. 132. 133. III. wenn die Gröſſen von verſchiedener Art ſind nach §. 136. die Addition leicht verrichten, wie uns folgende Exempel belehren.

§. 138.

§. 138. Exemp. Weil man nach §. 121. die Gröſſen mit den kleinen Buchſtaben des Alphabeths zu bezeichnen pflegt, ſo wird man folgende Exempel leicht verſtehen; der I. Fall iſt, wenn oben und unten gleiche Zeichen vorkommen. 3a und 2a geben 5a, — b und — 5b geben — 6b, + 4f und + 2f geben + 6f, — 3g und — 2g geben — 5g; es iſt nemlich gleichgültig, ob man vor oder rückwarts addirt, weil die Buchſtaben keinen Werth nach ihren Stellen haben.

$$\begin{array}{l} 3a - b + 4f - 3g \\ 2a - 5b + 2f - 2g \\ \hline 5a - 6b + 6f - 5g \end{array}$$

II. Fall; wenn verſchiedene Zeichen vorkommen; z. E. 6a und 3a geben 9a; — 4b + 5b geben + b, dann 4 heben ſich gegen 4 auf, und eins mit dem Zeichen + bleibt noch übrig, (oder 4b von 5b läßt b, und zwar + b, weil die gröſſere Zahl 5b das Zeichen + hat.) Ferner + 3f - 8f laſſen noch - 5f, dann + 3f gegen — 3f heben ſich auf; folglich ſetzt man von — 8f nur noch — 5f (oder 3f von 8f laſſen 5f, mit dem Zeichen —, weil die gröſſere Zahl 8f dieſes Zeichen hat;) endlich + g — g heben ſich auf; folglich iſt die Summe 9a + b — 5f; bey dieſem Fall kann es auch geſchehen, daß mehrere Reyhen als zween untereinander geſetzt werden; z. E. 3a + 2a gibt 5a, und — a gibt 4a; — 6b und — 2b gibt — 8b, und + 3b läßt — 5b, + f + 4f gibt 5f, und — 3f läßt + 2f; in welchem Fall man entweder die gleich bezeichnete zuerſt zuſammen zehlt, und hernach die obige Regel bey verſchiedenen Zeichen anwendet, oder wenn man im Zehlen geübt iſt, nur ſogleich was ſich gegeneinander aufhebt, wirklich aufhebt, und die Reſte mit ihren gehörigen Zeichen ſetzt.

$$\begin{array}{l} 6a - 4b + 3f - g \\ 3a + 5b - 8f + g \\ \hline 9a + b - 5f \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3a - 6b + f \\ 2a + 3b - 3f \\ -a - 2b + 4f \\ \hline 4a - 5b + 2f \end{array}$$

III. Fall; wenn verſchiedene Buchſtaben, das iſt, Gröſſen, die nicht von einer Art ſind, vorkommen, ſo werden ſie blos mit ihren Zeichen zuſammen geſetzt, wie folgendes Exempel ausweißt; wir wollen noch ein Exempel geben, wo alle Fälle vorkommen; und hernach die Regel auf genannte Zahlen anwenden; damit man ſehe, daß ſie allgemein und natürlich ſeye; dann wenn einer gut addiren kann, ſo kann er ſogleich auch ſubtrahiren.

$$\begin{array}{l} 2a - b + 3g \\ 4a + 3b - h \\ \hline 6a + 2b + 3g - h. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a - 3bg + f - 4h - cd \\ 2a - 2bg - 3f + 3h - 4cd + g \\ \hline 3a - 5bg - 2f - h - 5cd + g. \end{array}$$

Oder in genannten Zahlen:

6 Thl. — 20 gr. + 3 pf.	4 fl. + 30 kr. — 2 bl.
2 Thl. + 22 gr. — 5 pf.	3 fl. — 50 kr. + 5 bl.
8 Thl. + 2 gr. — 2 pf.	7 fl. — 20 kr. + 3 bl.

§. 139. **Lehrſatz.** Wenn man entgegengeſetzte Gröſſen von einander ſubtrahirt, ſo darf man blos alle Zeichen der zu ſubtrahirenden Zahl mit den entgegengeſetzten, das iſt + mit — und — mit + verwechſeln, und hernach addiren, die Summe wird die Differenz ſeyn. Dann entweder hat die zu ſubtrahirende Gröſſe das Zeichen + oder ſie hat das Zeichen —; iſt jenes, ſo iſt klar, daß durch die Subtraction aus plus minus werden müſſe; denn wenn man + 3 von 8 ſubtrahirt, ſo hat man 8 — 3; hat aber die abzuziehende Gröſſe das Zeichen minus, ſo muß + daraus werden; dann wenn die poſitive Gröſſe ihr Zeichen in das Zeichen der negativen bey der Subtraction verwandelt, ſo muß kraft des unmittelbaren Gegenſatzes die negative ihr Zeichen in das Zeichen der poſitiven verwandeln.

§. 140. **Zuſatz.** Wenn eine Gröſſe, davon eine andere Gröſſe abgezogen werden ſoll, von einer dritten ſubtrahirt wird, ſo wird die erſte ſubtrahirt und die andere addirt; weil eben dieſe zweyte zuviel abgezogen worden, wenn man die erſte ganz ſubtrahirt hat. z. E. Wenn ich von 9 ſubtrahire 8 — 4 ſo kommt heraus 9 — 8 + 4 = 5; dann wenn man 8 ganz ſubtrahirt, ſo kommt heraus 1, ich ſoll aber nur 8 — 4 ſubtrahiren, folglich muß ich 4 wie-

der

der addiren. Die zu ſubtrahirende Gröſſe wird in eine () eingeſchloſſen, z. E. $7-(5-4)=7-5+4=6$; $10-(3-1)=10-3+1=8$.

§. 141. Exemp. Man wird alſo leicht ſubtrahiren können, wenn man addiren kann. Wir wollen etliche Exempel geben; man verändert nemlich blos die Zeichen der zu ſubtrahirenden Zahl; 2a hat kein Zeichen, man verſteht alſo das Zeichen +, nach §. 135. folglich ſetzt man darunter —, b hat +, man ſetzt darunter —, 3g hat —, man ſetzt dafür +, f hat —, man ſetzt +; dieſe unten geſchriebene Zeichen werden beobachtet, und nach denſelben beede Reyhen addirt, ſo iſt die letzte Reyhe die Differenz.

$$\begin{array}{rrrr} 3a & -b & +4g & -f \\ 2a & +b & -3g & -f \\ - & - & + & + \\ \hline a & -2b & +7g & \end{array}$$

Eben ſo wird folgendes Exempel berechnet.

$$\begin{array}{rrrrrr} 5a & -3b & +f & -9h & +8 & \\ 2a & +3b & +f & -8h & -8 & +g \\ - & - & - & + & + & - \\ \hline 3a & -6b & & -h & +16 & -g \end{array}$$

§. 142. Willk. Satz. Die Producte in der Buchſtabenrechnung werden durch Zuſammenſetzung der Buchſtaben ausgedruckt, ohne weitere Zeichen. z. E. a . b heißt ab, ein Ausdruck für alle mögliche Producte; a . b . d = abd; wenn ein Buchſtabe oder eine Gröſſe mit ſich ſelbſt ein oder mehrmalen multiplicirt wird, ſo hängt man am Ende eine Zahl oberhalb des Buchſtabens, welche anzeigt, wie oft er mit ſich ſelbſt multiplicirt worden; z. E. für aa ſchreibt man a^2, für aaa, a^3, für bbbb, b^4 u. ſ. w.

§. 143. Lehrſatz. Die Multiplication mit entgegengeſetzten Gröſſen beruhet auf einer kurzen Regel, welche alſo heißt: Einerley Zeichen geben plus, verſchiedene geben minus. Dann entweder ſind die Zeichen verſchieden, oder einerley; ſind ſie verſchieden, ſo iſt klar, daß das Product negativ wer-

werden muß; das iſt, + 4 . — 3 = — 3 . 4, und — 3 . + 4 = — 4 . 3. weil nach §. 18. — 3 in — 12 ſo oft enthalten ſeyn muß als + 1 in + 4 Sind aber die Zeichen einerley, ſo iſt das Product poſitiv; welches bey zween poſitiven Factorn klar genug iſt, dann + 3 . + 4 = + 12; aber eben ſo klar wird es auch bey negativen, wenn man nur bedenkt, daß der eine Factor ſo oft im Product enthalten ſeyn muß, als die Einheit im andern Factor enthalten iſt. Es ſteckt aber nicht die poſitive Einheit oder + 1, ſondern das Gegentheil der + 1 in dem einen negativen Factor; alſo muß auch das Gegentheil des andern negativen Factors, das iſt + im Product ſtecken; folglich muß das Product das Zeichen plus haben. z. E. — 3 . — 4 = + 12; weil das Gegentheil von + 1, das iſt — 1 in — 3 dreymal ſteckt, folglich auch das Gegentheil der — 4, das iſt + 4 in 12 dreymal ſtecken muß, welches nicht geſchehen könnte, wenn 12 negativ wäre.

§. 144. Anmerk. Dieſen Beweis hat Herr Prof. Käſtner gegeben, und ich erinnere mich nicht, ihn irgendwo ſonſten geleſen zu haben. Man hat auch einen Beweis per indirectum aus der Geometrie, den man ſonſten zur Erläuterung beybringt. Fig. I. Wenn die ganze Seite eines Rectanguli in die Länge a und in die Breite c heißt, und es werden zwey kleinere Parallelogramme abgeſchnitten, davon die Seiten des einen b des andern d ſind; man verlange das Rectangulum ABCD, ſo wird es (a — b) .(c — d) = ac — bc — cd + db; nemlich das kleine Rectangulum CE = db iſt wieder bey bc und cd abgezogen worden, alſo einmal zuviel, man muß es alſo wieder addiren, folglich wird — b . — d = + db. wie unter andern auch aus §. 140. erhellet.

§. 145. Anmerk. Wir haben die Regeln der Multiplication erwieſen, dahero noch übrig iſt, daß wir ſie mit Exempeln erläutern. Es gibt zween Fälle; denn entweder beſtehet der Multiplicator nur aus einem Buchſtaben oder Zahlzeichen, oder aus mehreren, die durch das Zeichen + oder — verbunden ſind. Der erſte Fall iſt leicht: wenn man nur die Regeln beobachtet;

$$\begin{array}{r} a - x \\ x \\ \hline ax - xx \end{array} \qquad \begin{array}{r} a - b + 3d \\ - b \\ \hline - ab + bb - 3db; \end{array}$$

a . x iſt ax, + x mit — x iſt — xx; ferner + a mit — b iſt — ab, — b mit — b iſt + bb u. ſ. w.

Der II. Fall, wenn beede Factores aus mehr Buchſtaben beſtehen, ſie mögen einerley oder verſchieden ſeyn.

1. Ex.

$$\begin{array}{r} a + b \\ a + b \\ \hline aa + ab \\ + ab + bb \\ \hline aa + 2ab + bb \end{array}$$

oder $a^2 + 2ab + b^2$

2. Ex.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a - b \\ \hline aa - ab \\ - ab + bb \\ \hline aa - 2ab + bb \end{array}$$

oder $a^2 - 2ab + b^2$

3. Ex.

$$\begin{array}{r} a - b \\ a + b \\ \hline aa - ab \\ + ab - bb \\ \hline aa - bb \end{array}$$

Zuerſt multiplicirt man die obige Reyhe ganz mit a, a . a = aa, a . b = ab; hernach mit b, b . a = ab, und ſchreibt das Product unter das ihm gleiche vom erſten Reyhen, um die Addition zu erleichtern, (man könnte es auch in gerader Linie fortſchreiben) ferner b . b = bb; dieſe zwey Partialproducte addirt man zuſammen, da dann die erſte Reyhe aa + 2ab + bb, oder nach §. 142. die zweyte Reyhe a^2 u. ſ. w. herauskommt; welches der allgemeine Ausdruck aller Quadratzahlen iſt. Weil überall die Zeichen + vorkommen, ſo hat das Product auch dieſe Zeichen. Im 2. Ex. wird abermal die erſte Reyhe ganz mit a hernach mit — b multiplicirt; a . a = aa, a . — b = — ab; ferner — b . + a = — ab, und — b . — b = + bb. Abermal ein vollkommen Quadrat, wo die Wurzel a — b iſt. Im dritten Exempel wird die Summe zweyer Zahlen mit ihrer Differenz multiplicirt; das Product iſt die Differenz der Quadrate. Dann a . a = aa, a . - b = - ab, ferner + b . + a = + ab, + b . - b = - bb; wenn man nun die Partialproducte addirt, ſo heben ſich - ab und + ab auf, und der Reſt aa - bb gibt das verlangte Product.

§. 146. Zuſatz. (a + b)(a + b) oder (a — b)(a — b) gibt immer ein Quadrat, und man kann für $a^2 + 2ab + b^2$ den erſten, und für $a^2 - 2ab + b^2$ den zweyten Wehrt und umgekehrt ſetzen.

§. 147.

§. 147. Zuſatz. Wenn in der Rechnung $a^2 - b^2$ vorkommt, ſo kann man jedesmal $(a - b).(a + b)$ dafür ſetzen, und auch umgekehrt; wie es die Schicklichkeit erfordert.

§. 148. Zuſatz. Für den Ausdruck $ax - xx$ läßt ſich $(a - x)x$ und umgekehrt, wie auch für $x - xx$ der Ausdruck $(1 - x)x$ ſetzen; dann wenn man wirklich multiplicirt, ſo kommt $x - xx$ heraus.

§. 149. Anmerk. Dieſe Zuſätze hat man deßwegen ſich bekannt zu machen, weil es gar oft zu geſchehen pflegt, daß man durch die Zerfällung des Products in ſeine Factores in der Buchſtabenrechnung manche Vortheile erhält, die man ſonſt vergeblich ſucht; man muß dahero eine Fertigkeit in ſchneller Erfindung der Factorum zu bekommen ſuchen.

§. 150. Willk. Satz. In der Diviſion werden die Buchſtaben, die durch die Multiplication verbunden ſind, wieder getrennet, wofern der Diviſor einerley mit einem oder dem andern Factor des Dividendus iſt; z. E. $\frac{ab}{a} = b$, dann a in a iſt einmal enthalten, folglich kommt in den Quotienten b; $\frac{abc}{bc} = a$, $ag : a = g$ u. ſ. w. ſind aber Diviſor und Dividendus ganz verſchieden, ſo wird die Diviſion entweder blos angezeigt, z. E. $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, $g : a$; oder wie wir unten zeigen werden, wird der Quotient in einer unendlichen Reyhe von Brüchen durch Näherung geſucht, wenn der Diviſor zuſammengeſetzt iſt, z. E. $\frac{a}{b+c}$ oder $\frac{a}{b-c}$.

§. 151. Lehrſatz. Die Regel der Diviſion in Ruckſicht auf die Zeichen, iſt eben dieſelbe, die

bey

bey der Multiplication ſtatt hatte; nemlich einerley Zeichen geben plus, verſchiedene geben minus. Der Beweis iſt der nemliche, den wir bey der Multiplication gegeben haben §. 143.

§. 152. Die Sache wird ſich durch Exempel erläutern laſſen; es gibt zween Fälle, wenn die Gröſſen einer Art ſind; der Diviſor beſteht entweder aus einem oder aus mehr durch + und — verbundenen Buchſtaben. Das einzele kann auch ein Product, z. E. ab ſeyn. I. Fall, wenn der Diviſor einzel iſt; man dividirt wie in den Zahlen unter ſich, und ſagt, a in ab iſt b mal enthalten; der Quotient bekommt b; mit dem Quotienten wird der Diviſor a multiplicirt, a . b iſt ab, dieſes Product von dem Dividendus ſubtrahirt, läßt - ac, das man herab ſetzt; der Diviſor wird wieder unterſchrieben. + a in - ac iſt - c mal enthalten, weil verſchiedene Zeichen - geben; der Quotient bekommt alſo - c, dieſer Quotient wird mit dem Diviſor multiplicirt. - c . + a gibt - ac, das Product von dem Dividendus abgezogen läßt + ad; der Diviſor a wird wieder unterſchrieben; a in ad gibt + d, weil es einerley Zeichen ſind; a . d = ad, diß von dem Dividendo ſubtrahirt läßt nichts, alſo hat man den Quotienten genau gefunden.

$$ab - ac + ad \rceil\; b - c + d$$
$$(a)$$
$$ab$$
$$\overline{\;- ac + ad\;}$$
$$(a)$$
$$- ac$$
$$\overline{\;+ ad\;}$$
$$(a)$$
$$ad$$

II. Fall. Wenn der Diviſor nicht einzel iſt, da es wie in der obigen Diviſion heißt, a in aa iſt enthalten a mal; der Quotient bekommt a; mit dieſem Quotienten wird der ganze Diviſor multiplicirt, a . a = aa, und + a . + b = + ab, das Product aa + ab wird wieder von dem Dividendus ſubtrahirt, man verwechſelt alſo die Zeichen nach §. 139. und addirt, - aa + aa heben ſich auf, - ab und - bb bleiben übrig; dieſer Reſt wird wieder durch a + b dividirt, a - ab iſt - b mal enthalten, - b . + a iſt - ab; - b . + b iſt - bb, diß Product vom Dividendo abgezogen hebt auf, und läßt nichts.

$$aa - bb \rceil\; a - b$$
$$(a + b)$$
$$aa + ab$$
$$- \quad -$$
$$\overline{\;- ab - bb\;}$$
$$a + b$$
$$- ab - bb$$
$$\overline{\quad\bullet\quad}$$

$$aa - bb - 2ac + cc \rceil\, a + b - c$$
$$(a - b - c)$$
$$aa - ab - ac$$
$$- \quad + \quad +$$
$$+ab - bb - ac + cc$$
$$(a - b - c)$$
$$ab - bb - bc$$
$$- \quad + \quad +$$
$$-ac + bc + cc$$
$$(a - b - c)$$
$$-ac + bc + cc$$
$$0$$

Eben ſo wird das andere Exempel gerechnet, a in aa iſt enthalten a mal, der Quotient a wird mit dem ganzen Diviſor multiplicirt, und gibt das Product aa − ab − ac, dieſes von dem Dividendo abgezogen, läßt, wenn die Zeichen verändert werden + ab − bb − ac + cc; der Diviſor wird abermal unterſchrieben; a in ab, b mal; der Quotient + b mit dem Diviſor multiplicirt, gibt das Product ab − bb − bc, diß von dem Dividendus ſubtrahirt, läßt − ac + bc + cc; der Diviſor noch einmal unterſchrieben gibt den Quotienten − c, das Product aus − c in den Diviſor vom Dividendus abgezogen läßt nichts.

§. 153. Zuſatz. Aus dem bisherigen wird man alſo leicht verſtehen, wie man eine einzele Gröſſe durch einen zuſammengeſetzten Diviſor dividiren und den Quotienten durch Näherung bekommen ſolle; eine Lehre, die beſonders zu merken iſt, weil ſie in der Summirung der Reyhen uns zu ſtatten kommt. z. E. Man ſolle 1 durch 1 — x dividiren.

$$1 \rceil\, 1 + x + xx + xxx \;\&c.$$
$$(1 - x)$$
$$1 - x$$
$$- \quad +$$
$$+x$$
$$(1 - x)$$
$$x - xx$$
$$- \quad +$$
$$+xx$$
$$(1 - x)$$
$$xx - xxx$$
$$- \quad +$$
$$+xxx$$

Da es heißt, 1 in 1 iſt enthalten 1 mal; der Quotient 1 multiplicirt in den Diviſor 1 − x gibt das Product 1 − x, diß von dem Dividendus abgezogen läßt + x, wenn man die Zeichen verändert und addirt; der Diviſor wieder unterſchrieben gibt den Quotienten x, dann 1 in x iſt mal enthalten; der Quotient in den Diviſor multiplicirt gibt x − xx, diß von dem Dividendus x abgezogen, läßt + xx u. ſ. w.

Die

Die Buchſtabenrechnung in Brüchen.

§. 154. Lehrſatz. Die Brüche werden in der Buchſtabenrechnung eben ſo behandelt, wie in der Zahlenrechnung; Man bringt ſie unter einerley Benennung, man addirt, ſubtrahirt, multiplicirt und dividirt nach eben den Regeln, die wir §. 54. folgg. gegeben; dann die daſelbſt vorgetragene Beweiſe ſind allgemeine Beweiſe, die alſo auch insbeſondere die Buchſtabenrechnung erläutern.

§. 155. Zuſatz. Man bringt alſo Brüche unter einerley Benennung, wie §. 57. Dann $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{g} = \frac{adg}{bdg} + \frac{cb}{bdg} + \frac{ebd}{bdg}$; man addirt und ſubtrahirt ſie, wenn man nach geſchehener Reduction unter einerley Benennung Zehler zu Zehlern addirt, oder Zehler von Zehlern ſubtrahirt. z. E. $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$, $\frac{a}{d} + \frac{f}{g} = \frac{ag+fd}{dg}$; und $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-cb}{bd}$.

§. 156. Lehrſatz. Die Multiplication und Diviſion der Brüche befolgt gleichermaſſen eben die Regeln, die §§. 65. 70. vorkommen.

Der I. Satz iſt $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ Der II. Satz $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

Bew.

Es ſey $\frac{a}{b} = m$ $\;\cdot b$ $\quad \frac{c}{d} = n$ $\;\cdot d$

$a = bm \quad c = dn$

$c = dn$

$ac = bdmn$ $\;: bd$

$\frac{ac}{bd} = mn.$

Bew.

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd}$

$\frac{ad}{bd} : \frac{cb}{bd} = \frac{ad}{cb}$

$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$

§. 157. Zuſatz. Einen Bruch, deſſen Nenner zuſammengeſetzt iſt, z. E. $\frac{a}{b+c}$ dividirt man wirklich, wenn man nach §. 152. und 153. die Operation anſtellt, und den Quotienten durch Näherung ſucht.

$$\frac{a}{(b+c)}\Big\}\ \frac{a}{b}-\frac{ac}{bb}+\frac{acc}{bbb}-\frac{accc}{bbbb}\ \&c.$$

$$\begin{array}{l}
a+\frac{ac}{b} \\
-\ -\ \\
\hline
-\frac{ac}{b} \\
(b+c) \\
-\frac{ac}{b}-\frac{acc}{bb} \\
+\ \ + \\
\hline
+\frac{acc}{bb} \\
(b+c) \\
+\frac{acc}{bb}+\frac{accc}{bbb} \\
-\ \ - \\
\hline
-\frac{accc}{bbb}
\end{array}$$

Dann b iſt in a enthalten $\frac{a}{b}$ mal, der Quotient heißt alſo $\frac{a}{b}$, dieſer Quotient mit $b+c$ multiplicirt, gibt nach §. 67. $\frac{ab}{b}+\frac{ac}{b}$ das iſt $a+\frac{ac}{b}$, das Product vom Dividendus ſubtrahirt, läßt, weil a von a aufgeht, nach Veränderung der Zeichen $-\frac{ac}{b}$; der Diviſor wird wieder unterſchrieben; b in $-\frac{ac}{b}$ gibt nach §. 72. im Quotienten $-\frac{ac}{bb}$, dieſer Quotient mit dem Diviſor multiplicirt, gibt das Product $-\frac{acb}{bb}-\frac{acc}{bb}$, das iſt $-\frac{ac}{b}-\frac{acc}{bb}$, welches von dem Dividendus $-\frac{ac}{b}$ abgezogen, läßt $+\frac{acc}{bb}$ u. ſ. w. wo man aufhört, wird der Reſt, als ein Bruch, wie in der Diviſion §. 49. zum Quotienten addirt.

§. 158. Zuſatz. Die obige Reyhe kürzer ausgedruckt iſt $\frac{a}{b+c}=\frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3}-\frac{ac^3}{b^4}+\frac{ac^4}{b^5}$ u. ſ. w.

§. 159.

§. 159. Zuſatz. Wann $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$, ſo iſt $\frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1$ u. ſ. w.

§. 160. Anmerk. Dieſes aber iſt nicht ſo zu verſtehen, als ob eine unendliche Reyhe Nullen $= \frac{1}{2}$ wenn die Anzahl $1 - 1 + 1 - 1$ u. ſ. w. gleich, oder, wenn ſie ungleich iſt, $1 = \frac{1}{2}$ wäre; dann ſie iſt weder gleich noch ungleich; ſondern unendlich, das iſt, die Diviſion muß immerfort geſetzt werden, oder wenn man abbricht, ſo muß man den Reſt, den man in der Diviſionsoperation noch hat, zum Quotienten mit ſeinem Diviſor als einen Bruch addiren, da dann jedesmal herauskommen wird, daß $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Guido Grandus hat ſich hierinnen geirret, wenn er aus dieſer Operation geſchloſſen, unendlich viel Nullen geben eine poſitive Gröſſe, nemlich $\frac{1}{2}$. Er wollte damit die Schöpfung aus Nichts erklären.

§. 161. Zuſatz. Wenn $a = 1$ und $c = 1$ und $b = 2$, ſo iſt $\frac{a}{b+c} = \frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ u. ſ. w.

§. 162. Lehrſatz. Woferne man ſtatt des Diviſors $b + c$ den Diviſor $b - c$ ſetzt, ſo iſt der Quotient $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b} + \frac{ac}{b2} + \frac{ac2}{b3} + \frac{ac3}{b4} + \frac{ac4}{b5}$ u. ſ. w. und die Zeichen wechſeln nicht wie §. 157. ab; die Operation iſt eben dieſelbe; dahero wir ſie hier nicht ausführlich wie §. 157. herſetzen.

§. 163. Zuſatz. Wenn in §. 162. $a = 1$, $b = 1$ und $c = 1$, ſo iſt $\frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ u. ſ. w. alſo $\frac{1}{0} = \infty$.

§. 164. Zuſatz. Wenn $a = 1$, und $c = 1$, und $b = 2$, ſo iſt $\frac{1}{2-1} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{11}{16} + \frac{1}{32}$ u. ſ. w.

§. 165. Zuſatz. Wenn a = 1 und b = 1, ſo iſt nach der Reyhe §. 158. der Ausdruck $\frac{1}{1+c}$, oder wenn man für c = x ſetzt, $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4$ u. ſ. w. Ferner wenn b bleibt, oder = x geſetzt, und c = 1, ſo iſt $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$; folglich ſind die zween Reyhen einander gleich, das iſt, $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$ u. ſ. w.

§. 166. Anmerk. Dieſe Veränderungen der Reyhen ſind aus dem was hier vorgetragen wurde, leicht verſtändlich; das weitere wird unten vorkommen, wenn wir von Summirung der Reyhen und Progreſſionen reden werden.

Von den Potenzen oder Dignitäten und ihren Veränderungen.

§. 167. Erklär. Wenn man eine Gröſſe mehrmalen mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo heißt das Product die Potenz oder Dignität; oder ein Product aus lauter gleichen Factorn iſt eine Potenz, der einfache Factor iſt die Wurzel, die Menge aller gleichen Factorn heißt der Grad oder der Exponent der Potenz, welcher anzeigt, wie viel mal die gegebene Gröſſe mit ſich ſelbſt multiplicirt worden; und dieſer Exponent wird mit einer kleinen Ziffer, oberhalb des Factors zur Rechten, geſchrieben. Das Product von zween gleichen Factorn heißt ein Quadrat, das von dreyen Cubus, das von mehrern die 4te, 5te Potenz u. ſ. w. das Wurzelzeichen iſt bekannt. z. E. $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4 = 625$; 5^4 iſt die Potenz, 5 iſt die Wurzel; 4 der Exponent. $6 \cdot 6 = 6^2$, und $6 = \sqrt{6^2}$; $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 = 4^3$, und $\sqrt[3]{64} = 4$.

§. 168.

§. 168. Zuſatz. Wenn die Wurzel ein Bruch iſt, ſo iſt auch das Quadrat oder die Potenz überhaupt ein Bruch, weil man, wenn ein Bruch mit einem Bruch multiplicirt wird, Zehler mit Zehlern und Nenner mit Nennern multiplicirt, oder $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$, oder überhaupt $\frac{a}{b}$ zur n^{ten} Potenz erhoben $= \frac{a^n}{b^n}$.

§. 169. Zuſatz. Eben ſo iſt die Wurzel aus einem Bruch wieder ein Bruch, deſſen Zehler die Wurzel des Zehlers, und der Nenner die Wurzel des Nenners iſt. $\sqrt[3]{\frac{27}{64}} = \frac{3}{4}$; $\sqrt[n]{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{a}{b}$.

§. 170. Zuſatz. Das Quadrat eines eigentlichen und auch uneigentlichen Bruchs, der ſich durch den Nenner nicht ganz dividiren läßt, iſt keine ganze Zahl; dann es ſey der Bruch $\frac{u}{x}$ ſo iſt ſein Quadrat $\frac{uu}{xx}$; wenn nun dieſes Quadrat eine ganze Zahl wäre, z. E. p, ſo wäre $\frac{uu}{xx} = p$ und $\frac{uu}{x} = px$; folglich müßte $\frac{uu}{x}$ eine ganze Zahl ſeyn, alſo u durch x ſich dividiren laſſen, oder x müßte ein Factor von uu ſeyn, welches aber kraft der Hypotheſe nicht ſeyn kann.

§. 171. Zuſatz. Eben ſo kann auch der Cubus eines ſolchen Bruchs keine ganze Zahl ſeyn, u. ſ. w.

§. 172. Zuſatz Wenn die Potenzen keine ganze Zahlen ſind, ſo ſind es auch die Wurzeln nicht.

§. 173. Zuſatz. Wenn eine gegebene Wurzel gröſſer als eine ganze Zahl, aber doch zugleich kleiner als eben die um eins vermehrte ganze Zahl iſt, das iſt, wenn ſie zwiſchen x und x + 1 hineinfällt, und x eine ganze Zahl bedeutet, ſo gibt es keinen Bruch, der die Wurzel genau ausdruckte, ſondern man muß durch die Approximation oder Näherung dem wahren Wehrt, den man nie ganz bekommt, ſo nahe zu kommen ſuchen, daß der Fehler unmerklich wird.

§. 174. Anmerk. Man ſiehet hieraus, warum man bey den angehängten Nullen in Ausziehung der Quadrat und Cubiczahlen niemalen die Wurzel ganz bekommt Dann der Fehler iſt die Wurzel aus einem eigentlichen Bruch; er kann dahero niemal eine ganze Zahl werden, §. 172. folglich muß man ſich der wahren Wurzel nur nähern.

§. 175. Lehrſatz. Man kann die Potenzen addiren, ſubtrahiren, multipliciren und dividiren. Dann entweder ſind ſie gleichnahmigt, oder nicht; ſind ſie nicht gleichnahmig, ſo geſchehen die vier Rechnungsarten mit den Zeichen, davon wir ſchon geredet haben. Dann a^3 zu b^2 addirt iſt $a^3 + b^2$, ſubtrahirt $a^3 - b^2$, multiplicirt $a^3 b^2$, und dividirt $a^3 : b^2$ oder $\frac{a^3}{b^2}$; ſind ſie aber gleichnahmig, ſo wird die Addition und Subtraction wie in Zahlen verrichtet; $3a^3 + a^3 = 4a^3$, $3a^3 - a^3 = 2a^3$. Was aber die Multiplication und Diviſion betrift, ſo bemerkt man folgende Regeln:

I. Bey der Multiplication der gleichnahmigen Potenzen werden die Exponenten addirt und die Summe iſt das Product.

Dann $a^3 . a^2 = aaa . aa$

$aaa . aa = aaaaa$

$aaaaa = a^5$

$a^3 . a^2 = a^5$

wenn man alſo die Exponenten 3 und 2 addirt, ſo hat man das Product von $a^3 . a^2 = a^5$.

II. Bey der Diviſion wird der Exponent des Diviſors von dem Exponenten des Dividendus ſubtrahirt, die Differenz iſt der Quotient.

Dann $a^5 : a^3 = \frac{aaaaa}{aaa}$

$\frac{aaaaa}{aaa} = aa$

$aa = a^2$

$a^5 : a^3 = a^2$

$a^2 = a^{5-3}$

$a^5 : a^3 = a^{5-3}$

Folglich bekommt man den Quotienten, wenn man den Exponenten des Diviſors vom Exponenten des Dividendus ſubtrahirt.

§. 176. Zuſatz. Wenn die Exponenten allgemeine Zeichen wie *m* und *n* ſind, ſo iſt $x^m . x^n = x^{m+n}$ und $x^m : x^n = x^{m-n}$.

§. 177. Zuſatz. Eine Gröſſe, die unverändert bleibt, und nicht mit ſich ſelbſt multiplicirt wird, läßt ſich alſo durch x^1 ausdrücken; zuweilen hat man

einen Nutzen, wenn man die 1 ſetzt, z. E. $x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1$; meiſtentheils aber läßt man die Einheit weg, und ſchreibt für x^1 nur x. Das iſt x in der erſten Potenz.

§. 178. Lehrſatz. Eine Potenz, deren Exponent Null, iſt allzeit eins; $x^0 = 1$; dann

$$x^0 = x^{1-1}$$
$$x^{1-1} = x^1 : x^1$$
$$x^1 : x^1 = x : x = \frac{x}{x}$$
$$\frac{x}{x} = 1$$

$$x^0 = 1.$$

Die Gröſſe mag alſo ſeyn, was ſie für eine will, wenn ihr Exponent = o, ſo iſt ſie = 1. z. E. $a^0 = 1$, $b^0 = 1$, u. ſ. w. alſo $1, \frac{x}{x}, x^0$ ſind einerley Ausdrücke und alle einander gleich.

§. 179. Zuſatz. Wenn des Diviſors Exponent gröſſer iſt als der Exponent des Dividendus, ſo wird der Exponent des Quotienten negativ; z. E. $x^2 : x^5 = x^{2-5} = x^{-3}$.

§. 180. Zuſatz. Eine Potenz die einen negativen Exponenten hat, iſt einem Bruch gleich, deſſen Zehler eins, und deſſen Nenner die nemliche Potenz mit dem poſitiven Exponenten iſt. Dann $x^0 = 1$ §. 178. folglich $x^{-1} = \frac{1}{x}$, $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$, und überhaupt $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$; dahero x^{-n} und $\frac{1}{x^n}$ gleichgültige Ausdrücke ſind.

§. 181. Anmerk. Im folgenden werden wir beweiſen, daß es auch Dignitäten gebe, deren Exponenten Brüche ſind, welche nach eben dieſen Regeln behandelt werden.

§. 182. Zuſatz. Zuſammengeſetzte Potenzen werden auf eben dieſe Weiſe behandelt, dann $a^2x^3 \cdot ax = a^3x^4$, weil $aaxxx \cdot ax = aaaxxxx = a^3x^4$. alſo $x^n y^m \cdot xy = x^{n+1}y^{m+1}$ und $a^2x^3 : ax = ax^2$.

§. 183. Zuſatz. Wenn der Exponent unbeſtimmt iſt, ſo iſt aus gleichem Grund $x^n \cdot x^2 = x^{n+2}$ und $x^n \cdot x = x^{n+1}$ und $x^n : x = x^{n-1}$.

§. 184. Lehrſatz. Potenzen laſſen ſich zu höhern Graden erheben, wenn man ihre Exponenten mit dem Exponenten des verlangten Grads multiplicirt; dann a^3 zum vierten Grad erhoben, iſt nichts anders als a^3 viermal mit ſich ſelbſt multiplicirt; nun aber iſt $a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ nach §. 176. Eine Zahl aber etlichmal zu ſich ſelbſt addiren, heißt ſie multipliciren; folglich darf man nur den Exponenten der Potenz mit dem Exponenten des verlangten Grads multipliciren, ſo hat man die geſuchte Potenz. $a^{3\cdot4} = a^{12}$ der vierte Grad von a^3.

§. 185. Zuſatz. Im allgemeinen Ausdruck wird dahero auch ſeyn der n^{te} Grad von $x^m = x^{mn}$.

§. 186. Zuſatz. Sind die Potenzen zuſammengeſetzt, ſo iſt aus gleichem Grunde der dritte Grad von $x^2y^3 = x^6y^9$; und der n^{te} Grad von $x^my^r = x^{mn}y^{nr}$.

§. 187. Zuſatz. Auch bey negativen Gröſſen bleibt die Regel, dann x^{-2} im 3ten Grad $x^{-6} = \frac{1}{x^6}$ und z^{-n} im m^{ten} Grad iſt $x^{-nm} = \frac{1}{x^{nm}}$. nach §. 180.

§. 188. Lehrſatz. Die Wurzel aus einer Potenz läßt ſich ausziehen, wenn man den Expo-

 nenten

nenten der Potenz durch den Exponenten der Wurzel dividirt. Dann $\sqrt[3]{x^{12}} = \sqrt[3]{x^{4\cdot3}}$, wie nun x^{12} entſteht, wenn man x^4 dreymal mit ſich ſelbſt multiplicirt, ſo muß x^4 die Cubicwurzel aus x^{12} wieder herauskommen, wenn man $x^{12} = x^{4\cdot3}$ wieder mit 3 dividirt.

§. 189. Zuſatz. Allgemein iſt dahero auch $\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$; und bey zuſammengeſetzten Gröſſen $\sqrt[3]{x^4y^2} = x^{\frac{4}{3}}y^{\frac{2}{3}}$.

§. 190. Zuſatz. Hieraus erhellet zugleich, daß es Potenzen gebe, deren Exponenten Brüche ſind; $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$; auch negative, z. E. $\sqrt[7]{x^{-3}} = x^{-\frac{3}{7}}$.

§. 191. Zuſatz. Um eine Wurzel ſchicklicher auszudrücken, darf man ſie nur wie §. 189. folgg. ſetzen; $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$, und $\sqrt[r]{x^{n+m}} = x^{\frac{n+m}{r}}$, und $\sqrt[n+m]{x^r} = x^{\frac{r}{n+m}}$ ſind gleichgültige Ausdrücke.

§. 192. Zuſatz. Weil bey zuſammengeſetzten Gröſſen $\sqrt[2]{x^3y} = x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$ und allgemein $\sqrt[n]{x^my^r} = x^{\frac{m}{n}}y^{\frac{r}{n}}$, ſo laſſen ſich ſolche Wurzeln einfacher ausdrucken, wenn man aus dem einen Factor die Wurzel wirklich ausziehen kann; dann $\sqrt[m]{a^m b} = a^{\frac{m}{m}} b^{\frac{1}{m}} = a^1 . b^{\frac{1}{m}} = a\sqrt[m]{b}$. $\sqrt[n]{x^n b^r} = x^{\frac{n}{n}} b^{\frac{r}{n}} = x . b^{\frac{r}{n}} = x\sqrt[n]{b^r}$.

§. 193.

§. 193. Zuſatz. Sind alſo hinter dem Wurzelzeichen Zahlen, ſo muß man die Zahl in ihre Factores geſchickt und ſo zerfällen, daß eine ein vollkommenes Quadrat oder Cubus u. ſ. w. wird, je nachdeme man eine Quadrat- oder Cubicwurzel u. ſ. w. verlangt. z. E. $\sqrt{45} = \sqrt{9 \cdot 5} = 3\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{48} = \sqrt[3]{8 \cdot 6} = 2\sqrt[3]{6}$.

§. 194. Lehrſatz. Man kann verſchiedene Wurzelgröſſen unter einerley Benennung bringen, und hernach addiren, ſubtrahiren, multipliciren und dividiren, wenn man die Wurzelgröſſen als eine Potenz ausdrückt, deren Exponent ein Bruch iſt, und hernach die beede Brüche wie §. 155. unter einerley Benennung bringt. Denn $\sqrt[m]{x^n}$ und $\sqrt[r]{y^s}$ bekommen einerley Benennung auf folgende Weiſe

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}, \quad \sqrt[r]{y^s} = y^{\frac{s}{r}}$$

da nun nach §. 57. $x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{nr}{mr}}$, $y^{\frac{s}{r}} = y^{\frac{ms}{mr}}$

ſo iſt folglich $\sqrt[m]{x^n} = \sqrt[mr]{x^{nr}}$ und $\sqrt[r]{y^s} = \sqrt[mr]{y^{ms}}$

das iſt, beede Brüche haben einerley Benennung; ſie laſſen ſich dahero addiren und ſubtrahiren durch Zeichen; multipliciren und dividiren durch die wirkliche Multiplication und Diviſion der Gröſſen hinter dem Wurzelzeichen; dann $\sqrt[mr]{x^{nr}} \cdot \sqrt[mr]{y^{ms}} = \sqrt[mr]{x^{nr}y^{ms}}$; u. ſ. w.

§. 195. Zuſatz. In Zahlen gibt es zuweilen ſchicklichere Ausdrücke nach §. 193, bey der Addition und

und Subtraction, $\sqrt{63} + \sqrt{28} = \sqrt{9.7} + \sqrt{4.7} = 3\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (3+2)\sqrt{7}$.

§. 196. Zuſatz. Sind vor dem Wurzelzeichen noch Zahlen, ſo wird bey der Multiplication ihr Product auch in die Wurzelgröſſe multiplicirt, z. E. $3\sqrt{2} . 2\sqrt{7} = 3 . 2\sqrt{2 . 7} = 6\sqrt{14}$. Sind die Wurzelgröſſen zuſammen geſetzt, ſo verfährt man wie §. 145.

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2}).(\sqrt{3}-\sqrt{2}) = \sqrt{9} + \sqrt{6}$$
$$\qquad\qquad - \sqrt{6} - \sqrt{4}$$
$$\sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1.$$

eben ſo macht man es bey der Diviſion, dann $\frac{ab\sqrt{ce}}{bf\sqrt{ge}} = \frac{a}{f}\sqrt{\frac{c}{g}}$.

§. 197. Anmerk. Aus der Lehre der Potenzen läßt ſich nun die vorgetragene Lehre von Decimal- und Sexageſimalbrüchen allgemein erweiſen. Dann ein Decimalbruch kann als eine Potenz der 10 mit einem negativen Exponenten angeſehen werden; dann $\frac{1}{1000000} = 10^{-6}$ und $\frac{5}{1000000} = 5 . 10^{-6}$. Oder allgemein $a . 10^{-n}$ und $b . 10^{-m}$; wenn man nun dieſe zween Brüche mit einander multiplicirt, ſo heißt das Product nach der Regel, §. 175. $ab . 10^{-n-m}$, und wenn man den erſten durch den andern dividirt, ſo heißt der Quotient $\frac{a}{b}\, 10^{-n+m}$; welches die ſchon vorgetragene Lehre der Decimal- und Sexageſimalrechnung nicht nur erläutert, ſondern auch für alle nur mögliche Fälle erweiſet.

§. 198. Lehrſatz. Man mag die Zahl Zwey zu einer Potenz erheben, zu was für einer man immer will, ſo wird allemal die Potenz von 2 gröſſer ſeyn als der Exponent. Der Exponent ſey m, und m = 1. ſo iſt vorhin klar, daß, weil $2^1 > 1$ auch $2^m > m$. Nun multiplicire man mit 2.

$$\underline{\qquad\qquad} .2$$
$$2^m . 2 > 2m$$
$$2^m . 2 = 2^{m+1}$$ nach §. 183.

ſo iſt $2^{m+1} > 2m$ multiplicirt man wieder mit 2 ſo wird abermal 2^{m+2} gröſſer als der Exponent $m+2$ ſeyn u. ſ. w.

Auf dieſe Weiſe ſieht man ſchon, daß wenn der Exponent $m + 1000$ würde, doch immer die Potenz $2^{m+1000} > m + 1000$.

§. 199. Lehrſatz. Eine Gröſſe a die man immer halbirt, und durch 2 ſo dividirt, daß man die Helfte wieder halbirt, und dieſe Helfte noch einmal, und ſo immerfort, kann kleiner werden als eine jede angebliche Gröſſe, (quavis data vel aſſignabili minor). Es ſey die gegebene kleinſte Gröſſe c, ihr vielfaches mc, ſo daß durch die Multiplication $mc > a$ oder $a < mc$ werde.

Es iſt alſo I. $a < mc$

$$\underline{\qquad\qquad} : 2^m$$
$$\frac{a}{2^m} < \frac{mc}{2^m}$$

Nun iſt ferner nach §. 198.

II. $m < 2^m$ folglich

$$\underline{\qquad\qquad} . c$$
$$mc < 2^m c$$
$$\underline{\qquad\qquad} : 2^m$$
$$\frac{mc}{2^m} < c$$ und nach nr. I.
$$\frac{mc}{2^m} < \frac{a}{2^m}$$

$$\frac{a}{2^m} < c$$ das iſt: die Gröſſe a wird durch m

Hal-

Halbirungen, das iſt, durch alle Potenzen von 2 dividirt, zuletzt kleiner als die angebliche kleinſte Gröſſe c.

§. 200. Anmerk. Dieſen Beweis hat ſchon Euclides Elem. X. Prop. I. gegeben, und dadurch die Lehre von dem unendlich Kleinen vorgetragen; Wir haben ihn nur etwas deutlicher zu machen geſucht, ſo, wie man heutzutag die Deutlichkeit in den mathematiſchen Schriften verlanget, oder zu verlangen gewohnt iſt; er iſt von den meiſten übergangen worden, weil ſie glaubten, der Ausdruck quantitas quavis data minor ſeye vorhin klar; Allein man muß in der Mathematik keinen Satz annehmen, deſſen Möglichkeit nicht vorher bewieſen iſt. Herr Prof. Käſtner iſt, ſo viel wir wiſſen, der einige, der dieſen I. Satz aus dem X. Elem. des Euclides ſeinem mathematiſchen Leſebuch eingerückt hat. Er ſetzt hinzu: „Dieſer Satz iſt der wahre Grund der „Schlüſſe, die man jetzo durch Ausdrückungen des unendlich „Kleinen abzukürzen pflegt. Analys. finit. §. 47. S. 28. III. Th. „der mathem. Anfangsgr.„

§. 201. Zuſatz. Jeder eigentliche Bruch, deſſen Zehler = 1, iſt alſo kleiner als $\frac{1}{2}$, wenn er nicht ſelbſt $\frac{1}{2}$ iſt; und alle Potenzen von $\frac{1}{2}$ ſind kleiner als $\frac{1}{2}$.

§. 202. Anmerk. Zu einiger Uebung für die Anfänger wollen wir einige Exempel von berechneten Potenzen hie anführen; und zwar

I. Die Multiplication der Potenzen;

$$x^3 \cdot x^n = x^{3+n};\; x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{10}+\frac{4}{10}}$$

$$= x^{\frac{9}{10}} = \sqrt[10]{x^9};\; x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{n}{m}} = x^{\frac{1}{2}+\frac{n}{m}} = x^{\frac{m+2n}{2m}}$$

$$= \sqrt[2m]{x^{m+2n}};\; x^{-\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = x^{-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}} = x^{\frac{-3}{12}+\frac{4}{12}}$$

$$= x^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{x};\; x^{\frac{r}{s}} \cdot x^{\frac{-m}{n}} = x^{\frac{rn}{sn}-\frac{ms}{sn}} = x^{\frac{rn-ms}{sn}}$$

$$= \sqrt[sn]{x^{rn-ms}};\; x^n \cdot x = x^{n+1}\;\; x^m \cdot x^3 = x^{m+3}.$$

II. Die

II. Die Diviſion der Potenzen;

$y^{\frac{3}{4}} : y^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = y^{\frac{6}{8}-\frac{4}{8}} = y^{\frac{2}{8}} = \sqrt[2]{y^{2}}$

oder $\sqrt{y^{2}}$.

Ferner $y^{n} : y = y^{n-1}$; $y^{r} : y^{6} = y^{r-6}$; $y^{\frac{1}{2}} : y^{-\frac{2}{3}}$
$= y^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = y^{\frac{3}{6}+\frac{4}{6}} = y^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{y^{7}} = y\sqrt[6]{y}$.

III. Die Elevation zu Potenzen.

z^{3} zur 4 Pot. $= z^{3\cdot4} = z^{12}$; $z^{\frac{1}{3}}$ zur 5 $= z^{\frac{1}{3}\cdot5} = z^{\frac{5}{3}}$
$= \sqrt[3]{z^{5}}$; $z^{-\frac{1}{2}}$ zur Pot. 6 $= z^{-\frac{1}{2}\cdot6} = z^{-\frac{6}{2}}$
$= \sqrt[2]{z^{-6}} = \sqrt{\frac{1}{z^{6}}}$; $z^{-\frac{1}{n}}$ zur Pot. $\frac{r}{s} = z^{-\frac{1}{n}\cdot\frac{r}{s}}$
$= z^{-\frac{r}{ns}} = \sqrt[ns]{z^{-r}} = \sqrt[ns]{\frac{1}{z^{r}}}$.

IV. Die Ausziehung der Wurzeln;

$\sqrt[3]{x^{9}} = x^{\frac{9}{3}}$, [illegible] $\sqrt{x^{\frac{1}{5}}} = \sqrt{x^{-5}} = x^{-\frac{5}{2}}$; $\sqrt[n]{x^{\frac{r}{s}}}$
$= \sqrt[n+r]{x^{-\frac{r}{s}}} = x^{-\frac{r}{s}:n+r} = x^{-\frac{r}{s}:\frac{n+r}{1}} = x^{-\frac{r}{s}\cdot\frac{1}{n+s}}$
$= x^{\frac{-r}{ns+rs}} = \sqrt[ns+rs]{x^{-r}} = \sqrt[ns+rs]{\frac{1}{x^{r}}}$.

V. Mit zuſammen geſetzten Potenzen.

$x^{2}y^{3} \cdot x^{4}y^{\frac{1}{2}} = x^{2+4}y^{3+\frac{1}{2}} = x^{6}y^{\frac{6+1}{2}} = x^{6}y^{\frac{7}{2}}$
$= x^{6}\sqrt{y^{7}}$; $z^{3}y : z^{4}y^{2} = z^{3-4}y^{1-2} = z^{-1}y^{-1}$
$= \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{y} = \frac{1}{zy}$; $a^{2}z^{4}$ elevirt zur nten Potenz; $= a^{2n}z^{4n}$;
$\sqrt[3]{ax^{2}} = a^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{a^{3}b^{2}} = a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{3}{4}}b^{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[n]{y^{r}y^{-m}}$
$= x^{\frac{r}{n}}y^{-\frac{m}{n}} = x^{\frac{r}{n}}\sqrt[n]{y^{\frac{1}{m}}}$. Wenn

Wenn man ſich in dergleichen Formeln nicht fleißig übt, ſo iſt es einem ſchwer, mathematiſche Schriften zu leſen; dann dieſe Regeln werden in den Werken der Kenner vorausgeſetzt.

Die Irrationalwurzeln und eingebildete oder unmögliche Gröſſen.

§. 203. Erklär. Eine Irrationalwurzel iſt diejenige, die ſich nicht genau angeben oder ausziehen läßt; z. E. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{9}$ u. ſ. w.

§. 204. Anmerk. Der Nahme Irrational hängt von dem lat. Wort ab, das Rechnen bedeutet, nicht aber von dem, das im Deutſchen Vernunft heiſſet; eine irrationale Gröſſe iſt alſo nach der wörtlichen oder lexicographiſchen Bedeutung diejenige, die nicht ausgerechnet werden kann, wenn man auch ohne Ende immer fort rechnete und die Wurzel auszöge. So kann man $\sqrt{2}$, wenn man viele 1000 Jahr an einem fortrechnete, niemalen genau und ohne einigen Fehler finden. nach §. 173.

§. 205. Zuſatz. Wenn die Zahl hinter dem Wurzelzeichen ſich in ſolche Factores zerfällen läßt, davon einer die Potenz iſt, deren Wurzel man verlangt, ſo kann man die Irrationalzahl zum Theil von ihrer Irrationalität befreyen. z. E. $\sqrt{18} = \sqrt{9.2} = 3\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{40} = \sqrt[3]{8.5} = 2\sqrt[3]{5}$.

§. 206. Zuſatz. Irrationalgröſſen, wenn ſie nicht ganz irrational ſind, können alſo eine endliche oder rationale Verhältniß haben. z. E. $3\sqrt{2} : 6\sqrt{2} = 3 : 6$.

§. 207. Lehrſatz. Wenn das Quadrat einer Irrationalzahl rational iſt, ſo ſind alle gerade Potenzen rational und alle ungerade irrational. Man ſetzt voraus, daß eine gerade ganze Zahl diejenige ſeye, die ſich durch zwey genau und ſo dividiren laſſe, daß ſie aufgeht; welches Anfängern, ja Kindern be-

bekannt iſt; wenn nun n eine ganze Zahl iſt, ſo iſt 2n jedesmal eine gerade ganze Zahl; und 2n + 1 eine ungerade Zahl. Man ſetze nun die Wurzel = $\sqrt{a}$, ſo iſt ihr Quadrat = a, eine rationale ganze Zahl, wie im Lehrſatz angenommen wurde. Es iſt dahero der Beweis für beede Fälle folgender:

I. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{(a)^{2n}} = a^{\frac{1}{2} \cdot 2n}$

$a^{\frac{1}{2} 2n} = a^{n}$

$\sqrt{(a)^{2n}} = a^{n}$ Rational.

II. $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{a^{(2n+1)}} = a^{\frac{1}{2}(2n+1)}$

$a^{\frac{1}{2}(2n+1)} = a^{n+\frac{1}{2}}$

$a^{n+\frac{1}{2}} = a^{n}\sqrt{a}$

$\sqrt{(a)^{(2n+1)}} = a^{n}\sqrt{a}$ Irrational.

§. 208. Erklär. Eingebildete Wurzeln (Radices imaginariæ) ſind alle Wurzeln von negativen Gröſſen, die gerade Exponenten haben. z. E. $\sqrt{-4}$ oder $-4^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[4]{-8}$ oder $-8^{\frac{1}{4}}$.

§. 209. Zuſatz. Weil gleiche Factores, die in gerader Anzahl ſtehen, nemlich je zween und zween, vier und vier, ſechs und ſechs u. ſ. w. jedesmal ein poſitives Product geben, die Factores mögen poſitiv oder negativ ſeyn, (dann $-x . -x = +x^2$, wie $+x . +x = +x^2$) ſo iſt die Wurzel eines geraden Exponenten aus einer negativen Gröſſe etwas unmögliches; man kann alſo die eingebildete Wurzeln füglich unmögliche Wurzeln heiſſen.

§. 210. Anmerk. Z. E. $\sqrt{-9}$ iſt eine unmögliche Wurzel; dann entweder iſt ſie + 3 oder − 3; iſt ſie + 3, ſo iſt ihr Product oder Quadrat = + 9; iſt ſie − 3, ſo iſt abermal ihr Product oder Quadrat $-3 . -3 = +9$. Zwiſchen + 3 und − 3 gibt es aber kein drittes; das iſt der Grund, warum man ſolche Wurzeln auch unmögliche Wurzeln nennet.

§. 211. Zuſatz. Die Wurzel eines ungeraden Exponenten aus einer negativen Gröſſe iſt alſo nicht unmöglich. z. Ex. $\sqrt[3]{-8} = -2$. weil $-2 . -2 = +4$ und $+4 . -2 = -8$. folglich $\sqrt[3]{-8} = -2$ eine mögliche Gröſſe.

§. 212. Lehrſatz. Man kann alle eingebildete oder unmögliche Wurzeln als Quadratwurzeln anſehen, die entweder aus möglichen negativen Gröſſen oder aus unmöglichen gezogen werden. Dann der allgemeinſte Ausdruck für alle eingebildete oder unmögliche Wurzeln iſt, wenn n, wie oben §. 207. eine ganze poſitive Zahl bedeutet, $\sqrt[2n]{-x}$. Da nun

$$\sqrt[2n]{-x} = -x^{\frac{1}{2n}}$$
$$-x^{\frac{1}{2}n} = -x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}}$$
$$-x^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}} = \sqrt{(-x)^{\frac{2}{n}}}$$
$$\sqrt{(-x)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt{(\sqrt[n]{-x})}$$

ſo iſt $\sqrt[2n]{-x} = \sqrt{(\sqrt[n]{-x})}$ die Quadratwurzel aus einer möglichen negativen oder unmöglichen Gröſſe.

§. 213. Anmerk. Wir werden im folgenden weiter unten zeigen, daß eine gerade poſitive Potenz allemal zwo entgegengeſetzte gleiche mögliche Wurzeln habe; wie z. Ex. $\sqrt{16} = -4$ und $= +4$; weil $-4 . -4 = 16$, und $+4 . +4 = 16$; ferner, daß eine jede Potenz von einem ungeraden Exponenten nur eine mögliche Wurzel habe; und weiter, daß eine Potenz, ihr Exponent mag gerade oder ungerade ſeyn, ſo viel theils mögliche theils unmögliche Wurzeln habe, als der Exponent Einheiten hat; z. E. x^3 hat drey Wurzeln, eine mögliche und zwo unmög-

mögliche; x^{12} hat zwölf Wurzeln, zwo mögliche und zehen unmögliche; Endlich daß die unmögliche Wurzeln allemal paarweiß vorhanden, das iſt, wo eine auch die zweyte, wo drey auch die vierte, wo fünf auch die ſechste u. ſ. w. ſeyn müſſe; oder daß die unmögliche Wurzeln niemalen in ungerader Anzahl vorhanden ſeyn können. Oder allgemein, weil $2n$ der gerade Exponent und $2n+1$ der ungerade Exponent iſt, ſo hat man im erſten Fall $2n-2$ in dieſem $2n$ unmögliche Wurzeln. Die ganze Lehre kommt unter dem Titel von den Gleichungen vor.

Der binomiſche Lehrſatz.

§. 214. Erklär. Weil eine jede Gröſſe aus zween Theilen beſteht, und alſo eine jede Potenz, wenn der Exponent m heißt, durch $(a+b)^m$ ausgedruckt werden kann, ſo verſteht man unter dem binomiſchen Lehrſatz nichts anders, als die Art und Weiſe, wie man für jede Potenz die Coefficienten auch auſſer der Ordnung finden und angeben könne, und in ſoferne gehört er unter die Erfindungen der Neuern.

§. 215. Anmerk. Der Urſprung des Nahmens iſt, wie wir ſchon gemeldt, die zweytheiligte Wurzel, welche halb griechiſch und halb lateiniſch binomium heißt; dahero der Lehrſatz ſelbſt Theorema binomiale genannt wird; dem Newton zu Ehren, den man insgemein für den Erfinder davon hält, wird es auch Theorema Newtonianum genannt; Andere wollen den Paſcal zum erſten Erfinder davon angeben, beſonders Joh. Bernoulli, der dieſes bekräftiget; Opp. T. IV. p. 173. Es iſt nemlich die Rede von den Beſtimmungen, die wir oben vorgetragen haben. Dann ſonſten hat man ſchon in ältern Zeiten was davon gewußt, daß nemlich die Coefficienten durch Addition der figurirten Zahlen entſtehen, wie zu dem Ende die Tabula mirifica bekannt iſt, auch Clavius ſchon vor bald 200 Jahren in Geom. pract. L. VI. Prop. 9. davon geſchrieben, und ich in meinen erſten Gründen aller mathematiſchen Wiſſenſch. §. 115. dieſe Art, wie die Alten ſich ausdruckten, angeführt habe. Die allgemeine Formeln und Ausdrücke waren den Alten nicht bekannt. Auch Paſcal ſelbſt, wenn er ſie erfunden, oder nach ihm Newton, haben bey den Formeln keinen allgemeinen Beweis gegeben, ſondern den Satz

durch eine Induction vorgetragen. Er läßt ſich aber aus der Differentialrechnung unumſtößlich beweiſen, wie ſolches zuerſt der Herr Prof. Euler bewieſen, Inſt. Calc. Diff. P. II. §. 72. nachgehends habe ich, da ich zu Berlin bloß um dieſes berühmten Gelehrten willen, deſſen Unterricht ich nutzen wollte, mich aufhielte, aus meinen zu Berlin geſammelten und zuſammengeſchriebenen Anmerkungen den Beweis in einem franzöſiſchen Brief an ihn 1753. Lettre ſur quelques paradoxes du Calcul, gerade ſo vorgetragen, wie ihn Herr Prof. Käſtner 1758 in Theorem binom. univerſaliter demonſtrato und in den Anfangsgründen der Analyſis des Unendlichen, welche der IV. Th. ſ. Mathematik ſind §. 46. ausgeführet hat. Da Herr Prof. Käſtner die Gründe der Differentialrechnung überzeugender als andere vorgetragen, ſo iſt ſein Beweis dadurch noch vollſtändiger geworden; die Urſache, warum man zum richtigen Beweis die Differentialrechnung nöthig hat, iſt dieſe, weil die Exponenten negativ ſeyn können; denn wenn ſie poſitiv ſind, ſo kann man den Beweis ohne die Beyhülfe dieſer Rechnung geben, wie Herr Prof. Käſtner 1745 ſchon in demonſtr. Theor. binom. gezeigt hat; die Bedenklichkeiten aber, wenn negative Exponenten vorhanden ſind, ſtehen in ſ. Mathem. T. III. §. 752. womit man auch Herrn Clairaut Algebr. IV. T. Art. 54. und Herrn von Segner Analyſ. finitorum §. 264. vergleichen kann.

§. 216. Lehrſatz. Wenn man den Cubus einer zweytheiligen Wurzel mit der Wurzel multiplicirt, ſo bekommt man die vierte Potenz, und wenn man dieſe wieder mit der Wurzel multiplicirt, die fünfte u. ſ. w. da dann die Potenzen vom erſten Theil der Wurzel oder von a immer in natürlicher Ordnung der Zahlzeichen ab, die von b aber in eben ſolcher Ordnung zunehmen, und die Coefficienten oder Unzen, wie man ſie ſonſt heißt, das iſt, die Zahlen, in welche das Product aus den Theilen der Wurzeln jedesmal multiplicirt iſt, die Quotienten ſind aus den Producten der vorhergehenden Exponenten von dem erſten Theil der Wurzel oder a, dividirt durch die Producte der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen 1. 2. 3. u. ſ. w. nach der An-

zahl

zahl der Glieder, wie ſolches der Augenſchein durch eine Induction in folgender Tabelle erweißt, in welcher die Glieder bis auf die ſiebende Potenz ſteigen.

$1a$	$1b$						
$1a^2$	$2ab$	$1b^2$					
$1a^3$	$3a^2b$	$3ab^2$	$1b^3$				
$1a^4$	$4a^3b$	$6a^2b^2$	$4ab^3$	$1b^4$			
$1a^5$	$5a^4b$	$10a^3b^2$	$10a^2b^3$	$5ab^4$	$1b^5$		
$1a^6$	$6a^5b$	$15a^4b^2$	$20a^3b^3$	$15a^2b^4$	$6ab^5$	$1b^6$	
$1a^7$	$7a^6b$	$21a^5b^2$	$35a^4b^3$	$35a^3b^4$	$21a^2b^5$	$7ab^6$	$1b^7$

§. 217. Zuſatz. Wenn man alſo zwo Reyhen Glieder untereinander ſchreibt, daß die Exponenten der einen eben ſo abnehmen, wie die Exponenten der andern zunehmen, ſo werden die Producte der Potenzen ſelbſt die Glieder der Potenz des Binomii, ohne die Coefficienten, geben;

$$\begin{array}{cccccc} a^5 & a^4 & a^3 & a^2 & a & 1 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 & b^5 \\ \hline a^5 & a^4b & a^3b^2 & a^2b^3, & ab^4 & b^5 \end{array}$$

§. 218. Zuſatz. Wenn man für den Exponenten von a ſetzet m, ſo hat man a^m, $a^{m-1}b$, $a^{m-2}b^2$, $a^{m-3}b^3$ u. ſ. w.

§. 219. Zuſatz. Die Coefficienten findet man, wenn man die Producte von den vorhergehenden Exponenten durch die Producte der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlen dividirt; dann die Coef-

ficienten ſind 5, 10, 10, 5, ſie kommen aber heraus durch die ſchon gemeldte Diviſion der Producten, dann

$$\frac{5}{1} = 5$$
$$\frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = \frac{20}{2} = 10$$
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{60}{6} = 10$$
$$\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{120}{24} = 5$$

oder allgemeiner, wenn $5 = m$, ſo ſind die Coefficienten $\frac{m}{1}$, $\frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}$, $\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}$, $\frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4}$ u. ſ. w.

§. 220. Zuſatz. Der allgemeine Ausdruck für eine Potenz iſt alſo $a^m + ma^{m-1}b + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2} a^{m-2}b^2 + \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} a^{m-3}b^3 + \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2 \,.\, m-3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4} a^{m-4}b^4$ u. ſ. w.

§. 221. Zuſatz. Weil $a^{m-1} = \frac{a^m}{a}$, nach §. 183. ſo kann die Reyhe, wenn man Gleiches für Gleiches ſetzt, auch folgendermaſſen ausgedruckt werden:

$$a^m + \frac{ma^mb}{1 \,.\, a} + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}\frac{a^mb^2}{a^2} + \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\frac{a^mb^3}{a^3}$$ u. ſ. w.

§. 222. Zuſatz. Wenn man den Ausdruck $\frac{b}{a}$, der in allen Gliedern, auſſer dem erſten, vorkommt, ſetzet $=Q$ und das erſte Glied $a=P$, ſo heißt die Reyhe:

$$P^m + \frac{m}{1}P^mQ + \frac{m \,.\, m-1}{1 \,.\, 2}P^mQ^2 + \frac{m \,.\, m-1 \,.\, m-2}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}P^mQ^3$$ u. ſ. w.

§. 223.

§. 223. Zuſatz. Weil das erſte Glied im zweyten, das zweyte im dritten, das dritte im vierten u. ſ. w. enthalten iſt, ſo nenne man, um das viele Schreiben zu vermeiden, das erſte Glied A, das zweyte B, das dritte C, das vierte D u. ſ. w. die Reyhe heißt alsdann, wenn man den übrigen Factor des vorhergehenden Glieds jedesmal beyſetzt, $P^m + mAQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \frac{m-3}{4}DQ$ u. ſ. w.

Dann nach §. 222. iſt $\frac{m}{1}P^mQ = \frac{m}{1}Q.P^m$, da nun P^m das unmittelbar vorhergehende Glied iſt, und gleich A geſetzt wurde, ſo iſt $\frac{m}{1}Q.P^m = \frac{m}{1}Q.A$ $= \frac{m}{1}AQ$ und weil $\frac{m.m-1}{1.2}.P^mQ^2 = \frac{m}{1}P^mQ.$ $\frac{m-1}{2}Q$; $\frac{m}{1}P^mQ$ aber das unmittelbar vorhergehende Glied war, das man B nennet, ſo iſt $\frac{m.m-1}{1.2}.P^mQ^2 = B.\frac{m-1}{2}Q = \frac{m-1}{2}BQ$ u. ſ. f.

§. 224. Zuſatz. Nach dieſer letzten, oder auch nach der erſten Formel kann man daher leicht alle Potenzen finden und alle Wurzeln ausziehen, wenn man nur bemerkt, daß im letztern Fall m ein Bruch ſeye, z. E. $\sqrt[4]{x^{10}} = x^{\frac{10}{4}}$, da dann $m = \frac{10}{4}$ iſt.

§. 225. Zuſatz. Wenn man in der Reyhe §. 220. $a = 1$ ſetzt, ſo hat man $(1+b)^m = 1 + mb + \frac{m.m-1}{1.2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}b^3$ --- und wenn $b = e$, $(1+e)^m = 1 + me + \frac{m.m-1}{1.2}e^2$ - - - -.

§. 226. Zuſatz. Man dividire $(a+b)^m$ durch a, ſo hat man $\left(\frac{a+b}{a}\right)^m = \left(1+\frac{b}{a}\right)^m$, dieſen Ausdruck multiplicire man wieder mit a, ſo hat man $\left(a.\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^m = a^m.\left(1+\frac{b}{a}\right)^m$ nach §. 186. dahero wird die Reyhe $1+me+\frac{m.m-1}{1.2}e^2 - - -$ die erſte wieder geben, wenn man $e=\frac{b}{a}$ ſetzt, und jedes Glied der Reyhe mit a^m multiplicirt; da dann $(a+b)^m$ wieder herauskommt, und durch dieſe Subſtitution eine Reyhe in die andere kann verwandelt werden.

§. 227. Zuſatz. Wenn der Exponent um eines vermehrt oder $m = m+1$ geſetzt wird, ſo ſind die Coefficienten $\frac{m+1}{1}$, $\frac{m+1.m}{1.2}$, $\frac{(m+1).m.m-1}{1.2.3}$ u. ſ. w. und die Reyhe iſt

$$a^{m+1} + \frac{m+1}{1}a^m b + \frac{m+1.m}{1.2}a^{m-1}b^2 + \frac{m+1.m.m-1}{1.2.3}a^{m-2}b^3.$$

§. 228. Anmerk. Den Beweis für den binomiſchen Lehrſatz, wie man ihn nach aller Schärfe verlangen kann, habe ich in meinen erſten Gründen aller mathematiſchen Wiſſenſchaften, die 1759. herauskamen, aus der Lehre der Differentialrechnung vorgetragen und erläutert, P I. Cap. V. §. 110. und im folgenden ſoll noch was davon vorkommen.

Die höchſte Unterſchiede oder Differenzen der Potenzen und die Natur der geraden und ungeraden Zahlen.

§. 229. Lehrſatz. Alle gerade Zahlen laſſen ſich durch 2n, die ungerade aber durch 2n + 1 oder

2n—1

$2n - 1$ ausdrucken; dann weil eine gerade Zahl ſich durch Zwey muß ganz dividiren laſſen, ſo iſt $2n$ der allgemeine Ausdruck für ſie; und weil 1 durch 2 dividirt, allemal einen Bruch $= \frac{1}{2}$ gibt, ſo iſt $2n - 1$ oder $2n + 1$ der ſchicklichſte Ausdruck für alle ungerade Zahlen.

§. 230. Zuſatz. Die Summe zwoer geraden Zahlen iſt gerade; denn $2n + 2n = 4n = 2 . 2n$; auch iſt die Summe zweyer ungeraden Zahlen gerade; denn $2n + 1, + 2m + 1 = 2n + 2m + 2$, oder $2n - 1, + 2m + 1 = 2n + 2m$ gerade.

§. 231. Zuſatz. Die Summe einer geraden und ungeraden Zahl iſt ungerad; dann $2n + 2m + 1$ oder auch $2n + 2m - 1$ iſt ungerad.

§. 232. Zuſatz. Das Product zwoer geraden und auch einer ungeraden durch eine gerade iſt gerad; denn $(2n - 1) . 2n = 4n^2 - 2n$; aber das Product zweyer ungeraden Zahlen iſt ungerad, denn $(2n - 1) . (2n + 1) = 4n^2 - 1$, ſo auch $(2n + 1) (2m + 1) = 4nm + 2m + 2n + 1$.

§. 233. Zuſatz. Wenn $n = 0$, ſo iſt die erſte ungerade Zahl $= 1$, dann $2 . 0 + 1 = 1$, wenn $n = 1$ ſo iſt die andere ungerade Zahl $= 3$. Dann $2n + 1 = 2 . 1 + 1 = 3$; wenn $n = 2$ ſo iſt die dritte ungerade Zahl 5; denn $2 . 2 + 1 = 5$ u. ſ. w.

§. 234. Zuſ. Wenn man alle ungerade Zahlen nach den natürlichen Reyhen addirt, ſo findet man alle mögliche Quadrate; dann

1 =	1 =	1^2
$1+3$	4	2^2
$1+3+5$	9	3^2
$1+3+5+7$	16	4^2
$1+3+5+7+9$	25	5^2 u. ſ. w.

§. 235. Lehrſatz. Wenn zwo Wurzeln um eins unterſchieden ſind, wie n und $n+1$, ſo ſind ihre Quadrate n^2 und n^2+2n+1, und der Unterſchied ihrer Quadrate iſt $2n+1$, (weil $n^2+2n+1-n^2=2n+1$) wenn man nun in dieſem Unterſchied wieder ſetzt $n=n+1$, ſo hat man $2(n+1)+1$, oder $2n+2+1$. Der obige erſte Unterſchied von dieſem zweyten abgezogen, läßt $2n+2+1-(2n+1)=-2$, der letzte Unterſchied, der unverändert bleibt. Und wenn man die Cubiczahlen eben ſo behandelt, daß m und $m+1$ zwo Wurzeln ſind, ſo ſind die Cubi m^3 und m^3+3m^2+3m+1 ihr Unterſchied oder Differenz $=3m^2+3m+1$; nun werde aus m wieder $m+1$, deſſen Wehrt in der Differenz ſubſtituirt gibt $3(m+1)^2+3(m+1)+1=3m^2+9m+7$, die obige erſte Differenz davon abgezogen, läßt $6m+6$; die zweyte Differenz; nun werde aus m zum drittenmal $m+1$, ſo wird, wenn man im zweyten Unterſchied ſubſtituirt, aus $6m+6$ werden $6(m+1)+6=6m+6+6=6m+12$; von dieſem den zweyten Unterſcheid $6m+6$ ſubtrahirt, läßt 6, den dritten und letzten Unterſchied, der abermal beſtändig iſt. Oder allgemein, wenn x^m geſetzt wird, und aus x wird $x+e$, ſo hat man $(x+e)^m-x^m$; oder nach §. 216. wirklich erhoben, x^m+mex^{m-1}

+m.

$+\frac{m.m-1.}{1.2}e^2x^{m-2}\ldots\ldots - x^m = mex^{m-1}$ - - - -, der erſte Unterſchied, deſſen höchſtes Glied $= mex^{m-1}$. Nun werde aus x abermal x+e, ſo bekommt man den zweyten Unterſchied deſſen höchſtes Glied $(m.m-1)e^2x^{m-2}$ u. ſ. w. bis man endlich auf den mten Unterſchied kommt, der beſtändig und der kleinſte iſt.

§. 236. Zuſatz. In den Quadraten ſind die zweyte Unterſchiede beſtändig, in den Cubis die dritte, in den Biquadraten die vierte u. ſ. w.

§. 237. Anmerk. Wir wollen die Sache mit einem Exempel erläutern; man ſetze folgende Zahlen:

Die Quadr. Wurzel.						Die Cubicwurzel		
II. Diff.	I. Diff.	1	1	III. Diff.	II. Diff.	I. Diff.	Cubi. 1	1
	3	4	2			7	8	2
2	5	9	3		12	19	27	3
2	7	16	4	6	18	37	64	4
2	9	25	5	6	24	61	125	5
2	11	36	6	6	30	91	216	6
2	13	49	7	6	36	127	343	7
				6	42	169	512	8

§. 238. Anmerk. Dieſe Lehre hat viele Vortheile in Erfindung verſchiedener Aufgaben; Herr Prof. Kies hat ohnelängſt in einer gelehrten akademiſchen Diſſertation, unter dem Titel: Dilucidationes analyſeos Finitorum Kaſtnerianæ 1762. die Probe davon gegeben, und überhaupt das was ſchwer ſcheint, darinn erläutert. Hier aber würde es zu weitläuftig ſeyn, eine weitere Anwendung zu machen; es iſt genug, wenn man den Satz verſtehet; die Uebung wird hernach manchem Anleitung geben, aus den dritten, vierten, fünften Unterſchieden u. ſ. w. die Zahlen zu finden, wenn er im Rechnen ſelbſt ſich umgeſehen hat.

Die Combinationen.

§. 239. Lehrſatz. Eine gegebene Anzahl von Dingen, z. E. Buchſtaben, Wörtern, Perſonen, läßt ſich ſo oft verſetzen, als das aus allen in natürlicher

licher Ordnung bis auf die gegebene Zahl fortgehenden Zahlzeichen entſtehende Product Einheiten hat; wenn z. E. die Zahl 6 gegeben iſt, ſo laſſen ſich ſechs Buchſtaben 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1 verſetzen, oder wenn die Anzahl = n, ſo gibt es n . n — 1 . n — 2 . n — 3 . n — 4 . n — 5 u. ſ. w. Verſetzungen. Denn wenn man zuerſt zween Buchſtaben nimmt, a und b, ſo gibt es nur zwo Verſetzungen ab, und ba, das iſt 1 . 2 Combinationen. Nimmt man den dritten Buchſtaben c dazu, ſo kann er dreymal mit ab nemlich vornen, mitten und hinten verbunden werden, und eben ſo vielmal mit ba, folglich gibt es ſechs, oder 3 . 2 . 1 Verſetzungen.

I.	cab	I.	cba
	acb		bca
	abc		bac.

Der vierte Buchſtab d ſolle dazu kommen; dieſer läßt ſich viermal mit einem der hingeſetzten Sechſe verbinden, nemlich vornen, in der zweyten und in der dritten Stelle und hinten.

I.	II.	III.	IV.	V.	VI.
dcab	dacb	dabc	dcba	dbca	dbac
cdab	adcb	adbc	cdba	bdca	bdac
cadb	acdb	abdc	cbda	bcda	badc
cabd	acbd	abcd	cbad	bcad	bacd

Folglich ſind die Verbindungen 4 . 6 oder 24, das iſt 4 . 3 . 2 . 1; auf eine ähnliche Weiſe erhellet, daß fünf Buchſtaben ſich 5 . 4 . 3 . 2 . 1 und alſo allgemein, n Buchſtaben, wenn keiner doppelt geſetzt wird, n . n — 1 . n — 2 . n — 3 . n — 4 u. ſ. w. combiniren laſſen.

§. 240.

§. 240. Zuſatz. Wenn man bey einer gewiſſen Zahl aufhöret, und fragt, wie vielmal n Zahlen nach der Zahl m, ſo daß allemal, ohne auf die Ordnung zu ſehen, m Einheiten davon zuſammen kommen, verbinden laſſen, ſo muß man mit dem Product der natürlichen Zahlzeichen bis auf m die obere Zahl dividiren, das iſt, die Combination wird $= \frac{n.n-1.n-2.n-m.-n-4 - - -}{1.2.3.4.5.---m}$. Dann a, b, c, d ſollen ſo combinirt werden, daß allemal 3 zuſammen kommen, ſo gibt es nur vier Verbindungen; abc, abd, acd, bcd, wenn man, wie vorausgeſetzt wird, auf die Ordnung der Buchſtaben nicht ſieht; das iſt $\frac{4.3.2.1}{3.2.1} = 4$.

§. 241. Zuſatz. Wenn ein Buchſtabe doppelt geſetzt wird, oder zweymal vorkommt, ſo muß man das obige Product mit 2 . 1 dividiren, kommt er dreymal in einerley Combination vor, ſo dividirt man mit 3 . 2 . 1 und mit 4 . 3 . 2 . 1 wenn er viermal vorkommt, u. ſ. w. Dann wenn a allein gegeben iſt, ſo gibt es den einigen Ausdruck aa, kommt b dazu, ſo gibt es drey baa, aba, aab; kommt c dazu, ſo wird es mit einem jeden der drey nach §. 239. viermal verbunden; alſo in allem kommen heraus 12 Verſetzungen $= \frac{4.3.2.1}{2.1} = \frac{24}{2} = 12$.

§. 242. Zuſatz. Kommen von zwey oder auch von drey Buchſtaben u. ſ. w. je zween und zween zuſammen, ſo gehen die Combinationen nach den Quadraten dieſer gegebenen Anzahl; z. E. a und b geben aa bb / ab ba vier Verſetzungen. a, b, c geben neun,

aa,

aa, bb, cc
ab ba ca. Vier geben auf eine ähnliche Weiſe
ac bc cb
16, u. ſ. w. Folglich laſſen ſich die neun arabiſche Zahlzeichen 9^2 mal, das iſt, 81 mal combiniren.

§. 243. Zuſatz. Sind es ihrer drey, davon eine jede dreymal vorkommt, ſo gehts nach Cubiczahlen, und gibt 27 Verſetzungen; ſind es vier, und kommt jede dreymal vor, ſo gibt es $4^3 = 64$ Verſetzungen; und ſo oft laſſen ſich die Zeichen der Modorum in den Syllogiſmis A, E, I, O verſetzen.

§. 244. Anmerk. Man kann aus dieſen Regeln verſchiedene Aufgaben auflöſen; z. E. wie oft kann man mit 12 Perſonen an einer Tafel abwechſeln? Die Antwort iſt nach §. 239. 12 . 11 . 10 . 9 . 8 . 7 . 6 . 5 . 4 . 3 . 2 . 1. Alſo viel Millionen mal; wenn man ſie auch alle Tag zweymal zu Gaſte lådet, ſo wird keiner die Verånderungen auswarten, bis er wieder in ſeinen alten Platz kommt, ſollte er auch noch ſo alt werden. Eben ſo nach dem folgenden Zuſatz §. 240. kann man beſtimmen, wie oft man 24 Buchſtaben ſo combiniren könne, daß z. E. jedesmal 6 zuſammen kommen; nemlich $\frac{24.23.22.21.20.19}{1.2.3.4.5.6.} = \frac{23.22.21.4.19}{2.3} = \frac{23.22.21.2.19}{3} = 23.22.7.2.19$ oder $23.22.19.14$, wenn man nemlich oben und unten aufhebt was ſich aufheben låßt. Ferner wie oft man aus vierzig Blåttern neun nehmen könne, ſo daß man nie einerley bekomme; $\frac{40.39.38.37.36.35.34.33.32}{1.2.3.4.5.6.7.8.9} = 37.32.19.17.13.11.5 = 273438880$; oder wie oft man aus 38 könne 7 nehmen, nemlich $\frac{38.37.36.35.34.33.32}{1.2.3.4.5.6.7} = 38.37.34.33.8 = 13148076$; welches bey Glücksſpielen, wo man die Fålle vergleicht, wenn man in gegenwårtiger Rechnung nur die Millionen nimmt, eine Verhåltniß wie 13 : 273, oder ungefehr wie 1 : 21 gibt; da dann unter 21 Fållen nur einer iſt, wo man eine Hoffnung hat, was zu gewinnen, geſetzt, daß von 40 nur 2 recht gute ſind. Herr Kåſtner hat es auf die Spiele, auf die Modos der Syllogiſmorum u. ſ. w. angewendet. Man kann es aber auch auf unſere arabiſche Zahlzei-

chen nach der doppelten Verbindung §. 242. anwenden, da ſich leicht ergibt, daß neun Zeichen, davon jedes zweymal vorkommt, in der combinatione binaria nur 9 . 9 oder 81 mal können verbunden werden.

§. 245. Anmerk. Man kann hieher noch die figurirte Zahlen rechnen, welche man am beſten aus folgender Tabell verſteht.

△

1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Wenn man die ſchiefe Parallelreyhen zehlt, ſo enthält die erſte lauter Einheiten, die IIte die Summe dieſer Einheiten, alſo die in natürlicher Ordnung fortgehende Zahlzeichen, die III. die Summe der erſten Glieder der vorigen Reyhe, oder natürlichen Zahlen; dann $3=2+1$, $6=3+2+1$, $10=4+3+2+1$ u. ſ. w. und dieſe Reyhe Zahlen 1, 3, 6, 10 heißt man Triangularzahlen; die vierte enthält die Summe der Glieder der Triangularzahlen, dann $4=3+1$, $10=6+3+1$ u. ſ. w. Dieſe heißt man Quadrangularzahlen; u. ſ. w. Liest man aber die Horizontalreyhen der vorgeſetzten Zahlen, ſo hat man die Coefficienten der Potenzen einer zweytheiligen Wurzel. z. E. 1, 2, 1 ſind die Coefficienten von $(a+b)^2$, 1, 3, 3, 1 die Coefficienten von $(a+b)^3$, 1, 4, 6, 4, 1 die Coefficienten von $(a+b)^4$, 1, 5, 10, 10, 5, 1 die Coefficienten von $(a+b)^5$ u. ſ. w. Das haben die Alten gewußt, welche dieſe Tabelle eine Tabulam mirificam genannt; wie dann auch daraus erhellt, warum dieſe Zahlen figurirte Zahlen heiſſen.

§. 246. Anmerk. Die Alten haben noch allerhand Eigenſchaften der Zahlen gefunden; z. E. die Primzahlen, (numeri primi,) die keine Factores haben, auſſer die Einheit und die gegebene Zahl ſelbſt, wenn man ſie anders Diviſores heiſſen will; ſolche Primzahlen ſind 2, 3, 5, 7, 11 u. ſ. w. Ferner iſt die Rede von vollkommenen Zahlen, deren ſchon Euclides gedenkt, (numeri perfecti;) ſolche Zahlen werden durch die Summe und das Product ihrer Factorum gemeſſen; die erſte vollkommene Zahl iſt 6, weil $1.2.3=6$, und $1+2+3=6$. Die nächſte iſt 28, weil 1, 2, 4 = 7 und $4.7=28$; dieſe Zahlen aber ſind

die Diviſores von 28; die dritte iſt 496, dann 1, 2, 4, 8 16 = 31 und 31 . 16 = 496 u. ſ. f. Man hat bis auf die Trillionen nicht mehr als 8 vollkommene Zahlen heraus gebracht. Was die Proniczahlen betrift, ſo ſind ſie die Summe der Quadrate und Wurzeln; das iſt, wenn man zu einem Quadrat ſeine Wurzel addirt, ſo hat man die Proniczahl. 4 + 2 = 6 iſt eine Proniczahl, 9 + 3 = 12 eine Proniczahl; oder allgemein $n^2 + n$ eine Proniczahl; weil nun $n^2 + n = (n + 1)n$, ſo wird das Product zweyer unmittelbar auf einander folgenden Zahlen allemal eine Proniczahl ſeyn: z. E. 2.3, 3.4, 4.5, 5.6, 6.7, 7.8 u. ſ. w. ſind Proniczahlen.

Von den Proportionen.

§. 247. Erklär. Die Vergleichung zwoer Zahlen entweder durch die Subtraction oder durch die Diviſion heißt in jenem Fall eine arithmetiſche in dieſem eine geometriſche Verhältniß; und die Gleichheit zwoer Verhältniſſe heißt eine Proportion. z. E. 3 — 1 = 2, und 5 — 3 = 2; das ſind zwo arithmetiſche Verhältniſſe, deren Differenz beederſeits = 2; folglich gibt dieſe Gleichheit eine arithmetiſche Proportion 3 — 1 = 5 — 3; ferner 6 : 2 und 15 : 5 ſind zwo geometriſche Verhältniſſe, deren Quotient beederſeits 3; dieſe Gleichheit gibt nun eine geometriſche Proportion, 6 : 2 = 15 : 5.

§. 248. Zuſatz. Weil das Zeichen der Diviſion : und der Subtraction — und der Gleichheit =, ſo iſt die Art ſolcher Proportionen, wie ſie Leibnitz ſchreiben lehret, ganz natürlich 6 : 3 = 15 : 5 und 3 — 1 = 5 — 3.

§. 249. Anmerk. Sonſt ſchreibt man auch die geometriſche Proportionen 6 . 2 :: 15 . 5, beſonders in den Schriften der Engländer.

§. 250. Anmerk. Die Alten haben nur geometriſche Verhältniſſe betrachtet, dahero, wenn kein Beynahme bey dem Wort Verhältniß und Proportion geſetzt iſt, ſo verſteht man allemal die geometriſche Proportionen darunter.

§. 251. Zuſatz. Es iſt gleichgültig, ob das kleinere Glied vor oder nachgeſetzt wird, dann wie 6:2 = 15:5, ſo iſt auch 2:6 = 5:15.

§. 252. Erklär. Man heißt nemlich die Theile einer Proportion Glieder; und weil ſie eine Gleichheit zwoer Verhältniſſe iſt, ſo hat ſie vier Glieder; das erſte, das zweyte, das dritte, das vierte Glied.

§. 253. Erklär. Wann das zweyte und dritte Glied einander gleich iſt, ſo heißt die Proportion continuirlich, ſtetig, zuſammenhangend; proportio continua; iſt aber das dritte vom zweyten unterſchieden, ſo heißt die Proportion diſcret, abgeſondert, proportio diſcreta. z. Ex. 2:6 = 6:12 iſt eine continuirliche geometriſche, 2 — 3 = 3 — 4 eine continuirliche arithmetiſche Proportion, und 2:6 = 5:15 eine diſcrete geometriſche, 4—2 = 8 — 6 eine diſcrete arithmetiſche Proportion.

Von den arithmetiſchen Proportionen und Reyhen.

§. 254. Lehrſatz. Weil die arithmetiſche Proportion aus zwo gleichen arithmetiſchen Verhältniſſen beſteht, die folglich einerley Differenz haben, ſo darf man nur in einer diſcreten Proportion zum erſten und zum dritten Glied die Differenz addiren, wenn man das zweyte und vierte verlangt; in einer continuirlichen Prop. oder auch Reyhe wird die Differenz zum erſten Glied ſo vielmal addirt, als es die Anzahl der verſchiedenen Glieder erfordert. Wenn nun das erſte Glied a, das dritte b, und die Differenz

d heißt, ſo iſt $a - (a+d) = b - (b+d)$ der allgemeine Ausdruck einer diſcreten arithmetiſchen Proportion; wie es $a - a + d = a + d - a + 2d$ von einer continuirlichen arithmetiſchen Proportion iſt.

§. 255. Zuſatz. Die Summe des erſten und vierten Glieds iſt der Summe des zweyten und dritten Glieds in einer arithm. diſcreten Proportion gleich. Dann man addire $a - (a+d) = b - (b+d)$ ſo hat man beederſeits gleiche Summen,

$$\begin{array}{rr} b+d & b \\ \hline a+b+d = & a+d+b. \end{array}$$

§. 256. Zuſatz. Man kann alſo das vierte Glied finden, wenn man von der Summe der beeden mittlern das erſte abzieht.

§. 257. Zuſatz. In einer continuirlichen Proportion iſt die Summe der beyden äuſſerſten Glieder dem zweyfach genommenen mittleren Glied gleich.

$$\begin{array}{rr} a - a+d = & a+d - a+2d \\ a+2d & a+d \\ \hline 2a+2\,2d & = 2a+2d. \end{array}$$

§. 258. Zuſatz. Man kann alſo das mittlere Glied finden, wenn man die Summe der beeden äuſſerſten halbirt oder mit 2 dividirt.

§. 259. Anmerk. Man kann die Sache mit Exempeln erläutern; $2 - 5 = 4 - 7 = 2 - 2 + 3 = 4 - 4 + 3$. Hier iſt die Differenz 3; alſo $d = 3$, und das erſte Glied oder $a = 2$, das vierte oder $b = 4$. Wenn man nun das erſte und vierte addirt, ſo hat man $2 + 7 = 9$, und das zweyte und dritte, ſo hat man $5 + 4 = 9$. beederſeits einerley Summe; geſetzt nun man wollte das vierte finden, ſo iſt, wenn man von der Summe des zweyten und dritten das erſte Glied ſubtrahirt, $(5+4) - 2 = 9 - 2 = 7$. Eben ſo wenn continuirlich iſt $2 - 5 = 5 - 8$, ſo iſt die Differenz oder $d = 3$, das erſte Glied oder $a = 2$, folglich

$$\begin{array}{l} 2 - 2+3 = 2+3 - 2+2.3 \\ 2 - 5 = 5 - 8 \end{array}$$

Man

Man bekommt alſo das mittlere Glied, wenn man die Summe von den beeden äuſſerſten halbirt, da $\frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$. Der Beweis iſt aus dem obigen klar, und hat nicht die mindeſte Schwürigkeit.

§. 260. **Erklärung.** Eine Menge Zahlen, die in continuirlichen oder zuſammenhängenden arithmetiſchen Verhältniſſen immer fortgehen, machen eine arithmetiſche Reyhe oder Progreſſion aus; ſo iſt die Reyhe der natürlichen Zahlzeichen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 u. ſ. w. eine arithmetiſche Progreſſion, deren Differenz immer einerley, nemlich 1 iſt.

§. 261. **Lehrſatz.** Die Summen der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Gliedern in einer arithmetiſchen Progreſſion ſind allemal einander gleich. Dann es ſey die Reyhe

1	2	3	4	5	6	7
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	$a+5d$,	$a+6d$
			$a+3d$	$a+2d$	$a+d$	a
			$2a+6d$	$2a+6d$	$2a+6d$	$2a+6d$

ſo iſt die Summe des erſten und ſiebenden, des zweyten und ſechsten, des dritten und fünften, und des vierten zweyfaches einerley Summe.

§. 262. **Zuſatz.** Wenn die Zahl der Glieder ungerad iſt, ſo iſt das mittelſte vom erſten und letzten gleichweit entfernt, folglich wird ſein zweyfaches der Summe der beeden äuſſerſten gleich ſeyn.

§. 263. **Lehrſatz.** Das letzte Glied iſt allemal die Summe des erſten, und der in die um eins verminderte Anzahl der Glieder multiplicirten Differenz gleich; denn wenn n die Anzahl der Glieder iſt, ſo iſt

$$\overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \overset{4}{a+3d},\ \overset{5}{a+4d}\ ---\ \overset{n}{a+(n-1)d}$$

Die Differenz des dritten Gliedes iſt $2d = (3-1)d$, die vom vierten $3d = (4-1)d$, die vom fünften $4d = (5-1)d$, alſo jedesmal um eins weniger, folglich die vom letzten oder nten Glied $(n-1)d$, und das letzte Glied ſelbſt $a + (n-1)d$.

§. 264. Zuſatz. Wenn die Glieder ſteigen, ſo iſt d poſitiv, fallen ſie, ſo iſt d negativ.

§. 265. Lehrſatz. Man kann die Summe einer arithmetiſchen Progreſſion finden, wenn man die Summe des erſten und letzten Glieds mit der halben Anzahl der Glieder multiplicirt. Dann

$$\text{weil}\quad \overset{1}{a},\ \overset{2}{a+d},\ \overset{3}{a+2d},\ \begin{array}{c}\overset{4}{a+3d},\\ \underline{a+2d}\\ 2a+5d\end{array}\ \begin{array}{cc}\overset{5}{a+4d}, & \overset{6}{a+5d}\\ \underline{a+d} & \underline{a}\\ 2a+5d, & 2a+5d\end{array}$$

durch die Addirung der äuſſerſten und von den äuſſerſten gleichweit abſtehenden Glieder halb ſo viel gleiche Paare gibt, als Glieder vorhanden ſind, ſo darf man dieſe gleiche Paare nur zuſammen addiren, um die ganze Summe zu bekommen.

$$\begin{array}{ll}\text{Dann} & 2a + 5d\\ & 2a + 5d\\ & \underline{2a + 5d}\\ \text{gibt} & 6a + 15d.\end{array}$$

Diß aber bekommt man, wenn man die Summe des erſten und letzten Glieds durch die halbe Anzahl der Glieder multiplicirt, dann $6a + 15d = (2a + 5d)\frac{6}{2}$.

§. 266. Zuſatz. Nach dem allgemeinen Ausdruck, wenn n die Zahl der Glieder iſt, wird

als

alsdann das letzte Glied heiſſen $a + (n - 1)d$, die Summe $= (2a + (n - 1)d)\frac{1}{2}n$.

§. 267. Zuſatz. Man hat alſo die Differenz, das erſte Glied, das letzte Glied, die Anzahl der Glieder, und die Summe der Glieder; wenn nun von dieſen fünf Dingen drey gegeben ſind, ſo kann man allemal die zwey übrige finden. z. E. Aus dem erſten Glied, der Anzahl der Glieder und der Differenz, die Summe; dann wenn die obige Stücke d, a, u, n und S heiſſen, ſo iſt $S = (a + u)\frac{1}{2}n$, die Anzahl der Glieder mag gerade oder ungerade ſeyn. 2) $u = a + (n - 1)d$. 3) $n = \frac{2S}{a+u}$. 4) $d = \frac{u-a}{n-1}$ 5) $a = u - (n - 1)d$. Man ſiehet auch zugleich, daß man aus jeder Vergleichung noch mehrere Wehrte herausbringen könne.

§. 268. Anmerk. Die Summe aller natürlichen Zahlzeichen von 1 bis 100, iſt alſo $(1 + 100)\frac{1}{2}100 = 101 . 50 = 5050$. Eben ſo die von 1 bis 1000000 iſt $= (1000000 + 1) . \frac{1000000}{2} = 500000500000$. Weil ferner alle ungerade Zahlen um 2 von einander unterſchieden ſind, z. E. 1, 3, 5, 7 u. ſ. w. ſo iſt von n ungeraden Zahlen das letzte Glied oder $u = 1 + (n - 1)2 = 1 + 2n - 2 = 2n - 1$, folglich $S = (1 + 2n - 1)\frac{1}{2}n = (2n)\frac{1}{2}n = \frac{2n^2}{2} = n^2$: Die Summe der erſten hundert ungeraden Zahlen iſt alſo $100 . 100 = 10000$, und die hundertſte ungerade Zahl $= 200 - 1 = 199$.

Die geometriſche Proportionen.

§. 269. Erklär. Die Gleichheit zwoer geometriſchen Verhältniſſe iſt eine geometriſche Proportion; wenn das zweyte Glied mit dem dritten einerley iſt, ſo heißt ſie zuſammenhangend (continua);

tinua); ſind beede Glieder aber verſchieden, ſo iſt ſie diſcret; (diſcreta). Das erſte und dritte, wie auch das zweyte und vierte Glied nennt man gleichnahmige oder gleichliegende Glieder (homologa).

§. 270. Lehrſatz. Der allgemeine Ausdruck für alle geometriſche Proportionen iſt $a : ma = b : mb$; oder wenn ſie zuſammenhangend iſt, $a : ma = ma : m^2a$; wo *m* das vielſache bedeutet. Dann *a* iſt in *ma* ſo vielmal enthalten als *b* in *mb*, oder als ma in mma; das iſt aber die Erklärung der geometriſchen Proportionen, daß das erſte Glied im zweyten ſo oft, als das dritte im vierten oder umgekehrt enthalten ſeye; folglich zeigt der gegebene Ausdruck alle nur mögliche geometriſche Proportionen an.

§. 271. Zuſatz. Das Product der beeden äuſſerſten und mittlern Glieder in einer geometriſchen Proportion iſt einander gleich; dann $a . mb = ma . b$; oder $amb = mab$; und wenn die Producte gleich ſind, ſo iſt die Proportion geometriſch.

§. 272. Zuſatz. Wenn man das Product der zwey mittlern mit dem erſten dividirt, ſo findet man das vierte Glied, und kraft der erlaubten Verſetzung, da ein jedes Glied zum vierten werden kann, aus drey gegebenen Stücken allemal das vierte. Dann $\frac{amb}{a} = mb$, und $\frac{amb}{mb} = a$, und $\frac{amb}{am} = b$, und $\frac{amb}{b} = am$.

§. 273. Zuſatz. Weil in einer zuſammenhangenden Proportion die beede mittlere Glieder einander gleich ſind, ſo iſt das Product des mittlern

in

in ſich ſelbſt, das iſt, ſein Quadrat dem Product der beeden äuſſerſten gleich; man findet alſo das mittlere Glied, wenn man aus dem Product der beeden äuſſerſten Glieder die Quadratwurzel auszieħet.

§. 274. Zuſatz. In einer ſtetigen Proportion kann man dahero aus zwey gegebenen Gliedern ſchon das dritte finden, es mag das mittlere oder eines der äuſſerſten geſucht werden.

§. 275. Lehrſatz. Die geometriſche Proportionen laſſen ſich theils durch die Verſetzung der Glieder, theils durch die Addition, Subtraction, Multiplication, Diviſion, Erhebung zu Potenzen und Ausziehung der Wurzel verändern, ſo daß jedesmal eine wahre geometriſche Proportion wieder herauskommt, welche man daran erkennet, weil die Producte der äuſſerſten und mittlern Glieder immer gleich ſind, oder weil das erſte Glied im zweyten ſo oft als das dritte im vierten enthalten iſt.

§. 276. Erläuter. Folgende Exempel, welchen der allgemeine Beweis jedesmal in Buchſtaben beygeſetzt iſt, werden die Sache deutlich machen. Es ſey die Hauptproportion, die verändert werden ſolle

$a : ma = b : mb \qquad 2 : 6 = 4 : 12$

ſo iſt I. Permutando vel Viciſſim oder die mittlere verwechſelt.

$a : b = ma : mb \qquad 2 : 4 : 6 : 12$

II. Invertendo oder umgekehrt.

$ma : a = mb : b \qquad 6 : 2 = 12 : 4$

$mb : b = ma : a. \qquad 12 : 4 = 6 : 2$

III. Componendo oder zuſammengeſetzt:

$$\begin{cases} a : ma + a = b : mb + b \\ a + ma : a = b + mb : b \\ a + ma : ma = b + mb : mb \\ a + b : b = ma + mb : mb \end{cases} \quad \begin{matrix} 6 : 2 + 6 = 12 : 4 + 12 = \\ 6 + 2 : 6 = 12 + 4 : 12 = \\ 6 + 2 : 2 = 12 + 4 : 4 \\ 6 + 12 : 12 = 2 + 4 : 4 \end{matrix} \quad \begin{cases} 6 : 8 = 12 : 16. \\ 8 : 6 = 16 : 12 \\ 8 : 2 = 16 : 4 \\ 18 : 12 = 6 : 4. \end{cases}$$

IV. Subtrahendo vel differentiando oder durch die Subtraction.

$a : a - ma = b : b - mb$

$a - ma : ma = b - mb : mb \qquad 6 : 6 - 2 = 12 : 12 - 4 \quad \begin{cases} 6 : 4 = 12 : 8 \\ 4 : 2 = 8 : 4 \end{cases}$

$a - b : b = ma - mb : mb. \qquad 6 - 2 : 2 = 12 - 4 . 4$

V. Multiplicando & dividendo, wenn man eine oder beede Verhältniſſe mit einer dritten Zahl multiplicirt oder dividirt.

$$\begin{cases} ac : mac = b : mb \\ ac : mac = bd : mbd \\ ac : mac = bc : mbc \end{cases} \quad \begin{matrix} 6.3 : 2.3 = 12 : 4 \\ 6.3 : 2.3 = 12.2 : 4.2 = \\ 6.3 : 2.3 = 12.3 : 4.3 \end{matrix} \begin{cases} 18 : 6 = 12 : 4 \\ 18 : 6 = 24 : 8 \\ 18 : 6 = 36 : 12 \end{cases}$$

Ferner:

$$\begin{cases} \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = b : mb \\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{d} : \frac{mb}{d} \\ \frac{a}{c} : \frac{ma}{c} = \frac{b}{c} : \frac{mb}{c} \end{cases} \quad \begin{matrix} \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = 12 : 4 \\ \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{3} : \frac{4}{3} = \\ \frac{6}{2} : \frac{2}{2} = \frac{12}{2} : \frac{4}{2} \end{matrix} \begin{cases} 3 : 1 = 12 : 4 \\ 3 : 1 = 4 : \frac{4}{3} \\ 3 : 1 = 6 : 2 \end{cases}$$

VI. Durch Erhebung zu Potenzen, da man alle vier Glieder zu einerley Potenz erhebt:

$$\begin{matrix} a^2 : m^2a^2 = b^2 : m^2b^2 & 6^2 : 2^2 = 12^2 : 4^2 \\ a^n : m^na^n = b^n : m^nb^n & 6.6 : 2.2 = 12.12 : 4.4 \end{matrix} \Big\} 36 : 4 = 144 : 16$$

nicht aber

$$a^2 : m^2a^2 = b : mb$$

oder $a^2 : m^2a^2 = b^3 : m^3b^3$ Weil hier nicht einerley Producte beym Multipliciren der äuſſerſten und mittlern Glieder herauskommen; dann a^2mb iſt dem Product m^2a^2b nicht gleich; ſo auch $a^2 . m^3b^3$ iſt was ganz anders als $m^2a^2b^3$.

VII. Durch Ausziehung der Wurzeln, wo man aus allen vier Gliedern einerley Wurzel extrahirt.

$$\sqrt{a^2} : \sqrt{m^2a^2} = \sqrt{b^2} : \sqrt{m^2b^2}$$

$$\sqrt[n]{a^n} : \sqrt[n]{m^na^n} = \sqrt[n]{b^n} : \sqrt[n]{m^nb^n}$$

$\sqrt{36} : \sqrt{4} = \sqrt{144} : \sqrt{16}$ das iſt
$6 : 2 = 12 : 4$ die erſte Proportion wieder.

§. 277. Lehrſatz. Wenn zwo Proportionen mit einander ſo übereinkommen, daß zwo Verhältniſſen davon einer und eben derſelben dritten Ver-

Verhältniß gleich ſind, ſo kommt auf eine dreyfache Weiſe die dritte Proportion heraus. Dann I. entweder ſind die zwey erſte paar Glieder, oder welches nach dem vorigen Lehrſatz von den Verſetzungen gleichviel iſt, die zwey letzte paar Glieder einander gleich; II. oder es iſt das erſte und dritte, oder zweyte und vierte paar Glieder, oder auch nach den Verſetzungen das erſte in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der einen dem vierten in der andern Proportion gleich; III. oder endlich iſt das erſte und letzte paar oder das zweyte und dritte paar Glieder, oder das erſte paar in der einen dem zweyten in der andern, und das dritte in der andern dem vierten in der erſten Proportion gleich. Im erſten Fall ſchließt man ex æquo, überhaupt; im zweyten ordinatim; im dritten perturbate.

§. 278. Erläuter. Die folgende Exempel, die man ſich wohl bekannt machen muß, werden das geſagte erläutern, wo der Beweis in Buchſtaben dabey ſteht.

I. Fall: ex æquo Simpliciter.

$$\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ a : ma = c : mc \\ \hline b : mb = c : mc \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4 : 8 = 3 : 6 \\ 4 : 8 = 5 : 10 \\ \hline 3 : 6 = 5 : 10 \end{array}$$

II. Ordinatim ex æquo.

1)

$$\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ mna : ma = mnb : mb \\ \hline a : mna = b : mnb. \end{array} \qquad \begin{array}{l} 4 : 12 = 2 : 6 \\ 10 : 12 = 5 : 6 \\ \hline 4 : 10 = 2 : 5 \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{l} a : ma = b : mb \\ ma : mna = mb : mnb \\ \hline a : mna = b : mnb. \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 : 15 = 2 : 6 \\ 15 : 30 = 6 : 12 \\ \hline 5 : 30 = 2 : 12 \end{array}$$

III. Perturbate ex æquo;

1) $a : ma = b : mb$ — $4 : 2 = 12 : 6$

$mna : ma = b : \frac{b}{n}$ — $8 : 2 = 12 : 3$

$a : mna = \frac{b}{n} : mb.$ — $4 : 8 = 3 : 6.$

2) $a : ma = b : mb$ — $4 : 2 = 12 : 6$

$ma : mna = \frac{b}{n} : b$ — $2 : 8 = 3 : 12$

$a : mna = \frac{b}{n} : mb.$ — $4 : 8 = 3 : 6.$

§. 279. Lehrſ. Wenn man ganz verſchiedene geometriſche Proportionen mit einander multiplicirt oder dividirt, ſo kommen wiederum geometriſche Proportionen heraus, worinnen nur immer gleichnahmigte Glieder bey den vier Rechnungsarten verbunden werden.

Es ſey gegeben $a : ma = b : mb$ — $5 : 10 = 2 : 4$

$c : nc = g : ng$ — $3 : 6 = 4 : 8$

I. Multipl. $ac : mnac = bg : mnbg$ — $15 : 60 = 8 : 32.$

II. Dividirt $\frac{a}{c} : \frac{ma}{nc} = \frac{b}{g} : \frac{mb}{ng}$ — $\frac{5}{3} : \frac{10}{6} = \frac{2}{4} : \frac{4}{8}$

§. 280. Zuſatz. Wenn die Proportionen einerley Verhältniß haben, ſo wird noch eine Proportion herauskommen, wenn man die gleichnahmige Glieder addirt oder ſubtrahirt; dann

$a : ma = b : mb$

$c : mc = d : md$ gibt

$a + c : m(a + c) = b + d : m(b + d)$

$2 : 4 = 3 : 6$

$5 : 10 = 1 : 2$

$7 : 14 = 4 : 8.$

iſt

iſt aber die Verhältniß verſchieden, ſo geht die Addition und Subtraction nicht an; die Multiplication und Diviſion hingegen iſt in allen Fällen richtig.

§. 281. Zuſatz. Wenn bey Proportionen, die in einander multiplicirt werden, zwey nicht homologe Glieder gleich ſind, ſo verhält ſich das Product des erſten Paars Glieder zum Product des andern Paars, wie das dritte Glied der erſten zum vierten Glied der andern Proportion.

Es ſeye

$$\begin{array}{l} T : t = E : v \\ C : c = v : e \\ \hline CT : tc = Ev : ev \\ \qquad\qquad\qquad\qquad : v \\ CT : tc = E : e. \end{array}$$

ſo iſt

§. 282. Anmerk. Geſetzt nun E und e bedeuten Wirkungen, C und c Urſachen, T und t Zeiten, in welchen die Wirkungen hervorgebracht werden, ſo werden ſich die Wirkungen wie die Producte aus den Zeiten in die Urſachen verhalten: dann wenn die Zeiten gleich ſind, ſo verhalten ſich die Wirkungen wie die Urſachen; und wenn die Urſachen gleich ſind, wie die Zeiten.

§. 283. Zuſatz. Wenn drey oder mehrere Proportionen ein ſo gemeinſchaftliches Glied haben, ſo werden die Producte aller erſten Glieder zu den Producten aller zweyten Glieder ſich verhalten wie das dritte Glied der erſten Proportion zum vierten der letzten Proportion.

$$\begin{array}{l} a : b = g : h \\ c : d = h : q \\ e : f = q : r \\ \hline ace : bdf = ghq : hqr \\ \qquad\qquad\qquad\qquad : hq \\ \hline ace : bdf = g : r. \end{array}$$

§. 284. Anmerk. Dieſe Proportion heißt man ſonſten die Kettenregel, wie die unmittelbar vorhergehende die Regel Quinque. Sie dienen, beſonders die Kettenregel, dazu, daß man einen Begriff von den zuſammengeſetzten Verhältniſſen bekomme, z. E. 3 iſt in 12 viermal und 12 in 60 fünfmal enthalten; folglich iſt die Verhältniß von 3 zu 60 aus der Verhältniß von 3 zu 12 und 12 zu 60 zuſammengeſetzt, das iſt, 3 ſteckt in 60 viermal fünfmal oder zwanzigmal. Das bisher vorgetragene muß man ſich vorzüglich bekannt machen, weil die Lehre von den Proportionen, wie wir ſchon gemeldt, die Seele der ganzen Mathematik iſt.

Von den geometriſchen Progreßionen oder Reyhen.

§. 285. Erklär. Eine geometriſche Reyhe oder Progreßion iſt eine Menge von Zahlen oder Gröſſen überhaupt, die in einer zuſammenhangenden geometriſchen Proportion (Prop. continua) fortgehen. Diejenige Gröſſe oder Zahl, welche anzeigt, wie vielmal das unmittelbar vorhergehende Glied im nachfolgenden enthalten ſeye, heißt der Exponent, oder auch der Nahme der Verhältniß.

§. 286. Lehrſatz. Der allgemeine Ausdruck einer geometriſchen Progreßion, wenn man das erſte Glied = a, den Exponenten = m und die Zahl der Glieder = n ſetzet, wird folgender ſeyn, wenn man von dem letzten Glied anfängt und rückwarts ſchreibt:

$m^{n-1}a$, $m^{n-2}a$, $m^{n-3}a$, $m^{n-4}a$, $m^{n-5}a$ u. ſ. w.

Dann man zehle die Glieder und ſchreibe vorwarts

1	2	3	4	5	6	
a	ma	m^2a	m^3a	m^4c	m^5a	u. ſ. w.

ſo iſt der Exponent des gegebenen Gliedes allemal um eins weniger als die Zahl des Gliedes; z. E. die

Pro-

Progreßion gehe mit dem ſechsten Glied aus; dieſes Glied heißt $m^5 a$, nun iſt $m^5 a = m^{6-1} a$, und wenn die Anzahl der Glieder nemlich $6 = n$ geſetzt wird, ſo iſt $m^5 a = m^{6-1} a = m^{n-1} a$; das uneins letzte Glied heißt alſo $m^{n-2} a$, u. ſ. f. dahero der gegebene Ausdruck allgemein iſt.

§. 287. Zuſatz Das letzte Glied in einer geometriſchen Progreßion iſt alſo jedesmal $m^{n-1} a$; und wenn man dieſes letzte Glied u nennet, ſo iſt $mu = m^n a$, dann

$m^{n-1} a = u$ nach dem angenommenen Satz.
$m^{n-1} a = \frac{m^n a}{m}$ nach §. 183.

$$u = \frac{m^n a}{m}$$

$$\cdot m$$

$$mu = m^n a$$

§. 288. Lehrſatz. Die Summe einer geometriſchen Proportion iſt jedesmal $\frac{a - mu}{1 - m}$, wo a das erſte Glied, m den Exponenten und u das letzte Glied bedeutet.

Beweis.

$$\frac{1}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \cdot \text{-----} + \frac{m^n}{1-m} \text{ nach §. 157.}$$

$$\frac{m^n}{1-m} = \frac{m^n}{1-m} \quad \text{ſubtrah.}$$

$$\frac{1}{1-m} - \frac{m^n}{1-m} = 1 + m + m^2 + m^3 \text{ ----}$$ das iſt, weil die Nenner gleich, nach §. 155.

1 —

$$\frac{1 - m^n}{1 - m} = 1 + m + m^2 + m^3 \ldots$$

$$\overline{} \cdot a$$

$$\frac{a - m^n a}{1 - m} = a + ma + m^2 a + m^3 a \ldots$$

$m^n a = mu$ nach §. 287 ſubſtituirt

$$\frac{a - mu}{1 - m} = a + ma + m^2 a + m^3 a \ldots$$

§. 289. Zuſatz. Wenn die Progreßion abnimmt oder fällt, das iſt, wenn die folgende Glieder immer kleiner werden, ſo iſt m ein eigentlicher Bruch, folglich Zehler und Nenner poſitiv; wenn ſie aber ſteigt, oder die nachfolgende Glieder immer gröſſer werden, ſo iſt m ein uneigentlicher Bruch, folglich Zehler und Nenner negativ; der Quotient aber dennoch poſitiv. nach §. 151.

§. 290. Zuſatz. Aus dem erſten und zweyten Glied, oder aus dem erſten Glied und dem Exponenten kann man alle folgende Glieder durch die Regel §. 274. die man ſonſt die Regel de Tri heißt, finden.

§. 291. Zuſatz. Wenn die Summe = S, das erſte Glied = a, das letzte = u, der Exponent = m, und die Zahl der Glieder = n geſetzt werden, ſo kann man nach dieſen fünf Benennungen fünf Aufgaben auflöſen, da man aus drey gegebenen Stücken von dieſen fünf allemal die zwey übrige findet; einige davon werden logarithmiſch aufgelößt; davon im folgenden gehandelt wird.

§. 292. Zuſatz. Wenn das zweyte Glied = b, ſo iſt der Exponent = $\frac{b}{a}$; dann im allgemeinen

nen Ausdruck iſt das zweyte Glied ma, folglich hier

$$\frac{ma = b}{m = \frac{b}{a}} : a$$

man kann alſo den Exponenten finden und wegſchaffen.

§. 293. Zuſatz. Wenn das erſte Glied nicht eins, ſo darf man nur alle Glieder durch das erſte Glied dividiren; man wird alsdann eine Reyhe bekommen die einerley Verhältniß mit der vorigen hat.

$a, ma, m^2a, m^3a,$ -- oder	7, 14, 28, 56, 112
$1\ m\ m^2\ m^3,$	1, 2, 4, 8, 16.

Die Reyhe 1, 2, 4, 8 u. ſ. w. hat eben die Verhältniß, welche 7, 14, 28, 56 hat; dahero man in Anſehung der Verhältniß alle Reyhen auf ſolche reduciren kann, deren erſtes Glied 1.

§. 294. Zuſatz. Wenn das erſte Glied 1, das zweyte m, ſo enthält die Reyhe lauter Potenzen vom m oder vom zweyten Glied.

§. 295. Zuſatz. In einer geometriſchen Reyhe ſind die Producte der äuſſerſten und von der äuſſerſten gleichweit abſtehenden Glieder gleich, z. E. 1, 2, 4, 8, 16, 31. wo $1 . 32 = 2 . 16 = 4 . 8.$ nach §. 271. 273.

§. 296. Lehrſatz. Wenn man die Summe einer geometriſchen Progreßion von Brüchen, deren Zehler 1 iſt, S, und den Nenner des erſten Bruchs a nennt, ſo iſt $S = \frac{1}{a-1}$, wenn die Zeichen nicht abwechſeln; hingegen $S = \frac{1}{a+1}$, wenn die Zeichen plus und minus abwechſeln.

Bew.

Bew. I. Fall.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}\cdots = S \qquad \cdot a$$

$$1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\cdots = aS$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\cdots = S \quad \text{ſubt.}$$

$$1 = aS - S \quad \text{das iſt}$$

$$1 = (a-1)S \qquad : a-1$$

$$\frac{1}{a-1} = S.$$

Bew. II. Fall.

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}\cdots = S \qquad \cdot a$$

$$1-\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}\cdots = aS$$

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}\cdots = S \quad \text{add.}$$

$$1 = aS + S \quad \text{oder}$$

$$1 = (a+1)S \qquad : a+1$$

$$\frac{1}{a+1} = S.$$

§. 297. **Lehrſatz.** Wenn man das vorhergehende Glied von dem nächſtfolgenden immer abzieht, ſo wird die Progreßion der Differenzen wieder eine geometriſche Progreßion ſeyn, die den vorigen Exponenten hat.

Beweis:

Die Progreßion

iſt $a, ma, m^2a, m^3a, m^4a \cdots m^{n-1}a$,

ihr Unterſchied $ma-a, m^2a-ma, m^3a-m^2a, m^4a-m^3a \cdots$

d. i. nach §. 148. $(m-1)a, m(m-1)a, m^2(m-1)a, m^3(m-1)a \cdots$

alſo wieder eine geometriſche Progreßion von einerley Exponenten.

§. 298. **Zuſatz.** Man kann die zweyte, dritte, vierte Reyhe der Unterſchiede eben ſo finden, da allemal eine ähnliche geometriſche Proportion herauskommen wird. z. E.

Hauptreyhe:	1,	3,	9,	27,	81,	243.
I. Differenzreyhe		2,	6,	18,	54,	162.
II. Differenzreyhe			4,	12,	36,	108.
III. Differenzreyhe				8,	24,	72.
IV. Differenzreyhe					16,	48.

Von

Von den Logarithmen.

§. 299. **Erklär.** Wenn man unter eine geometriſche Progreßion, die mit 1 anfangt, eine arithmetiſche ſchreibet, deren erſtes Glied = 0, ſo enthält die zweyte Reyhe die Logarithme der erſtern Reyhe.

§. 300. **Zuſatz.** Die Möglichkeit dieſer Erklärung iſt an ſich klar; dann beede Gattungen von Progreßionen ſind möglich; folglich auch das, was daraus folget; wir werden aber ſogleich zeigen, daß die Logarithmen nicht anders als auf dieſe Weiſe betrachtet werden können.

§. 301. **Lehrſatz.** Die logarithmiſche Reyhe muß nothwendig mit einer Nulle anfangen, wenn das erſte Glied der geometriſchen Proportion eins iſt; dann die Progreßion ſey $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5$ u. ſ. w. ſo iſt der Exponent von $1 = 0$, weil $1 = a^0$, der von $a = 1$, der von $a^2 = 2$ u. ſ. w. nun ſind dieſe Exponenten die Zahlen der Verhältniſſe, oder die Logarithmen, welche anzeigen, wie vielmal das erſte Glied nach 1 in den folgenden enthalten ſeye; z. E. das vierte Glied enthält a dreymal, alſo iſt ſein Logarithme = 3, das nte Glied enthält das nächſte nach dem erſten $(n - 1)$ mal; folglich muß die logarithmiſche Reyhe mit 0 anfahen, wenn das erſte Glied = 1.

§. 302. **Zuſatz.** Weil alle geometriſche Progreßionen, das erſte Glied mag ſeyn was es will, durch die Diviſion des erſten Glieds, auf eine ſolche gebracht werden können, deren erſtes Glied eins wird nach §. 293.

§. 293. und zwar ſo, daß die Verhältniß unverändert bleibt, ſo kann man die Logarithmen für alle mögliche Progreßionen in ganzen Zahlen gebrauchen.

§. 303. Zuſatz. Und weil eine gebrochene Zahl durch einen negativen Exponenten ausgedruckt wird, ſo kann man auch für die rückwarts fortgeſetzte Reyhe in Brüchen Logarithme finden; dann es ſey

$\frac{1}{a^4}, \frac{1}{a^3}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a}, 1, a, a^2, a^3, a^4$ -- ſo ſind die Logar.

$-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ - -

weil $\frac{1}{a^4} = a^{-4}$, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$, $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$ u. ſ. w. nach §. 180.

§. 304. Anmerk. Man ſiehet aus der Benennung, die die erſte Erfinder der Logarithmen gegeben, daß ſie nach dieſen Begriffen ſich gerichtet haben; dann λογων αριθμος heißt die Zahl der Verhältniſſe.

§. 305. Lehrſatz. Der Logarithme des Products iſt die Summe der Logarithme der Factorum, und der Logarithme des Quotienten iſt die Differenz der Logarithme vom Dividendus und Diviſor. Dann $x^m . x^r = x^{m+r}$, nun iſt m der Logarithme von x^m und r der Logarithme von x^r, alſo iſt die Summe $m + r$ der Exponent, das iſt, der Logarithme des Products; ferner $x^{m+r} : x^r = x^{m+r-r} = x^m$; nun iſt $m + r$ der Logarithme des Dividendus, r der Logarithme des Diviſors, und m der Logarithme des Quotienten; aber m iſt die Differenz der beeden Logarithme $m + r$, und r; folglich werden in der Diviſion die Logarithme des Diviſors vom Logarithmen des Dividendus abgezogen, was übrig bleibt, iſt der Logarithmus des Quotienten.

§. 306. Lehrſatz. Weil die Erhebung zu Potenzen durch eine Multiplication des Exponenten

in

in den gegebenen Grad der Potenz, und die Ausziehung der Wurzel durch eine Diviſion des Exponenten durch den gegebenen Grad der Wurzel geſchiehet, die Logarithme aber die Exponenten ausdrucken, ſo darf man nur im erſten Fall den Logarithmen der Potenz in den gegebenen Grad multipliciren, im letzten Fall aber durch den Logarithmen dividiren.

§. 307. **Exempel.** Es ſey die Reyhe

Geom.	1,	2,	4,	8,	16,	32,	64,	128.
Arithm. oder Logarithm.	0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7.

Man verlangt das Product von 4 . 16, ſo addirt man die Logarithmen, die den Factoren correſpondiren, ſie ſind 2 und 4, die Summe 6, correſpondirt dem Product 64; man verlangt das Product von 8 . 16, ſo addirt man die correſpondirende Logarithmen 3 und 4, der Summe 7 correſpondirt das Product 128; ferner, man verlangt den Quotienten von 8 in 128; der Dividendus iſt 128, der Diviſor 8; des erſten Logarithme 7, des letztern 3; ziehet man nun dieſen vom erſten ab, ſo hat man $7 - 3 = 4$, den Logarithmen des Quotienten, welchem 16 correſpondirt. Wie man die Zahlen, die zwiſchen 2 und 4, 4 und 8, 8 und 16 u. ſ. w. fallen, und ihre correſpondirende Logarithmen ſuchen, und hernach die Rechnung auf alle nur mögliche Fälle anwenden könne, wollen wir ſogleich anführen. Man verlangt die dritte Potenz von 4; der Logarithme von 4 iſt 2, dieſer mit 3 multiplicirt gibt 6; dem correſpondirt die Potenz 64; man verlangt die ſiebende Potenz von 2; der Logarithme von 2 iſt 1, dieſer mit 7 multiplicirt gibt 7, welchem die Potenz 128, als die ſiebende Potenz von 2 correſpondirt; Endlich, man verlangt die Cubicwurzel aus 64: der Logarithme von 64 iſt 6, dieſer durch die Zahl der Wurzel dividirt, gibt den Logarithmen 2, deme die Wurzel 4 correſpondirt; alſo $4 = \sqrt[3]{64}$.

§. 308. **Zuſatz.** Wenn man alſo in der Buchſtabenrechnung den Logarithmen von x^3 geben will, ſo heißt er $3lx$, der von $x^n = nlx$, der von $x^{n+r} = (n+r)lx$; und wenn man die Logarithmen der Wurzel verlangt, ſo iſt z. E. $\sqrt[4]{x^3} = lx^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}lx$,

$\sqrt[n]{x^m} = lx^{\frac{m}{n}} = \frac{m}{n}lx.$; oder bey der Multiplication der Logarithme von $xy = lx + ly$, der von $xyz = lx + ly + lz$; und bey der Diviſion der Logar. von $\frac{x}{z} = lx - lz$, der von $\frac{x}{y^2} = lx - 2ly$.

§. 309. Lehrſatz. Man kann die Logarithmen derjenigen Zahlen, die zwiſchen die Potenzen hineinfallen, durch Näherung ſo finden, daß der Fehler nicht merklich iſt. Dann es ſeyen zwo nächſte Potenzen x^m und x^{m+1}, man ſuche die mittlere Proportionalzahl, die wir p nennen wollen, ſo iſt nach §.273. $p = \sqrt{x^{m+1}x^m} = \sqrt{x^{2m+1}}$ nach §.176. $= x^{\frac{2m+1}{2}}$ nach §. 189. Der Exponent iſt alſo $\frac{2m+1}{2} = m + \frac{1}{2}$ und eben dieſer Exponent iſt auch der Logarithme. Will man zwiſchen dieſem und dem vorigen Glied abermal die mittlere Proportionalzahl ſuchen, ſo iſt ſie $\sqrt{x^{m+1}x^{\frac{2m+1}{2}}} = \sqrt{x^{\frac{2m+1}{2}+m+1}} = \sqrt{x^{\frac{2m+1}{2}+\frac{2m+2}{2}}}$ nach §. 155. $= \sqrt{x^{\frac{4m+3}{2}}} = x^{\frac{4m+3}{2}\cdot\frac{1}{2}} = x^{\frac{4m+3}{4}} = x^{m+\frac{3}{4}}$; der Exponent iſt alſo $m + \frac{3}{4}$, und eben dieſer Exponent iſt auch der Logarithme dieſer mittlern Proportionalzahl. Auf dieſe Weiſe kommt man dem wahren Ausdruck der dazwiſchen liegenden Gliedern immer näher, doch nie ſo nahe, daß gar nichts mehr fehlen ſollte.

§. 310. Willk. Satz. Man hat in den logarithmiſchen Tabellen die geometriſche Reyhe nach der decadiſchen Progreßion

1,	10,	100,	1000,	10000,	100000,	1000000
0,	1,	2,	3,	4,	5,	6,

an=

angenommen, weil ſie die bequemſte iſt; unerachtet man eine jede andere auch hätte annehmen können. Die Logarithme der dazwiſchen fallenden Glieder hat man nach obigen §. 309. mit erſtaunlicher Mühe in Decimalbrüchen berechnet, aber ſo, daß nur die Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, alſo von 1 bis 100000, oder unter hundert tauſend Zahlen nur ſechſe ſich befinden, die genaue und nach mathematiſcher Schärfe richtig übereinſtimmende Logarithmen haben, unerachtet auf dieſen nur beynahe wahren Dingen alle aſtronomiſche Rechnungen, und überhaupt, wo nicht der gröſte, doch der wichtigſte Theil der angewandten Mathematik beruhet. Doch ſind die Fehler, wie wir oben gemeldt, ſo klein, daß ſie ſonſt nirgend, als bey der geometriſchen Genauigkeit, den Nahmen eines Fehlers verdienen würden. Weil die Logarithmen in zehentheiligen Brüchen gefunden werden, ſo beſteht ein jeder aus einer ganzen Zahl oder ſtatt des Zahlzeichens einer 0, und aus Brüchen; das ganze Zahlzeichen heiſt die Characteriſtik; die Zahlen von 1 bis 10 haben die Characteriſtik 0, die von 10 bis 100 die Characteriſtik 1, die von 100 bis 1000 die Characteriſtik 2 u. ſ. w.

§. 311. Anmerk. Der weitere Gebrauch der Logarithmen gehört vornemlich in die Trigonometrie, um deren willen ſie auch zu Anfang des vorigen Jahrhunderts erfunden worden ſind; wir werden dahero die Geſchichte davon in der Lehre von der Trigonometrie erſt vortragen; im folgenden aber hie und da noch manches einflieſſen laſſen, was zur gründlichen Wiſſenſchaft derſelben beſonders aus der höhern Geometrie vorgetragen werden kann; wobey wir auch zeigen werden, warum die Logarithmen in negativen Gröſſen unmögliche Logarithmen oder Gröſſen ſeyen, wie Herr von Leibnitz gegen Hrn Bernouille behauptet hat.

Von den Gleichungen.

§. 312. **Erklär.** Einerley Gröſſe auf verſchiedene Weiſe ausgedrückt, heißt eine **Gleichung**; z. E. $2.7 = 10 + 4$. Die **Glieder** der Gleichung nennt man diejenige Theile, die durch die vier Rechnungsarten und andere Zeichen zuſammen hangen.

§. 313. Zuſatz. Nach den Grundſätzen §. 13. bleibt die Gleichung unverändert, man mag beederſeits Gleiches addiren, ſubtrahiren, mit Gleichem multipliciren oder dividiren, gleiche Potenzen ſetzen oder gleiche Wurzeln ausziehen, die Zeichen beederſeits verändern, oder auch durch die Addition und Subtraction auf einer Seite endlich die Gleichung auf nichts bringen.

§. 314. Anmerk. Dieſe leichte Kunſt läßt ſich am beſten durch Exempel erläutern. Es ſeye

I.
$$\begin{array}{l} 3a - x = b \\ \qquad x = x \text{ add.} \\ \hline 3a = b + x \\ \quad b = b \quad \text{ſubtr.} \\ \hline 3a - b = x. \end{array}$$

II.
$$\begin{array}{l} ax = b \\ \hline \qquad :a \\ x = \frac{b}{a} \end{array}$$

III.
$$\begin{array}{l} \frac{x}{b} = a \\ \hline \qquad .b \\ x = ab \end{array}$$

IV.
$$\begin{array}{l} \sqrt{x} = ab \\ \hline \qquad \text{quadr.} \\ x = a^2b^2 \end{array}$$

V.
$$\begin{array}{l} x^2 = a \\ \hline \qquad \sqrt{\ } \text{ extr.} \\ x = \sqrt{a} \end{array}$$

VI.
$$\begin{array}{l} a^2 - bx = c \\ \qquad\quad c = c \quad \text{ſubtr.} \\ \hline a^2 - bx - c = 0 \end{array}$$

In dieſen ſechs Exempeln ſind nur die gewöhnlichſte Fälle enthalten, die ein jeder Anfänger ſchon verſtehen kann, wenn er nur den 13. §. ſich bekannt gemacht hat. Es gibt aber noch andere Fälle, die nicht ſo leicht ſind, und von denen wir auch im folgenden reden werden. Uebrigens heißt dieſe in der That leichte Kunſt insgemein die Algebra.

§. 315. **Erklär.** Eine einfache Gleichung iſt, in welcher die unbekannte Gröſſe, wie x oder y,

nur

nur in der erſten Potenz oder Dignität ſich findet.

§. 316. Zuſatz. Eine einfache Gleichung iſt alſo leicht aufzulöſen; man nehme das VI. Exempel §. 314.

$$a^2 - bx - c = 0 \; ..$$
$$bx = bx$$
$$a^2 - c = bx \quad :b$$
$$\frac{a^2 - c}{b} = x.$$

ſo iſt, wenn man bx beederſeits addirt, die unbekannte Gröſſe bald gefunden.

Die ganze Kunſt beſteht darinnen, daß man alle bekannte Glieder auf eine Seite ſchaft, damit das unbekannte Glied auf der andern Seite allein bleibe.

§. 317. Zuſatz. Es können in einer einfachen Gleichung auch mehr unbekannte Gröſſen ſich finden, nur darf keine mit der andern multiplicirt werden, weil ſonſt, bey der Auflöſung ſelbſt, Gleichungen herauskommen würden, die nicht mehr einfach ſind.

§. 318. Anmerk. Man ſoll z. E. zwo Zahlen finden, deren Summe und Differenz gegeben iſt, das iſt, wenn die geſuchte Zahlen x und y, ihre Summe a, und ihre Differenz b iſt, ſo iſt $x + y = a$, und $x - y = b$. Nun rechne man nach den Grundſätzen §. 13.

$$x + y = a$$
$$x - y = b$$
addirt
$$2x = a + b \quad :2$$
$$x = \frac{a + b}{2}$$

$$x + y = a$$
$$x - y = b.$$
$$- \; +$$
ſubtrahirt
$$2y = a - b. \quad :2$$
$$y = \frac{a - b}{2}$$

Die gröſſere Zahl x iſt alſo die halbe Summe zur halben Differenz addirt, die kleinere y die halbe Differenz von der halben

Summe ſubtrahirt. Man ſiehet aus dieſen und andern Exempeln zur Genüge, daß man zwar allgemeine Regeln zum Rechnen geben kann, bey der Ausübung aber das meiſte auf den Verſtand und auf den Witz des Rechners ankommt; dahero man neben dem Fleiß natürliche Gaben beſitzen muß, wenn man in der Mathematik, wie in andern Wiſſenſchaften, groß werden will. Das gegebene Exempel könnte auch auf eine andere Weiſe, die aber ungleich langweiliger und verdrießlicher iſt, berechnet werden; wie ſolches in den Wolfiſchen Anfangsgr. der Trigonom. zu ſehen; die hier vorgetragene Rechnung haben Graveſand und Newton gegeben. Das Exempel ſelbſt wählten wir deßwegen, weil es im folgenden, beſonders in der Trigonometrie, genutzet werden ſoll.

Von den quadratiſchen ſowohl reinen als unreinen Gleichungen.

§. 319. **Erklär.** Eine quadratiſche Gleichung iſt, in welcher die unbekannte höchſte Potenz ein Quadrat iſt; Sie iſt rein, wenn die höchſte unbekannte Potenz als ein Quadrat allein vorkommt; z. E. $x^2 = a$, oder $3x^2 = b$, folglich $x^2 = \frac{b}{3}$; hingegen wird ſie unrein, oder (æquatio quadratica affecta ſive impura) genannt, wenn noch eine niedrigere Potenz der unbekannten Gröſſen in der Gleichung vorkommt; z. E. $x^2 + mx = g$, oder $z^2 + z = a$.

§. 320. **Zuſatz.** Weil eine reine quadratiſche Gleichung $x^2 = b$, und $x^2 = +x . +x$ oder $= -x . -x$ ſeyn kann, nach §. 209. ſo iſt $x = +$ oder $- \sqrt{b}$; welches man ausdruckt $x = \pm \sqrt{b}$. Die Erklärung von reinen und unreinen Gleichungen gilt von allen auch höhern Gleichungen; ſo iſt $x^3 - ab = 0$ eine reine cubiſche Gleichung; hingegen $x^3 - ax + b = 0$ eine unreine, oder wie man ſagt, æquatio affecta.

§. 321.

§. 321. Lehrſatz. Eine jede unreine quadratiſche Gleichnng läßt ſich auflöſen, wenn man den Coefficienten der ungleich niedern Potenz halbirt, und das Quadrat dieſer Helfte beederſeits addirt, hernach die Wurzel aus der Gleichung auszieht. Dann entweder hat das Quadrat einen Coefficienten oder nicht; hat es einen, ſo kann man ihn durch die Diviſion wegbringen, hat es aber keinen Coefficienten, ſo iſt die Regel von ſich ſelbſt klar. Dann der allgemeine Ausdruck iſt

I.	II.
$x^2 - mx = g$	$x^2 + mx = g.$
$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$	$\frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2$
add.	add.
$x^2 - mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + g$	$x^2 + mx + \frac{1}{4}m^2 = \frac{1}{4}m^2 + g$
$\sqrt{}$ extr.	$\sqrt{}$ extr.
$x - \frac{1}{2}m = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}$	$x + \frac{1}{2}m = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}$
$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m$ add.	$\frac{1}{2}m = \frac{1}{2}m$ ſubtr.
$x = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}$	$x = -\frac{1}{2}m \pm \sqrt{(\frac{1}{4}m^2 + g)}$

§. 322. Zuſatz. Wenn der Coefficient der nächſt niedern Potenz $= 1$, ſo addirt man beederſeits $\frac{1}{4}$, weil die Helfte von $1 = \frac{1}{2}$, und das Quadrat davon $\frac{1}{4}$, z. E.

$$z^2 - z = b$$
$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

wo bey z der Coefficient 1, ob er ſchon nicht ausgedruckt wird, zu verſtehen iſt.

$$z^2 - z + \frac{1}{4} = b + \frac{1}{4}$$

$\sqrt{}$ extr.

$$z - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{1}{4}} \text{ und}$$
$$z = \frac{1}{2} \pm \sqrt{b + \frac{1}{4}}.$$

§. 323. Zuſatz. Iſt der Coefficient von z oder der einfachen Potenz ein Bruch, ſo verfährt man

wieder nach der Regel; und addirt beederſeits das Quadrat des halbirten Bruchs.

$$z^2 - \tfrac{1}{3}z = a, \text{ nun iſt } \tfrac{1}{3 \cdot 2} = \tfrac{1}{6} \text{ und ſein Quadr. } \tfrac{1}{36}$$

$$\tfrac{1}{36} = \tfrac{1}{36} \quad \text{addirt}$$

$$z^2 - \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{36} = a + \tfrac{1}{36}$$

$$: \sqrt{\ } \text{ extr.}$$

$$z - \tfrac{1}{6} = \pm \sqrt{(a + \tfrac{1}{36})} \quad \text{und}$$

$$z = \tfrac{1}{6} \pm \sqrt{(a + \tfrac{1}{36})}$$

§. 324. Anmerk. Dieſe quadratiſche Gleichungen, beſonders die ſogenannte affectæ oder unreine Gleichungen ſind von groſſem Nutzen, dahero man ſich ſolche wohl bekannt machen ſoll; wir wollen ein Exempel geben, wo man alle bisherige Sätze von den Gleichungen alleſamt anbringen kann. Man ſolle zwo Zahlen ſuchen, deren Summen, Product, und Differenz der Quadrate gleich oder einerley ſind; die Zahlen ſeyen x und y, ſo iſt nach der Forderung,

$$\text{Nr. I.} \quad x + y = xy$$

$$x^2 - y^2 = xy$$

$$x + y = x^2 - x^2$$

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y) \quad \text{nach §. 147.}$$

$$x + y = (x - y)(x + y)$$

$$: x + y$$

$$1 = x - y$$

$$y = y \quad \text{add.}$$

$$\text{Nr. II.} \quad 1 + y = x$$

$$y = y$$

$$\text{Nr. III.} \quad 1 + 2y = x + y$$

$$x + y = xy \quad \text{nach nr. I.}$$

$$1 + 2y = xy$$

$$x = 1 + y \quad \text{nach nr. II. diß ſubſtituirt gibt}$$

$$1 + 2y = y(1 + y)$$

$$y(1 + y) = y + y^2$$

1 + 2y

$$1 + 2y = y + y^2$$
$$y = y \quad \text{ſubtrah.}$$
$$1 + y = y^2$$
$$y = y \quad \text{ſubtrah.}$$
$$1 = y^2 - y \quad \text{eine quadratiſche unreine Gleichung.}$$
$$\tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{4} \quad \text{add.}$$
$$1 + \tfrac{1}{4} = y^2 - y + \tfrac{1}{4}$$
$$\pm\surd(1 + \tfrac{1}{4}) = y - \tfrac{1}{2} \text{ und } \tfrac{1}{2} \pm \surd(1 + \tfrac{1}{4}) = y.$$
und nach nr. II. iſt $1 + \tfrac{1}{2} \pm \surd(1 + \tfrac{1}{4}) = x$

Von höhern Gleichungen überhaupt. ×

§. 325. Erklär. Bey den höhern Gleichungen, das iſt bey ſolchen, wo die höchſte Potenz der unbekannten Gröſſe über das Quadrat hinauf ſteiget, hat man, in ſofern ſie als beſtimmte Gleichungen oder als ſolche, in welchen nur eine unbekannte Gröſſe, obſchon in verſchiedenen Potenzen vorhanden iſt, überhaupt betrachtet werden, vornemlich darauf zu ſehen, daß man die Gleichung in eine geſchickte Ordnung bringt; das iſt, die höchſte Potenzen ohne alle Coefficienten zuerſt ſetzet, ſodann die unmittelbar folgende, u. ſ. w. auch diejenige, welche fehlen, und die man als Potenzen anſiehet, deren Coefficient null, oder die in eine 0 multiplicirt ſind, genau bemerkt u. ſ. w.

§. 326. Zuſatz. Dieſe Ordnung der Potenzen läßt ſich aus dem 13. §. abermal begreifen, dann wann die unbekannte gröſte Potenz mit einer andern Gröſſe dividirt iſt, ſo bringt man den Diviſor durch die Multiplication hinweg, iſt ſie multiplicirt,

ſo

ſo bringt man den Multiplicator oder Coefficienten durch die Diviſion hinweg; u. ſ. w. Die Coefficienten, die in einerley Potenz multiplicirt ſind, werden als Factores dieſer Potenz zuſammengeſetzt oder untereinander geſchrieben, damit die Potenz mit ihren Coefficienten als ein einiges Glied angeſehen werde; und damit die höchſte Potenz das Zeichen + bekomme, wenn ſie vorher — hat, ſo kann man es abermal nach §. 13. die Veränderung, der Gleichung unbeſchadet, bewerkſtelligen, und ſie ſelbſt zuletzt auf nichts reduciren u. ſ. w.

§. 327. Erläuter. Ein Exempel wird die Sache deutlich machen; man gibt einem die Gleichung, man ſolle ſie ordnen:

$$a - mz = \frac{z}{z^3 - e} + \frac{c}{z^2}$$

man multiplicirt zuerſt beederſeits mit $z^3 - e$, ſo hat man;

$$\cdot\, z^3 - e$$

$$az^3 - mz^4 - ae + mez = z + \frac{cz^3 - ec}{z^2}$$

man multiplicire ferner mit z^2, ſo hat man

$$\cdot\, z^2$$

$$az^5 - mz^6 - aez^2 + mez^3 = z^3 + cz^3 - ec$$

$$z^3 + cz^3 = z^3 + cz^3 \text{ ſubtr.}$$

man bringe die gleiche Potenzen mez^3, z^8, und cz^3 zuſammen auf eine Seite;

$$az^5 - mz^6 - acz^2 + mez^3 - z^3 - cz^3 = -ec$$

$$mez^3 - z^3 - cz^3 = (me - 1 - c)z^3$$

man drucke die Coefficienten der gleichen Potenz z^3 ſchicklicher aus, u. ſubſtituire den Ausdruck.

$$az^5 - mz^6 - acz^2 + (me - 1 - c)z^3 = -ec$$

weil mz^6 die höchſte Potenz, ſo dividire man alles mit

———————————— : m — mit m, damit man z^6 ohne Coefficienten allein bekom̃e;

$$\frac{az^5}{m} - z^6 - \frac{acz^2}{m} + \frac{(me-1-c)z^3}{m} = -\frac{ec}{m}$$

$-\;+\;+\quad-\quad+$ — man verändere die Zeichen, daß man $-z^6$ poſitiv bekomme; und ſetze z^6 zuerſt und ſo fort nach der Ordnung der Potenze.

$$z^6 - \frac{az^5}{m} - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{acz^2}{m} = \frac{ec}{m}$$

$$\frac{ec}{m} = \frac{ec}{m} \text{ ſubtr.}$$

————————————

man bringe die Gleichung auf nichts.

$$z^6 - \frac{az^5}{m} - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{acz^2}{m} - \frac{ac}{m} = 0$$

Man zeige die fehlende Glieder zwiſchen z^5 und z^3 u.ſ.w. durch Sternlein an.

$$z^6 - \frac{az^5}{m} * - \frac{(me-1-c)z^3}{m} + \frac{acz^2}{m} * - \frac{ec}{m} = 0$$

ſo hat man die Gleichung richtig geordnet; und das ganze Geſchäfte iſt gröſtentheils nach den erſten Regeln der Mathematik §. 13. vollendet, dahero nur übrig bleibt, daß man die Wurzel ſuchet, davon wir ſogleich reden werden.

§. 329. Anmerk. Wenn einer im Rechnen geübt iſt, und gleich überſchauen kann, wie ſich Gröſſen durch die Diviſion, Multiplication u. ſ. w. aufheben laſſen, ſo kann er eine Gleichung ohne dieſe Regeln ſchnell ordnen, z. E. es ſey

$ax = \frac{b^2x - b^3}{z}$, fällt nun einem gleich ein, daß $b^2x - b^3 = b^2(x - b)$ ſo hat man ſchon die andere ſchickliche Gleichung.

$$ax = \frac{b^2(x-b)}{z}$$

Es ſey ferner

$$x = \frac{az}{x-b}$$

ſo iſt, wenn man Gleiches mit Gleichem multiplicirt

$$axx = \frac{ab^2z(x-b)}{z(x-b)}$$ das iſt

$axx = ab^2$ und $xx = bb$, folglich $x = b$.

Von

Von den Wurzeln der zuſammengeſetzten Gleichungen.

§. 330. Erklär. Die Wurzel einer Gleichung, die auf Null gebracht iſt, heißt dasjenige, was für die unbekannte Gröſſe ſo geſetzt werden kann, daß die Gleichung nach der Hand wieder Null bleibt; oder wodurch ſich alle Glieder aufheben und zuſammen o werden. Das was man für die unbekannte Gröſſe z oder x ſetzet, mag hernach eine mögliche oder unmögliche Gröſſe ſeyn.

§. 331. Lehrſatz. Eine jede Gleichung hat ſo viel Wurzeln, als der Exponent der höchſten Potenz Einheiten hat, oder wie man ſonſt ſpricht, als die höchſte Potenz Abmeſſungen hat.

Beweis.

Eine jede quadratiſche Gleichung hat 2 Wurzeln, dann von x^2 kann $+x$ und $-x$ die Wurzel ſeyn; alſo hat ſie ſo viel Wurzeln als ſie Abmeſſungen hat. Bey einer cubiſchen Gleichung kann man es ebenfalls zeigen; denn man ſetze

$$x-a=0 \qquad \text{oder} \qquad x-2=0$$
$$x-b=0 \qquad\qquad\qquad x-3=0$$

ſo iſt

$$x^2-(a+b)x+ab=0 \qquad\qquad x^2-5x+6=0$$

es ſey ferner

$$x-b=0 \qquad \text{ſo iſt} \qquad x-4=0$$

$$x^3-9x^2+26x-24=0$$

$$x^3-(a+a+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$$

Da man nun für x ſetzen kan a, b, c, oder in Zahlen 2, 3, 4, und die Gleichung dennoch null bleibt, ſo hat die Gleichung drey Wurzeln; eben ſo beweißt man es bey der vierten Potenz, daß vier Wurzeln herauskommen.

§. 332.

§. 332. **Zuſatz.** Das letzte Glied der Gleichung iſt das Product der Wurzeln; dann abc iſt das Product aus den Wurzeln a, b, c; wie 24 das Product von 2.3.4. Die Coefficienten des zweyten Glieds ſind die Summe aller Wurzeln, die Coefficienten des dritten Glieds die Summen der Producte aus je zwo und zwo Wurzeln u.ſ.w. Harriot hat noch bemerkt, daß, ſo viel wahre Wurzeln einer Gleichung ſind, als unmittelbare Abwechslungen der Zeichen $+$ und $-$ vorhanden; welche Regel nachgehends Herr Geh. Rath von Segner bewieſen hat.

§. 333. Anm. Die Sache läßt ſich auch durch eine reine Gleichung erläutern; es ſeye die dritte Potenz von 2 gegeben, welche 8 iſt, folglich iſt $x^3 - 8 = 0$, und weil 2 die Cubicwurzel aus 8, ſo iſt $x - 2$ auch 0. Man dividire nun $x^3 - 8$ durch die Wurzel $x - 2$, ſo iſt

$$\begin{array}{l} x^3 - 8 \;\big]\; x^2 + 2x + 4 \\ (x - 2) \\ x^3 - 2x^2 \\ - \quad + \\ \hline + 2x^2 - 8 \\ (x - 2) \\ 2x^2 - 4x \\ - \quad + \\ \hline + 4x - 8 \\ (x - 2) \\ 4x - 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

dieſer Quotient iſt $= 0$, weil 0 mit 0 dividirt nothwendig $= 0$, folglich iſt

$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
$$3 = 3 \text{ ſubtr.}$$
$$x^2 + 2x + 1 = -3$$
$$\sqrt{\ } \text{ extr.}$$
$$x + 1 = \mp\sqrt{-3}$$
$$1 = 1 \text{ ſubtr.}$$
$$x = -1 \mp \sqrt{-3},$$

welches die zwo übrige Wurzeln von 8 ſind, auſſer der poſitiven 2.

Dann wenn man $-1 + \sqrt{-3}$ mit ſich ſelbſt dreymal multiplicirt, ſo iſt $(-1 + \sqrt{-3})^3 = 8$, wie $2^3 = 8$; eben ſo iſt auch $-(1 - \sqrt{-3})^3 = 8$.

§. 334. Zuſatz. Weil eine jede eingebildete oder unmögliche Wurzel als eine Quadratwurzel angeſehen werden kann, §. 212. eine ſolche Wurzel aber jedesmal + und − zum Zeichen hat, ſo gehen die eingebildete Wurzeln paarweis; das iſt, wo eine iſt, iſt auch die andere, wo drey auch die vierte, wo fünf auch die ſechste, ſie können dahero niemalen in ungerader Zahl vorhanden ſeyn.

§. 335. Zuſatz. Eine jede reine Gleichung, nach §. 320. ſie mag ſo viel Abmeſſungen haben als ſie will, hat nur eine wahre mögliche Wurzel, wenn der Exponent ungerade iſt, und zwo entgegengeſetzte gleiche mögliche Wurzeln, wenn er gerade iſt; die übrige ſind alle eingebildet oder unmöglich.

§. 336. Zuſatz. Wenn man eins durch die Wurzel aus minus eins dividirt, ſo hat man die negative Wurzel aus minus eins; das iſt $\frac{1}{\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}$, dann

$$\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-1} = -1$$

folglich durch Veränderung der Zeichen

$$-\sqrt{-1} \,.\, \sqrt{-1} = +1$$

$$\overline{\qquad\qquad} : \sqrt{-1}$$

$$-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$$

ein gleichgültiger Ausdruck, der mehrmalen vorkommt.

Die Erfindung der Wurzeln und der Diviſorum einer Gleichung.

§. 337. Lehrſatz. Weil das letzte Glied das Product der Wurzel iſt, ſo darf man es nur in ſeine Factores zerfällen, und einen jeden Factor in die Stelle der unbekannten Gröſſe ſetzen, damit man ſehe, ob durch dieſe Subſtitution die Gleichung null werde;

werde; dann in dieſem Fall iſt der Factor eine wahre Wurzel. Wird aber die Gleichung nicht null, ſo nimmt man einen andern Factor, und verſucht die Subſtitutionen ſo lang, bis die Gleichung null wird.

§. 338. Zuſatz. Wenn das letzte Glied ein kleines Product iſt, ſo kann man die Wurzeln eher finden; iſt es aber ein groſſes Product, das viele Factores hat, ſo wird das Geſchäft weitläuftig.

§. 339. Anm. Man hat dahero noch verſchiedene Methoden je und je erfunden, die aber alle anzuführen, zu weitläuftig wären; uns genüget, die Möglichkeit gezeigt zu haben, wie dieſe Arbeit verrichtet werden kann; doch wollen wir noch einige nennen.

§. 340. Lehrſatz. Man kann die Wurzeln ſchneller finden, wenn man vorher ihre Schranken oder Grenzen beſtimmt, zwiſchen welche ſie hinein fallen. Die Schranken aber werden durch die Regeln der Gleichungen nach §. 13. beſtimmt. z. E. es ſeye

$x^2 - 8x + 15 = 0$ ſo iſt	$x^2 - qx + r = 0$
$x^2 + 15 = 8x$ und	$x^2 + r = qx$
$x^2 < 8x$	$x^2 < qx$
$:x$	$:x$
$x < 8$ ferner weil	$x < q$ ferner weil
$x^2 + 15 = 8x$ ſo iſt	$x^2 + r = qx$ ſo iſt
$15 < 8x$	$r < qx$
$:x$ und	$:q$ und
$\frac{15}{8} < x$ folgl. ſind $\frac{15}{8}$ und 8 die Grenzen der Wurzel.	$\frac{r}{q} < x$; alſo ſind $\frac{r}{q}$ und q die Grenzen.

§. 341. Zuſatz. Wann die Gleichungen cubiſch ſind, ſo kann man die Schranken eben ſo finden:

Es ſey der allgemeine Ausdruck der cubiſchen Gleichung, weil das zweyte Glied jedesmal nach §. 147. kann weggeſchaft werden.

$$x^3 - qx + r = 0$$

$$x^3 + r = qx$$

$$x^3 < qx \quad :x$$

$$x^2 < q$$

$$x < \sqrt{q}$$

ferner weil

$$x^3 + r = qx$$ ſo iſt

$$r < qx \quad :b$$

$$\frac{r}{q} < x$$

demnach ſind die Schranken der Wurzel $\sqrt{q}$ und $\frac{r}{q}$; wenn die Gleichung cubiſch iſt.

§. 342. Lehrſatz. Wenn man eine Gleichung, wie z. E. $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ hat, und man ſetzt ſie einer andern gleich, die in $x + \alpha$ multiplicirt, eben das geben ſolle, ſo kann man die Diviſores nach Newtons Manier finden. Dann es ſeye

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = (x + \alpha)(x^3 + fx^2 + gx + h)$$

das iſt, wenn man wirkl. multipl $= x^4 + (f + \alpha)x^3 + (g + \alpha f)x^2 + (h + \alpha g)x + \alpha h$, ſo kann man die letzte Gleichung vollkommen durch $x + \alpha$ dividiren, man mag für x ſetzen, was man will, wie der Augenſchein es gibt nach den Diviſionsregeln §. 152. Da dann

$x = 1$ gibt $1 + a + b + c + d$ und der Diviſor $1 + \alpha$
$x = 2$ gibt $16 + 8a + 4b + 2c + d$ — — $2 + \alpha$
$x = 3$ gibt $81 + 27a + 9b + 3c + d$ — — $3 + \alpha$.

Das iſt, die Diviſores geben in einer arithmetiſchen Progreßion fort.

§. 343. Anmerk. Dieſe Methode ſchreibt ſich vom Newton her, und heißt Methodus Newtoniana inveniendi diviſores æquationum; Herr Clairaut hat dieſen einigen fruchtbaren Satz zu Grunde gelegt, und den dritten Theil ſeiner Algebra darauf gebauet; man wird dieſen Theil ganz leſen und verſtehen können, wenn man den obigen Lehrſatz verſteht. Man ſehe auch Herrn Prof. Kies Diluc. anal. Finit. Kæſtn. P. I.

Die

Die Veränderung der Gleichungen.

§. 344. Lehrſatz. Man kann bey den Gleichungen die vier Rechnungsarten anbringen, wenn man nur im Subſtituiren eine Fertigkeit beſitzt; welches ſich am beſten durch Exempel erweiſen läßt: Es ſey die Gleichung $x^2 - 5x + 4 = 0$. Man ſolle die Wurzel um 3 vermehren und hernach um 2 vermindern, oder man ſolle die Addition und Subtraction dabey anbringen, ſo ſetze man $x + 3 = y$ und hernach $x - 2 = y$.

I. Addition.

$$x + 3 = y$$
$$x = y - 3$$
$$x^2 = (y-3)(y-3) = y^2 - 6y + 9$$
$$-5x = -5y + 15$$
$$+4 = +4$$
$$x^2 - 5x + 4 = y^2 - 11y + 28$$

II. Subtraction

$$x - 2 = y$$
$$x = y + 2$$
$$x^2 = y^2 + 4y + 4$$
$$-5x = -5y - 10$$
$$+4 = +4$$
$$x^2 - 5x + 4 = y^2 - y - 2.$$

III. Multiplication.

$$x^3 + bx^2 + cx + q = 0$$

Man ſoll in dieſer Gleichung die Wurzel x in a multipliciren, ſo iſt

nr. I. $ax = y$ und

$x = \frac{y}{a}$ folglich

$$x^3 = \frac{y^3}{a^3}$$
$$bx^2 = \frac{by^2}{a^2}$$
$$cx = cy$$
$$q = q$$

IV. Diviſion.

$$x^3 + bx^2 - cx + r = 0$$

Man ſoll die Wurzel x durch a dividiren, ſo iſt

nr. II. $\frac{x}{a} = y$ und

$x = ay$

$$x^3 = a^3y$$
$$+by^2 = ba^2y^2$$
$$-cx = -cay$$
$$+r = +r$$

nr. II. $x^3+bx^2-cx+r=a^3y^3+ba^2y^2-cay+r=0$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : a^3$$

$$=y^3+\frac{by^2}{a}-\frac{cy}{a^2}+\frac{r}{a^3}=0$$

nr. I.

$$x^3+by^2+cx+q=\frac{y^3}{a^3}+\frac{by^2}{a^2}+\frac{cy}{a}+q=0$$ eine Gleichung in welcher $y=\frac{x}{a}$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} . a^3$$

$$=y^3+aby^2+a^2cy+a^3b=0.$$

eine Gleichung in welcher $y=ax$

§. 345. Zuſatz. Eine gegebene Gleichung wird alſo multiplicirt, wenn man ſie durch eine geometriſche Progreßion multiplicirt, deren erſtes Glied 1 und der Exponent die Zahl iſt, durch welche die Gleichung multiplicirt werden ſoll; und ſie wird dividirt, wenn man die gegebene Gleichung durch eine geometriſche Proportion dividirt, deren erſtes Glied 1 und der Exponent die Zahl iſt, wodurch ſie dividiret werden ſoll.

§. 346. Zuſatz. Weil die fehlende Glieder als Potenzen angeſehen werden, deren Coefficientrn $=0$, ſo muß man ſie bey dieſer Rechnung nicht vergeſſen; z. E. man ſolle x^3+cx-9 durch 2 multipliciren, ſo ſetzt man

$$\begin{array}{l} x^3 \; * \; + cx - q \\ 1,\; 2,\; 4,\; -8 \\ \hline x^3,\; * \; + 4cx - 8q \end{array}$$ das geſuchte Product.

Oder man ſolle x^3+px-r durch drey dividiren, ſo ſetzt man

$$\begin{array}{l} x^3 \; * \; + pr - r \\ 1,\; 3,\; 9,\; 27 \\ \hline x^3 \; * \; + \frac{pr}{9} - \frac{3pr}{27} \end{array}$$

§. 347.

§. 347. Zuſatz. Fehlet ein Glied, und man möchte es gern wieder herſtellen, ſo darf man nur die Wurzel mit eins vermehren; will man ein Glied hinwegſchaffen, ſo verſucht man es entweder durch die Subtraction oder Addition, je nachdem das wegzuſchaffende Glied das Zeichen + oder — hat; Brüche bringt man durch die Multiplication hinweg u. ſ. w. In der Rechnung des Unendlichen wird das weitere vorkommen.

Die Beſtimmung der Coefficienten bey Ausdruckungen durch unendliche Reyhen.

§. 348. Lehrſatz. Wenn eine Gleichung, die durch eine unendliche Reyhe ausgedruckt wird, lauter Potenzen von z hat, deren Exponenten ganze poſitive Zahlen ſind, und wenn man für z alle mögliche, auch unendlich kleine Gröſſen, folglich auch null ſetzen darf, ſo werden alle ihre Coefficienten null. Dann es ſey $o = a + bz + cz^2 + dz^3 - - -$

Nun iſt nach der Hypoth. $z = o$

folglich $o = a + o + o + o - - -$

alſo $a = o.$

Es iſt aber auch $b = o$, dann $o = bz + cz^2 + cz^3 - - -$

$:z$

$o = b + cz + cz^2 - -$

$z = o.$

$o = b + o + o + o.$ alſo

$b = o.$

Eben ſo beweißt man, daß $c = o$; u. ſ. w. bis endlich alle Coefficienten null werden.

§. 349. Lehrſatz. Es ſey gegeben $z = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 - -$ ſo kann man den Wehrt von

von y durch z ausdrucken, wenn man folgende Reyhe annimmt, und hernach die Coefficienten zu beſtimmen ſucht.

$$y = Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 \dots \text{ folglich}$$

$$ay = aAz + aBz^2 + aCz^3 + aDz^4 + aEz^5$$

$$by^2 = bA^2z^2 + 2bABz^3 + \left.\begin{matrix} bB^2 \\ 2bAC \end{matrix}\right] z^4 + 2bBCz^5 \dots = b(Az + Bz^2 + Cz^3)^2$$

$$cy^3 = cA^3z^3 + 3cABz^4 + 3cB^2Acz^5 \dots = c(Az + Bz^2 + Cz^3 \dots)^3$$

u. ſ. w.

$$-z = -z.$$

Wenn man nun die ganze Reyhe ordnet, nach §. 327. ſo hat man

$$(aA - 1)z + (aB + bA^2)z^2 + (aC + 2bAB + cA^3)z^3$$

u. ſ. w.

Wenn nun z = null geſetzt wird, ſo ſind alle Coefficienten = 0, folglich $aA - 1 = 0$, $aB + bA^2 = 0$, $aC + 2bAB + cA^3 = 0$; man kann dahero ihren Wehrt beſtimmen. Dann

wenn $aA - 1 = 0$, ſo iſt

Nr. I. $aA = 1$, und

$$: a$$

$$A = \frac{1}{a}$$

Nr. II. $aB + bA^2 = 0$, folglich

$$aB = -bA^2$$

$$: a$$

$$B = -\frac{bA^2}{a}, \text{ nun iſt } A = \frac{1}{a} \text{ nach nr. I.}$$

$$\text{alſo } A^2 = \frac{1}{a^2}$$

folglich $B = -\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{a^2} = -\frac{b}{a^3}$

$$aC + 2bAB + cA^3 = 0$$

$$aC = -2bAB - cA^3$$

$$C = -\frac{2bAB - cA^3}{a} = \frac{2b^2}{a^5} - \frac{c}{a^4} \text{ wenn}$$

man

man nach Nr. II. und Nr. I. den gefundenen Wehrt von A und B ſubſtituirt.

§. 350. Zuſatz. Dieſes Verfahren ſetzt voraus, daß man die Exponenten der geſuchten Progreßion ſchon wiſſe, weil ſonſt in den Coefficienten Wiederſprüche erfolgen würden. Die Exponenten von der unbekannten Gröſſe heißt man hier die Formam Seriei, die Geſtalt der Reyhe oder Progreſſion.

§. 351. Anmerk. Wenn man z. E. die Quadratwurzel von $1+x$ durch eine unendliche Reyhe ſuchen will, ſo ſetzt man, wie oben,

$$\sqrt{1+x} = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 - - \quad \text{folglich}$$

$$1+x = 1 + 2Ax + (A^2+2B)x^2 + (2AB+2C)x^3 + (B^2+2AC+2D)x^4$$

$$\underline{1+x = 1+x} \quad \text{ſubtr.}$$

$$0 = 0 + (2A-1)x + (A^2+2B)x^2 + (2AB+2C)x^3 - - -$$

daher iſt

$$2A - 1 = 0,\quad 2A = 1,\quad A = \tfrac{1}{2}$$

$$A^2 + 2B = 0,\quad A^2 = -2B,\quad A^2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},\quad \tfrac{1}{4} = -2B \quad :-2,\quad \tfrac{1}{4} : -2 = -\tfrac{1}{8} = B.$$

$$2AB + 2C = 0,\quad 2AB = -2C,\quad 2AB = 2\cdot\tfrac{1}{2}\cdot -\tfrac{1}{8} = -\tfrac{1}{8},\quad -\tfrac{1}{8} = -2C \quad :-2,\quad -\tfrac{1}{8} : -2 = \tfrac{1}{16} = C$$

u. ſ. f.

Wäre nun die Geſtalt der Reyhe nicht richtig angenommen, z. E. wenn man die Reyhe $1 + Ax + Bx^{\frac{3}{2}} + Cx^{\frac{5}{2}} - -$ nähme, ſo würde das Quadrat ſeyn $1 + 2Ax + 2Bx^{\frac{3}{2}} + A^2x^2 + (2AB+2AC)x^{\frac{5}{2}}$. folglich, um die Gleichung auf null zu bringen, $1+x$ ſubtrahirt

gibt $0 = 0 + (2A-1)x + 2Bx^{\frac{3}{2}} + A^2x^2 - - -$

alſo $2A - 1 = 0$ II. $2B = 0$ III. $A^2 = 0$

Nr. I. $2A = 1 \quad :2,\quad A = \tfrac{1}{2}$

Nr. II. $2B = 0 \quad :2,\quad B = 0$

Nr. III. $A = 0$ welches Nr. I. widerſpricht, wo $A = \tfrac{1}{2}$ gefunden wird, dahero A niemal 0 werden kann; folglich iſt in dieſem letztern Fall die Geſtalt der Reyhe unrichtig angenommen worden; und man muß eine andere ſuchen.

§. 352. Anmerk. Man hat verſchiedene Methoden je und je erfunden, die Geſtalt der Reyhen ſicher zu beſtimmen, damit man nicht auf gerathewohl rechnen dörfe. Die erſte iſt die Newtoniſche, da man durch Hülfe eines Parallelogramms, in deſſen Verticalfächer man die ſteigende Potenzen von der einen, in die Horizontalfächer aber die ſteigende Potenzen der andern unbekannten Gröſſe ſchreibt.

z^3	z^3y	z^3y^2	z^3y^3
z^2	z^2y	z^2y^2	z^2y^3
z	zy	zy^2	zy^3
1	y	y^2	y^3

Iſt nun z unendlich klein, ſo wird z^2, z^3 u. ſ. w. noch unendlichmal kleiner werden, oder verſchwinden; das iſt, die obere Glieder werden in Anſehung der untern verſchwinden; weil die Potenz eines unendlich kleinen Bruchs unendlichmal kleiner als die Wurzel iſt; eben ſo wenn z unendlich groß iſt, ſo werden die untere Glieder dagegen verſchwinden; weil die Potenz einer unendlich groſſen Gröſſe unendlichmal gröſſer iſt als die Wurzel; diejenige Glieder endlich werden gleichnahmig ſeyn, die wie z^3 und zy^3 oder wie zy^3 und z^3 u. ſ. w. beſchaffen ſind. Wenn man nun eine Linie von z^3 nach zy^3 ziehet, ſo werden nur z^3 und zy^3 durch den Mittelpunkt des Fachs von der Linie geſchnitten, die übrige Glieder z^2y und z^2y^2, werden auf beeden Seiten von der Linie entweder oben oder unten vorbeygegangen werden, und alſo entweder unendlich groß oder unendlich klein heiſſen, folglich wegbleiben können. Es ſeye z. E. die Aequation $a + bx^2 + cxy + dy^2 + ex^3 + fx^5, + gx^3y^2 + hxy^4 + ix^6y + kx^5y^3 + lx^4y^4 + mx^5y^6 + nx^4y$ gegeben, ſo wird ſie folgender Geſtalt geordnet;

	x^6y					
x^5			x^5y^3			
				x^4y^4	x^4y^5	
x^3		x^3y^2				
x^2						x^2y^6
	xy			xy		
1		y^2				

wo man im Parallelogramm die Coefficienten wegläßt, u. nur die Potenzen in ihrer Ordnung ſetzt. Wenn nun x unendlich klein, und man verlangt den Wehrt von y, ſo betrachtet man die untere Glieder, da dann entweder $a + dy^2 = 0$, und daraus $y = \sqrt{-\frac{a}{d}}$ gefunden

hen wird; oder man ziehet von y^2 die Linie nach y^6, ſo hat man $dy^2 + hxy^4 + mx^2y^6 = 0$, woraus y geſuchet wird, damit man die Geſtalt der Reyhe bekomme; man ſehe hievon Herrn Prof. Kies Dilucid. Kæſtner. Anal. p. 35. 36. wo alles dieſes deutlich auseinander geſetzt und mit Exempeln belegt wird, unter welchen das gegenwärtige auch vorkommt.

§. 353. Anmerk. Herr Prof. Käſtner hat die Sache unter den Deutſchen vorzüglich bekannt gemacht; theils in ſeinen Anfangsgründen Th. II. theils vorhero ſchon in zwo beſondern Diſſert. die er zu Leipzig 1743. und 1745. herausgab, unter dem Titel: Æquationum ſpecioſarum reſolutio Newtoniana per ſeries, und de reſolutione æquationum differenrialium per ſeries; welcher zweyten er folgende Innſchrift vorgeſetzt hat:

Paucula jam ſeries monſtrat primordia naſcens,
Lege ſua partes hæc ſine fine regunt;
Sic a vita hominis quam bis ſex luſtra coercent,
Æva tenent formam non numeranda ſuam.

Ich würde mich auch durch den Nahmen eines Compendii nicht haben zurückhalten laſſen, dieſe Lehre ausführlich und nicht nur in etlichen Anmerkungen vorzutragen, wenn es nicht allgemeinere und beſſere Methoden gäbe, alle mögliche Reyhen, durch welche eine Gleichung ſich auflöſen läßt, zu finden, wie die Methode des Herrn Nic. Bernoulli iſt, von welcher Herr Prof. Käſtner ſelbſt folgendes ſchreibt: „Dieſe Methode iſt in der That allgemeiner als das Newtoniſche Parallelogramm; beſonders deswegen, weil ſie die Exponenten aus den Coefficienten der Differentiale beſtimmt; daher ſie Reyhen geben kann, wo das Parallelogramm keine gäbe; und ſelbſt wenn ſie Reyhen gibt, deren Exponenten mit den Exponenten der Reyhen des Parallelogrammes in einer Progreßion ſind, doch dieſe Reyhen vollſtändiger, nemlich mit mehr Gliedern gibt, als das Parallelogramm." Anal. Infin. p. 424. Die Bernoulliſche Regel aber läßt ſich hier noch nicht vortragen, weil ſie die Rechnung des Unendlichen vorausſetzt.

Von unbeſtimmten Aufgaben.

§. 354. Anm. Wir wollen mit dieſem Titel den Uebergang zur practiſchen Arithmetik machen, wo ohnehin Aufgaben genug vorkommen, nur muß man wiſſen, was beſtimmte und unbeſtimmte Aufgaben ſeyen.

§. 355. **Erklär.** Eine unbeſtimmte Aufgabe heißt überhaupt eine Aufgabe, die mehr als eine

Auflöſung hat; wie eine Frage, auf die man mehr als eine Antwort geben kann. z. E. wenn man zwo Zahlen will, deren Summe $= 10$, das iſt $x + y = 10$; ſo iſt $x = 10 - y$, und ich kann für y ſezen was ich will, wenn es nur kleiner iſt als 10; man wird x überall finden; z. E. $x = 10 - 4$ oder $10 - 8$ oder $10 - 9$, oder $10 - \frac{1}{2}$ u. ſ. w. Dann $6 + 4 = 10$, $2 + 8 = 10$, $9 + 1 = 10$, $\frac{1}{2} + 9\frac{1}{2} = 10$ u. ſ. w.

§. 356. Anmerk. In einer jeden Scienz gibt es ſolche Aufgaben; z. E. in der Geometrie, wenn man auf die gegebene Grundlinie einen rechtwinklichten Triangel aufrichten; aus dem Innhalt und der Grundlinie ein Dreyeck machen ſolle; u. ſ. w.

§. 357. Zuſatz. Bey Auflöſung unbeſtimmter Aufgaben muß man nur für y ſolch einen Ausdruck ſuchen, daß die Gleichung einfach wird.

§. 358 Anm. Man ſolle z. E. ein Quadrat finden, das von einem andern Quadrat abgezogen, wieder ein Quadrat läßt; alſo $z^2 - x^2 = y^2$; folglich

$y = \sqrt{(z^2 - x^2)}$ man ſetze dieſes gleich $z - px$, weil, wenn man wieder quadrirt, ſich z^2 auf beeden Seiten aufhebt;

es ſey $y = z - px$

ſo iſt $\sqrt{z^2 - x^2} = z - px$ Dieſes quadrirt gibt

$$z^2 - x^2 = z^2 - 2pzx + p^2x^2$$

$$z^2 = z^2$$

$$-x^2 = -2pzx + p^2x^2 \quad :x$$

$$-x = -2pz + p^2x$$

$$2pz = p^2x + x$$

oder welches einerley, wenn man die Wehrte herüber ſetzt, nun iſt ferner

$$p^2x + x = (p^2 + 1)x$$

$$2pz = (p^2 + 1)x \quad : p^2 + 1$$

$$\frac{2pz}{p^2 + 1} = x$$

Wenn man nun für p eine Rationalzahl ſetzet,

ſetzet, ſo bekommt hier x einen Rationalwehrt, woraus man auch für y einen bekommt; z. E. z ſey 10, $p = \frac{1}{2}$ ſo iſt $x = 8$, und $y = 6$. Dann $10^2 - 8^2 = 6^2$ oder $100 - 64 = 36$. welches lauter Quadrate ſind.

§. 359. Anm. Die Abſicht der unbeſtimmten Aufgaben iſt dieſe, daß die geſuchte Gröſſen hernach rational werden; dahero dieſe Arbeit beſonders eine Uebung für die Alten war, welche die Irrationalgröſſen für keine rechte Zahlen hielten, ſelbige auch um ſo mehr ſo viel ſie konnten, verhüteten, weil ſie die bequeme Art durch die ſogenannte Approximation dem Wehrt der Wurzel ſich zu nähern nicht hatten, wie wir ſie haben. Weil übrigens Diophantus davon, wie wir § 123. gemeldt, eines und das andere geſchrieben, ſo nennt man die hieher gehörige Kunſtgriffe auch die Analyſin Diophanteam.

Drit-

Drittes Hauptſtück,
von der practiſchen Rechenkunſt.

§. 360.
Erklärung.

Unter der practiſchen Rechenkunſt verſteht man nichts anders, als die Anwendungen der in beeden vorhergehenden Hauptſtücken vorgetragenen Lehren und Regeln auf die im menſchlichen Leben zu berechnen vorkommende Fälle.

§. 361. Zuſatz. Man muß daher von den genannten Zahlen, und von der Art uud Weiſe, ſolche auf die vier Rechnungsarten zu bringen, ferner von der Vergleichung dieſer Zahlen nach dem Handel und geſellſchaftlichen Leben der Menſchen u. ſ. w. reden, auch zeigen, wie man, ſo viel möglich, eine Fertigkeit darinnen bekommen ſolle, damit man das, was man zu rechnen hat, ſchnell rechnen könne. Ehe wir nun dieſe Anwendung ſelbſt etwas ausführlicher beweiſen, wollen wir nach dem Plan der vorig'n Hauptſtücke die Geſchichte der practiſchen Rechenkunſt vorhero noch kürzlich vortragen.

Geſchichte der practiſchen Rechenkunſt.

§. 362. Die practiſche Rechenkunſt iſt durch die im menſchlichen Handel und Wandel unumgängliche Nothwendigkeit, manches zu berechnen, eingeführet worden, wie die practiſche Geometrie denen durch

durch die öftere Ueberſchwemmungen des Nils abgenöthigten Ausmeſſungen der Egyptiſchen Felder, um die Rechte des Eigenthums zu behaupten, ihr Daſeyn zu danken hat. Beede Wiſſenſchaften ſind alſo im Anfang, wie faſt alle andere Wiſſenſchaften in ihrer Minderjährigkeit es waren, ſehr ungekünſtelt und nur in ſo weit brauchbar geweſen, als die Nothwendigkeit der Sache ihre Brauchbarkeit erforderte. Man darf ſich dahero nicht wundern, daß die practiſche Rechenkunſt zuerſt aufgekommen, indeme wir vielleicht keine theoretiſche haben würden, wenn jene nicht erſt bey häufiger vorkommenden und ſchwerern Rechnungsfällen die Nothwendigkeit der Theorie deſto unentbehrlicher gemacht hätte; man wird ſich auch um ſo weniger darüber wundern, weil man nicht leicht eine Wiſſenſchaft in der Welt nennen kann, die ihr theoretiſches Daſeyn nicht auf eine ſolche Weiſe erhalten hätte.

§. 363. Aus der Geſchichte der vergangenen Zeiten hat man die gegründete Vermuthung, daß die erſte Handlungsgeſchäfte unter den Phöniciern im Schwang giengen. Man darf dahero mit eben ſo gutem Grunde den Urſprung der practiſchen Rechenkunſt aus Phönicien herleiten, mit welchem man den Urſprung der practiſchen Geometrie, wie wir hören werden, aus Egypten herzuleiten pflegt.

§. 364. Im Anfang blieb dieſe Kunſt, wie man leicht vermuthen kann, in die engſte Schranken eingeſchloſſen; da aber die Theorie nach und nach hinzukame, ſo wurden die Schranken erweitert, und man konnte die practiſche Aufgaben ungleich mehr vervielfältigen.

§. 365. Von der Theorie haben wir das nöthigſte in Ruckſicht auf die Geſchichte bey den vorhergehenden Hauptſtücken vorgetragen. Wir nennen dahero gegenwärtig nur diejenige Schriftſteller, welche blos die practiſche Rechenkunſt, ohne Theorie, dergeſtalten erläutert haben, daß man ſie einem gleichſam mechaniſch beybringen kann. Hieher gehören nun Gemma Friſius, deſſen leichte Methode der practiſchen Arithmetik zu Wittenberg 1544 herauskame; Herr von Wolf ſchreibt von dieſem Buch, er habe als ein Knabe noch die ganze practiſche Rechenkunſt, auch die Ausziehung der Wurzeln, ohne Beyhülfe eines Lehrmeiſters, allein aus dieſem Büchlein, (dann es beſteht nur aus eilf Bögen) gelernt; Elem. Math. Vniv. T. V. P. I. C. II. §. 18. Ferner gehört hieher Adrian Metius, der zwey Bücher von der Rechenkunſt 1640 zu Copenhagen herausgab; vorzüglich aber unter den Neuern K. F. de Rees, ein Holländer, deſſen Büchlein von der practiſchen Rechenkunſt 1739 zu Göttingen in das Teutſche überſetzt wurde und im Druck erſchiene. Er hat alle Aufgaben, die auf der Lehre der Proportionen beruhen, durch eine Regel, die von ihm die Reeſiſche heißt, alſo aufgelößt, daß man ohne alle Theorie blos mechaniſch die Sache einem Knaben beybringen kann.

§. 366. Anmerk. Die Rechenmaſchinen könnte man auch noch hieher zehlen. Dergleichen eine hat Sam. Morland 1671 zu London bekannt gemacht. Eine andere, die noch künſtlicher iſt, hat Leibnitz ſchon in ſeiner Jugend erfunden. Und noch eine andere, wiewohl nicht ſo brauchbare, hat Joh. Polenus mit vielem Witz ausgedacht. Der Nutzen von allen beſteht darinnen, daß man durch ihre Hülfe mechaniſch addiren und ſubtrahiren, und ohne das Einmal Eins multipliciren und dividiren kann. Inzwiſchen iſt es doch beſſer, wenn man die vier Rechnungsarten

wohl lernet, weil es nicht fein läßt, wenn man dasjenige, wozu einem GOtt Verſtand und Witz verliehen hat, ſich gar zu bequem machen will. Eben dieſes müſſen wir von einigen andern Bemühungen ſagen, welche man ſonſten in der practiſchen Arithmetik zu rühmen pflegt. Es ſind die Neperiſche Stäblein, welche übrigens auf eine ungemein witzige Art ausgedacht ſind; indeme man durch ihre Beyhülfe, wenn man nur addiren und ſubtrahiren kann, die größte Zahlen ſchnell multipliciren und dividiren lernt. Allein man muß beſonders bey groſſen Zahlen ein halb Hundert ſolche Stäblein, oder wenigſtens etliche Dutzend, immer bey ſich tragen, um im Fall einer vorkommenden Rechnung ſogleich das verlangte finden zu können. Mich dünkt, es ſey beſſer, die arithmetiſche Regeln und das Einmal Eins im Kopf, als ſolche Menge Holz in der Taſche zu haben, wenn man auch in der Ausübung fertig werden will; zur Theorie braucht man ſie ſo nicht. Joh. Neper, ein ſchottländiſcher Baron, der ſich um die logarithmiſche Rechnung, davon wir in der Geſchichte der Trigonometrie reden werden, ungleich höher verdient gemacht, hat dieſe Stäblein zu Anfang des vorigen Jahrhunderts erfunden und bekannt gemacht; Sam. Reyher, Prof. der Math. zu Kiel, ahmte ihm nach, und verfertigte ähnliche Sexagenal-Stäblein, die er 1688 bekannt machte, und durch welche die logiſtiſche Rechnung erleichtert wird. Die Zeichnungen und Figuren davon laſſen ſich nicht verſtändlich genug geben. Man muß ſie cörperlich ſehen, um einen ganzen Begriff davon zu bekommen. Es iſt aber, wie wir ſchon gemeldet, kein ſonderlicher Schade, wenn man ſie nie geſehen, und hingegen ein Vortheil für den Verſtand, wenn man ſich nicht daran gewöhnet hat.

§. 367. Anm. Einen Vortheil, deſſen man ſich aus Noth bedienen muß, und welchen wir ungleich höher halten als die bisherige, können wir nicht ganz übergehen. Wenn einem einer der äuſſerlichen Sinnen, und beſonders der Hauptſinn, nemlich das Geſicht, fehlet, ſo iſt es keine Bequemlichkeit, woferne er ſolche oder ähnliche Hülfsmittel ſuchet. Das war der Fall, in welchem der blind geweſene Prof. der Math. zu Cambridge, Nahmens Saunderſon, ſich befande. Er ſahe ſich durch ſeine äuſſerliche Blindheit genöthigt, auf ein Mittel zu ſinnen, ohne Augen ſo ſchnell und ſo gut rechnen und calculiren zu können, als mit ſehenden Augen. Er ſetzte alſo in die Stelle des Geſichts das Gefühl, und verſuchte es, ob er nicht mit dem Gefühl obiges bewerkſtelligen könnte, was ihm die Abweſenheit des Geſichts verſagte. Sein Verſuch iſt ihm auch nicht mißlungen. Er beſteht im folgenden. Statt der neun Zahlzeichen wählte er neun Quadrate oder Vierecke, deren jedes in vier kleinere eingetheilt war, durch welche Eintheilung er neun Durchſchnitte des gröſſern Quadrats bekam; in welche Durchſchnitte er die 9 Einheiten

der Zahlen alſo ſetzte, daß er in die Mitte des groſſen Quadrats eins, gerad oben 2, zur Linken der 2 weiter 3, herabwarts 4 u. ſ. w. ſetzte, bis alle neun Zahlen in die
Fig. 2. Durchſchnitte des Quadrats kamen, wie Fig. 2. zeiget. Um nun damit rechnen zu können, ließ er ſich für die neun Einheiten neun ſolche Quadrate machen, davon jedes nur in der ihm angewiſenen Stelle die für dieſe Stelle gehörige Einheit enthielte; das zehnte Quadrat war eine Nulle, wo in der Mitte die Nulle befindlich ſeyn mußte, wovon wir den Grund ſogleich einſehen werden. Weil er aber durch das Gefühl rechnete, ſo ließ er in die 9 Durchſchnitte des Quadrats kleine Oeffnungen bohren, daß eine Stecknadel darinnen Platz hatte, die mittelſte Oeffnung für die Nulle, wenn kein Eins da war, ließ er etwas gröſſer bohren, und ſteckte jedesmal die gröſte Stecknadel
Fig. 3. darein. Wir haben die Sache Fig. 3. ausgedruckt. Wollte er nun eine Zahl durchs Gefühl leſen, oder mit mehrern
Fig. 4. rechnen, ſo ſetzte er ſeine Quadrate, wie Fig. 4. und kam damit durch die Uebung ſo ſchnell zurechte, als wir mit ſehenden Augen immer zurechte kommen können. In der angeführten Figur ſtehen die Zahlen 94084 und 84358 nebſt deren Summe 178442, welche man nach den Quadraten ſetzen und beſtimmen kann. Dann weil man nach dem Gefühl, aus der gröſſeſten Stecknadel oder Oeffnung in der Mitte auf den Platz jeden Zahlzeichens ſchlieſſet, ſo darf man die kleinere Stecknadel jedesmal nur in ihre durchs Gefühl zu findende Stelle ſtecken, und hernach die gefundene Zahl aus dem Gefühl ausſprechen. Es iſt ohne unſer Erinnern klar, daß man auf dieſe Weiſe alle Rechnungsarten anbringen kann; Herr Saunderſon hat ſeine Manier auch mit vielem Nutzen in der Geometrie gebraucht, und faſt alles, was ein ſehender Mathematicus leiſten kann, damit geleiſtet; die Methode iſt aber nur für natürlich Blinde, die Sehende werden ſich keiner ſolchen Hülfsmittel bedienen, unerachtet ſie in der practiſchen palpablen Arithmetik vor allen andern einen Vorzug verdient, weil ſie nicht zur bloſſen Bequemlichkeit, ſondern aus Noth erfunden worden iſt. Uebrigens melden wir noch, daß Herr Saunderſon, aus der Provinz York gebürtig, im erſten Jahr ſeines Alters durch die Kindsblattern völlig um ſein Geſicht gekommen iſt. Dem ungeachtet hat ſein fähiges Naturell und ſein anhaltender Fleiß zu jedermanns Verwunderung es ſo weit gebracht, daß man ihm die Stelle eines Prof. der Mathematik zu Cambridge anvertraute, welche er auch mit groſſem Ruhm bekleidete, wie unter andern die in engliſcher Sprache von ihm aufgeſetzte

Ele-

Elemente der Algebra, die 1741. in zween Quartbänden etliche Jahre nach ſeinem Tod herauskamen, einen hinlänglichen Beweis davon geben.

Von den vier Rechnungsarten in genannten Zahlen.

§. 367. Erklär. Genannte Zahlen ſind ſolche Zahlen, denen am Ende der Nahme ihrer Einheit beygefüget wird. z. E. 5 fl. 6 Thl. 3 ggr. 7 kr. u. ſ. w.

§. 368. Zuſatz. Weil man nur Zahlen von einer Art oder von einerley Einheit zuſammen zehlen kann §. 15, ſo iſt klar, daß man bey Anwendung der vier Rechnungsarten auf die genannte Zahlen, ſolche Zahlen unter einerley Benennung bringen muß.

§. 369. Exempel. Die Sache läßt ſich am beſten durch Exempel erläutern.

Addition.

5 fl.	30 kr.	5 hl.
2 fl.	50 kr.	3 hl.
	40 kr.	1 hl.
9 fl.	1 kr.	3 hl.

Man ſoll das vorgegebene Exempel addiren; ſo ſagt man, 5 und 3 und 1 hl geben 9 Heller; weil nun 6 hl. einen kr. machen, ſo ſezt man nur 3 hl. und behält die 6 als eine Einheit der kr. in die nächſtfolgende Stelle der kr.; wo es heißt: 30 und 50 geben 80, und 40 dazu, geben 120, und einen kr. behalten, geben 121 kr. das iſt, weil 60 kr. einen Gulden machen, folglich 120 = 2, 60 = 2 fl. zuſammen 2 fl. 1 kr. man ſezt alſo 1 kr. in die Stelle der kr. und behält 2 fl. = 120 kr. für die Stellen der Gulden; wo es abermal heißt 5 und 2 geben 7 fl. und 2 behalten geben 9 fl.

Subtraction.

3 fl.	2 kr.	3 hl.
2 fl.	20 kr.	5 hl.
	41 kr.	4 hl.

Bey der Subtraction heißt es: 5 hl. von 3 hl. laſſen ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der kr. einen Kreuzer, das iſt 6 Heller; dieſe zu 3 addirt, geben 9 Heller; von neun Hellern laſſen ſich 5 abziehen, der Reſt iſt 4 hl. Ferner 20 kr. von 1 kr. (weil einer für die

Heller entlehnt wurde) laſſen ſich nicht abziehen, man entlehnt alſo aus der Stelle der Gulden 1, daß eine Einheit 60 kr. macht; 20 kr. von 61 kr. laſſen 41 kr. endlich 2 fl. von 2 fl. (weil einer für die Stelle der Kreuzer entlehrt wurde) laſſen nichts. Alſo iſt der Reſt 41 kr. 3 hl.

Multiplication.

2 fl.	23 kr.
	3
6 fl.	69 kr.
7 fl.	9 kr.

Wenn man 2 fl. 23 kr. dreymal nehmen ſolle, ſo hat man 3 . 23 = 69 = 60 + 9 = 1 fl. + 6 kr.; und 3 . 2 = 6 fl. 96 kr. iſt zuſammen addirt 7 fl. + 9 kr.; wo man in dem gegenwärtigen Fall die Gulden nicht zu kr. machen darf; hingegen bey der Diviſion,

Diviſion.

3 fl. 20 kr. oder in kr.
60
180 + 20 kr. das iſt
200 kr. } 50 kr.
4

wenn 3 fl. 20 kr. unter 4 getheilt werden ſollen, muß man zuerſt alles zu kr. machen, welches durch die Multiplication der Gulden mit 60 geſchiehet, zum Product werden die 20 kr. addirt, die Summe 200 wird in 4 dividirt; der Quotient 50 kr. zeigt an, wie viel einer von den vieren bekomme; ſollte der Quotient über ſechszig ſich belaufen, ſo muß man mit 60 dividiren, der Quotient wird hernach die Gulden beſtimmen; und was übrig bleibt, ſind kr.

§. 370. Zuſatz. Es iſt klar, daß man bey dieſer Rechnung wiſſen muß, wie viel Heller ein kr., wie viel kr. ein fl. u. ſ. w. oder im Frucht- und Weinmaß, wie viel Simri ein Scheffel, wie viel Maaß ein Aymer, wie viel Aymer ein Fuder u. ſ. w. machen, welches man hier um ſo eher vorausſetzen darf, als das wirkliche Maaß in einem jeden Land verſchieden iſt, wie man denn z. E. Geld in Sachſen mit pf. ggr. und Thl., bey uns mit hl. kr. und fl. rechnet u. ſ. w. dahero man kein gewiſes Maaß feſtſetzen kann.

§. 371. Zuſatz. Wenn einem die Rechnung bey der Subtraction wegen dem Entlehnen beſchwerlich iſt, ſo darf man nur nach der Buchſtabenrechnung ſubtrahiren, in welchem Fall man nicht irren kann.

kann, wenn man auch ſchon nicht weiß, wie viel hl. einen kr., wie viel kr. einen fl. machen u. ſ. w. Das obige Exempel würde alſo folgender Geſtalt ausſehen;

	3 fl. +	2 kr. +	3 hl.
	2 fl. +	20 kr. +	5 hl.
	—	—	—
	1 fl. —	18 kr. —	2 hl. wo die Querſtriche minus bedeuten.
das iſt	+	41 kr. +	4 hl.

§. 372. Anm. Wenn in einer ſtarken Rechnung viele Brüche vorkommen, die man zu ſummiren hat, ſo iſt es gut, wenn man ſchnell den kleinſten Nenner finden kann, weil man ſonſt viel Zeit und Papier gebraucht, woferne man nach den gewöhnlichen Regeln Fuß vor Fuß rechnen müßte. Es wird aber der kleinſte Nenner gefunden, wenn man alle Nenner zuſammen auf eine Seite ſezt, was ſich aufheben läßt, aufhebt, doch ſo, daß man das, womit man aufhebt, beyſezt, und die übrige Zahlen hernach multiplicirt. z. E. bey Gulden

fl.	360 kleinſter	Nenner
	Nenner.	5 . 9 . 8 . 4 . 2 aufgehoben mit 4.
	kleinſte Zehler	5 . 9 . 2 . 2 . 2 . = 360 kleinſte Nenner.
$\frac{2}{5}$	-- 72 --	144
$\frac{2}{9}$	-- 40 --	80
$\frac{1}{8}$	-- 45 --	45
$\frac{3}{4}$	-- 90 --	270
$\frac{1}{2}$	-- 180 --	180

$\frac{719}{360} = 1\frac{359}{360}$.

Wenn man nun dieſen kleinſten Nenner mit jedem Nenner dividirt, und hernach mit dem Zehler wieder multiplicirt, ſo bekommt man alle kleinſte Zehler; z. E. 5 in 360 iſt enthalten 72 mal; diß 2mal genommen gibt den Zehler 144; 9 in 360 iſt enthalten 40 mal; diß 2mal genommen gibt den Zehler 80; 8 in 360 iſt enthalten 45 mal; diß einmal genommen gibt den Zehler 45; 4 in 360 iſt enthalten 90 mal; diß dreymal genommen iſt 270; 2 in 360 iſt enthalten 180 mal, diß einmal genommen iſt 180; die einzele Zehler zuſammen addirt geben $\frac{719}{360} = 1\frac{359}{360}$ fl.

§. 373. Anm. Wenn man einen Bruch ſchnell in genannten Zahlen, z. E. den Bruch von Gulden in Kreuzer, u. ſ. w. ausdrucken will, ſo hat man nur dieſe einige Regel zu befolgen:

Man multiplicirt den Zehler des Bruchs in die Anzahl der Einheiten, die auf die gegebene Gröſſe gehen; z. E. bey Gulden wird der Zehler mit 60 multiplicirt; was nach geſchehener Diviſion im Quotienten herauskommt, ſind Kreuzer, und was übrig bleibt ſind Brüche von Kreuzern; da alſo nach dem vorigen

Exempel $\frac{359}{360}$ fl. $= \frac{359.60}{360}$ kr. $=$

```
   3(3
 2 1 5(4 |0
   3 6 6 |0   ] 59 kr. 34/36 kr.
     3
```

will man dieſe $\frac{34}{36}$ kr. zu Heller machen, ſo multiplicirt man den Zehler mit 6, weil 6 Heller einen kr. geben; $\frac{34}{36}$ kr. $= \frac{34.6}{36}$ hl.

```
   2
= 2 0 4 ] 5 24/36 hl. = 5 2/3 hl.
  3 6
```

wenn man den Bruch mit 6, a oder mit 12 aufhebt oder kleiner macht. So ſind $\frac{5}{6}$ fl. $= \frac{5.60}{6} =$ 50 kr.; $\frac{11}{12}$ fl. $= \frac{11.60}{12} = \frac{660}{12} =$ 55 kr. u. ſ. w. Der Grund davon iſt die Lehre der Proportion. Der gegebene Nenner verhält ſich zu ſeinem Zehler, wie der neue Nenner (hier der Gulden auf Kreuzer reducirt 60) zum neuen Zehler.

§. 374. Anm. Bey weitläuftigen Rechnungen, wo viele Brüche vorkommen, iſt es auch gut, wenn man die Brüche durch Decimalfractionen gleichförmig zu machen ſucht; wovon §. 80 folg. dann kürzer und leichter kann die Lehre von Decimalbrüchen nicht vorgetragen werden, als im angeführten §. geſchehen.

Von der Regel Detri, ſowohl directa als inverſa, der zuſammengeſezten Regel Detri oder Regel Quinque, Geſellſchaftsrechnung, Kettenregel u. ſ. w.

§. 375. Erkl. Die Regel Detri, oder Regula trium, iſt die Regel, aus drey gegebenen Stücken ein viertes, das unbekannt iſt, kraft der geometriſchen Proportion zu finden.

§. 376. Zuſatz. Die gegebene Stücke müſſen alſo unter ſich und mit dem geſuchten in einer wah-

wahren geometriſchen Verhältniß ſtehen; dann ſonſt läßt ſich die Regel nicht anbringen.

§. 377. Anm. Wenn man z. E. ſagt, in Zeit von einer Stunde laufen aus dem Boden eines Faſſes zween Aymer aus; und glaubt, in drey Stunden werden ſechs auslaufen: ſo irrt man ſich; dann die gegebene Dinge ſtehen in keiner völlig geometriſchen Proportion, wie man aus hydroſtatiſchen Gründen weiß; in der erſten Stunde lauft mehr aus als in der zweyten, weil der Druck ungleich iſt. Die Erfahrung lehrt eben dieſes. Ein volles Faß lauft ſtärker als ein um die Helfte leeres. Man muß alſo die Sachen, die eine geometriſche Verhältniß haben, wiſſen; z. E. Waaren und Preiß; Arbeit und Lohn; Einlag und Gewinnſt bey geſellſchaftlichen Rechnungen u. ſ. w. ſtehen in geometriſcher Verhältniß.

§. 378. Erklär. Die Regula trium directa heißt, wenn die gleichnahmigte Glieder ſich auf einander in ihren gehörigen Stellen beziehen, nemlich das erſte auf das dritte, das zweyte auf das vierte; z. E. 100 fl. geben 5 Procent, was geben 250 fl. Hingegen iſt ſie inverſa, wenn die Glieder ſich nicht in dieſer Ordnung auf einander beziehen, ſondern verſetzt werden müſſen, wenn das geſuchte richtig gefunden werden ſolle; z. E. 100 Soldaten machen eine Schanze in 6 Tagen, wie viel braucht man Soldaten, wenn ſie in 2 Tagen fertig werden ſolle; der Verſtand gibt dreymal ſo viel; ich darf alſo nicht ſetzen 6. T: 100 S = 2 T zu x S. dann da kämen dreymal weniger heraus; ſondern ich muß ſetzen 2 Tag : 6 T. = 100 : x, in welchem Fall $x = \frac{600}{2}$ = 300 Soldaten.

§. 379. Anm. Anfängern fällt es ſchwer, die Sache jedesmal genau zu unterſcheiden, wir wollen dahero die Reeſiſche Rechnung hiebey anzubringen ſuchen, und ſolche Regeln geben, dabey auch der ſchwächſte Anfänger nicht irren kann; nur müſſen wir vorher noch einige Erklärungen vorausſetzen, damit wir die Reeſiſche Rechnung hernach auf alle Fälle anwenden können.

§. 380. Erklär. Die zuſammengeſetzte Regel Detri, oder Regula trium compoſita, die auch Regula quinque heißt, lehret ſolche Aufgaben aufloͤſen, bey welchen man die Regel Detri mehr als einmal anbringt; ſie beruhet auf den Gruͤnden, die wir §. 281. folg. vorgetragen haben. z. E. 100 fl. geben in 3 Jahren 15 Procent, was geben 1000 innerhalb 10 Jahren? Wo man erſtlich ſetzt: 100 fl. geben 15 Procent, was geben 1000? (beederſeits in 3 Jahren) was herauskommt, nenne man a Procent; dann faͤhrt man zweytens fort, 3 Jahr geben a Procent, was geben 10 Jahr? (beederſeits von tauſend fl. Capital). Aber auch dieſe Rechnung wird durch die Reeßiſche Regel erleichtert. Die Kettenregel iſt die vorige, aber nur ſo, daß man die Regel Detri nicht nur 2, ſondern 3, 4, 5 und noch mehrmalen dabey anbringt. z. E. Wann das Fuder Wein 100 fl. koſtet, was koſtet die Maas? Oder bey Wechſelrechnungen, wenn 4 Ducaten 11 Thaler, 2 Thaler 3 fl, 20 gr. ein fl. machen; wie viel Groſchen geben einen Ducaten? Die Aufloͤſung gruͤndet ſich auf §. 283. Sie laͤßt ſich aber auch durch die Reeſiſche Rechnung mechaniſch lernen. Die Geſellſchaftsrechnung iſt, wenn mehrere zuſammen legen, und hernach Gewinnſt und Verluſt mit einander nach Proportion des Eingelegten theilen. Mit dieſer Rechnung iſt die Vermiſchungsrechnung (Regula Alligationis) einerley, wenn man aus der gegebenen Verhaͤltniß der einfachen Materien finden ſolle, wie viel von jeder einfachen Materie zu einer gegebenen Menge der vermiſchten komme.

§. 381. Anm. Dieſes vorausgeſetzt, läßt ſich nun die Reeſſſche Regel leicht anwenden. Sie iſt die folgende: wenn man eine Verticallinie ziehet, und ſie unten durch eine Horizontallinie abſchneidet, hernach die gegebene Glieder auf beeden Seiten der Verticallinie ſo ſetzt, daß beederſeits einerley Nahmen zu ſtehen kommen, welches ſich am beſten bewerkſtelligen läßt, wenn man mit dem unbekannten Glied anfangt; ſo ſind die Producte der Glieder auf beeden Seiten gleich, und das unbekannte wird gefunden, wenn man durch ſeinen Coefficienten das Product auf der andern Seiten dividirt. Dieſe Regel wird vielleicht mehr oder eben ſo viel Deutlichkeit haben, wenn wir ſie folgender maſſen vortragen: Alle Theile einer Gröſſe, wodurch die Gröſſe beſtimmt oder determinirt wird, ſezet man auf einer Seiten der durch ſie beſtimmten Gröſſe wechſelsweiſe gegen über; z. E. 600 fl. geben in ſechs Jahren 50 fl. Procent, was geben 1600 in 4 Jahren? Die ſechshundert Gulden Capital und die Zeit der ſechs Jahre, ſo lang ich ſie ausleyhe, beſtimmen die Gröſſe des Zinſes, a 50 fl. folglich werden 600 fl. u. 6 Jahr als determinirende Gröſſen auf eine, 50 fl. Zins aber, als die dadurch determinirte Gröſſe auf die andere Seite geſetzt; eben ſo 1600 fl. Capital und 4 Jahr Zeit des Ausleyhens beſtimmen x fl. Zins; alſo werden abermal 1600 fl. und 4 Jahr Zeit als determinirende Gröſſen auf die eine, und die determinirte Gröſſen x Zins auf die andere Seite geſetzt.

600 fl.	50 fl. Zins
6 Jahr.	1600 fl.
x Zins	4 Jahr.

$600 \cdot 6 \cdot x = 50 \cdot 1600 \cdot 4$ und

$$x = \frac{50 \cdot 1600 \cdot 4}{600 \cdot 6} = 88\tfrac{8}{9} \text{ fl.}$$

Diß iſt ein Exempel von der Regel von fünf, oder Regula quinque. Bey der Regula trium inverſa pflegt man es eben ſo zu machen. z. E. 200 Soldaten machen in 24 Tagen eine Schanze, wie viel Soldaten braucht man, wenn die Schanze in 6 Tagen fertig werden ſolle? Man ſetzet nach der Regel: Die Zahl der Arbeiter und die Länge der Zeit beſtimmen das Werk, folglich werden 200 Soldaten und 24 Tag, ſo lang ſie arbeiten, auf eine Seite als determinirende Umſtände, die Schanze als das determinirte Werk, auf die andere

200 Sold.	1 Sch.
24 Tag.	x Sold.
1 Schanz	6 Tag.

$200 \cdot 24 = 6 \cdot x$

und $x = \frac{200 \cdot 24}{6} = 800.$

dere Seite geſetzt, eben ſo die Anzahl der verlangten Soldaten, die in 6 Tagen fertig werden ſollen, beſtimmen das Werk wieder; man ſetzet alſo x Soldaten und 6 Tage auf die andere Seite, und die Schanze herüber, damit nicht auf einer Seite einerley ſtehe. Oder ein anders Exempel: Wenn acht Ehlen $\frac{9}{4}$ breites Tuch ein Kleid geben, wie viel braucht man Zeug, der nur drey Viertel breit iſt? Wo man beederſeits den Nenner 4 im Bruch weglaſſen darf, weil die Benennung einerley iſt.

8 Ehl.	1 Kl.
$\frac{9}{4}$ breit	x Ehl.
1 Kl.	$\frac{3}{4}$ breit

$$8 \cdot 9 = x \cdot 3 \text{ und}$$
$$\frac{8 \cdot 9}{3} = x = 24 \text{ Ehl.}$$

Wir wollen noch ein Exempel geben, wo die Zeit mit in die Rechnung kommt. 100 Perſonen verzehren in 3 Wochen 21 Centner Fleiſch, wie viel Perſonen verzehren in 5 Wochen 63 Centner?

100 Perſ.	21 Centn.
3 Woch.	x Perſ.
63 Centner	5 Woch.

$$100 \cdot 3 \cdot 63 = 21 \cdot 5 \cdot x$$
$$\frac{100 \cdot 3 \cdot 63}{21 \cdot 5} = x$$ das iſt, wenn man beederſeits richtig aufhebt,

180 Perſonen.

Bey der Kettenregel befolgt man eben die Methode. Oder man kann auch die andere gebrauchen, mit dem unbekannten Glied anfangen, und hernach ſo fortfahren, daß immer das nächſtvorhergehende Glied wieder auf die entgegengeſetzte Seite zu ſtehen kommt; z. E. das Fuder Wein (bey uns ſechs Aymer) koſtet 96 fl. was koſtet die Maas (der 160ſte Theil vom Aymer?) x kr. koſtet die Maas, nun fährt man auf der andern Seite mit der Maas fort, 160 Maas geben den Aymer, man fährt wieder mit dem Nahmen der Aymer fort; 6 Aymer koſten 96 fl. nun fährt man mit Gulden fort, ein fl. macht 60 kr.; da man dann mit dem Nahmen aufhört, mit welchem man an-

x kr.	1 Ms.
160 Ms.	1 Aym.
6 Aym.	96 fl.
1 fl.	60 kr.

$$x \cdot 160 \cdot 6 = 96 \cdot 60$$
$$x = \frac{96 \cdot 60}{160 \cdot 6} = 6 \text{ kr.}$$

angefangen hat. Eben ſo kann auch die obige Regel berechnet werden: Wie viel Ehlen Zeug oder x Ehlen Zeug geben ein Kleid; ein Kleid braucht ſonſt 8 Ehlen Tuch; eine Ehle Tuch iſt 9 Vrtl. breit, und 3 Vrtl. breit iſt die Ehle Zeug; man hört wieder auf, wie man angefangen hat, und das letzte Glied der vorhergehenden Stelle iſt allemal das erſte der folgenden. Der Grund von dem allem iſt §. 283. angezeigt worden.

x Ehlen Z.	1 Kleid
1 Kleid	8 Ehl. T.
1 Ehle T.	9 Vrtl. br.
3 Vrtl. br.	1 Ehl. Z.

$$3 \cdot x = 8 \cdot 9$$
$$x = \frac{8 \cdot 9}{3} = 24.$$

§. 382. Anm. Wenn Brüche vorkommen, ſo werden die Nenner ausgeſtrichen und wechſelsweiſe auf die entgegengeſetzte Seite als ganze Zahlen gebracht. z. E. $\frac{3}{4}$ ℔. koſten $\frac{7}{9}$ fl. was koſten $\frac{6}{13}$ ℔.? Der Grund beruhet auf der Natur der Proportion: Denn wenn man wie §. 116. ſetzt:

9	$\frac{3}{4}$ ℔.	$\frac{7}{9}$ fl.	
13	x fl.	$\frac{6}{13}$ ℔.	4

$$3 \cdot 9 \cdot 13 \cdot x = 7 \cdot 4 \cdot 6 \text{ und}$$
$$x = \frac{7 \cdot 4 \cdot 6}{3 \cdot 9 \cdot 13}$$

$\frac{3}{4} : \frac{7}{9} = \frac{6}{13} : x$ ſo iſt $\frac{3}{4} \cdot x = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{13}$ und $x = \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{13} \cdot \frac{4}{3}$ wie im Exempel.

§. 383. Anm. Man kann auch die Zahlen, die auf beeden Seiten gleich ſind, oder durch eine dritte Zahl ſich dividiren laſſen, kleiner ausdrucken, ein Verfahren, das man die welſche Practik nennt, welche ſich auf die bekannte Regel bey den Brüchen gründet, die man aufheben, das iſt, kleiner oder mit kleinern Zahlen ausdrucken darf, wenn man den Nenner und Zehler mit einer dritten Zahl dividirt. Nun gibt das Product der einen Columne jedesmal den Zehler, und das Product der andern den Nenner, folglich wenn man auf beeden Seiten mit einer dritten Zahl dividirt, ſo weit man kann, ſo thut man weiter nichts, als was man in der Lehre von den Brüchen längſtens zu thun gewohnt war. z. E.

$$\left\{\begin{array}{r|l} 500\text{ fl. Cap.} & 200\text{ Zins} \\ 10\text{ Jahr} & x\text{ Cap.} \\ 1000\text{ fl. Zins} & 5\text{ Jahr} \end{array}\right\}$$

Wenn 500 fl. Cap. in 10 Jahren 200 fl. Zinß geben, wie groß muß das Cap. ſeyn, daß man in 5 Jahren 1000 fl. Zinß bekomme.?

$$500.10.1000 = 200.5.x \quad :5$$

Man dividire beederſeits mit 5, ſo hat man:

$$100.10.1000 = 200.x \quad :100$$

dieſe Gleichung dividire man wieder mit 100, ſo hat man:

$$10.1000 = 2.x \quad :2$$

$$5.1000 = x$$

die letzte Gleichung dividire man nochmalen mit 2, ſo bekommt man $x = 5000$; ſo groß muß das Capital ſeyn.

§. 384. Anm. Bey der Geſellſchaftsrechnung iſt es am beſten, wenn man die Regel Detri ſo oft anwendet, als Fälle vorhanden ſind. z. E. Drey Kaufleute haben zuſammen gelegt:

A	1000 Thl.
B	700
C	900
	2600 Thl. Damit gewonnen 1500 Thl.

was gewinnt ein jeder? Man ſetzt alſo dreymal

$$2600 : 1500 = 1000 : x$$

oder weil die erſte Verhältniß mit 100 dividirt werden kann,

$$26 : 15 = 1000 : \frac{15.1000}{26} = \frac{15.500}{13} = 576\tfrac{12}{13}$$

$$- \; - \quad 700 : \frac{15.700}{26} = \frac{15.350}{13} = 403\tfrac{11}{13}$$

$$- \; - \quad 900 : \frac{15.900}{26} = \frac{15.450}{13} = 519\tfrac{3}{13}$$

Eben ſo wird die Vermiſchungsrechnung behandelt (Regula Alligationis). z. E. Bey gutem Schießpulver gehören auf ein Pfund oder 32 Loth Salpeter 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel; oder wenn man es halbirt, für ein halb Pf. das iſt 16 Loth Salpeter 3 Loth Kohlen und 2 Loth Schwefel; wie viel braucht man Salpeter, Schwefel und Kohlen zu 1000 Pf. Pulver? Antwort, nach obiger Rechnung $761\frac{19}{21}$ Pf. Salpeter, $142\frac{6}{7}$ Pf. Kohlen; und $95\frac{5}{21}$ Pf. Schwefel.

§. 385.

§. 385. Anm. Zu Abkürzung der Rechnungen pflegt man auch je und je die kleinere genannte Zahlen in Diviſores der gröſſern zu verwandeln, und ohne die Reduction hernach zu multipliciren; z. E. eine Ehle koſtet 14 fl. 26 kr. 3 hl. was koſten 5428 Ehlen? Man ſetzet das Exempel folgender Geſtalt, und multiplicirt zuerſt die obere Zahl durch 14; hernach, ohne noch die Partialproducte zu addiren, zerfällt man 26 in diejenige ſummirende Zahlen, durch die ſich 60 kr. oder 1 fl. bequem dividiren läßt, ſie ſind 20 + 6, dann es iſt 20 = $\frac{1}{3}$ fl. = $\frac{60}{3}$, und 6 = $\frac{1}{10}$ fl. = $\frac{60}{10}$; daher dividirt man im Sinn die Zahl 5428 zuerſt mit 3, hernach mit 10, und ſetzt die Quotienten; ferner weil 3 hl. = $\frac{1}{2}$ kr. = $\frac{1}{60.2}$ = $\frac{1}{120}$ fl. ſo dividirt man noch einmal mit 120, oder weil man im Kopf dividirt, mit 60, welches leichter iſt; und halbirt hernach den Quotienten; worauf man die Partialproducte addirt, die Summe iſt die Antwort auf die Frage; wenn man aber nicht fertig und geübt im Rechnen, beſonders im ſchnellen Dividiren iſt, ſo wird es beſſer ſeyn, wenn man die gewöhnliche Reduction gebraucht.

5428	
14 fl. 26 kr. 3 hl.	
21712	
5428	
$1809\frac{1}{3}$	oder 20 kr.
$542\frac{8}{10}$	oder 48
$45\frac{28}{120}$	od. 14
78389 fl.	— 22 kr.

§. 386. Anm. Diß ſind nun die Exempel von allen Gattungen der Regel Detri und damit verbundenen Regeln, die man in der gemeinen Rechenkunſt zu geben pflegt; wir werden aber auch einige höhere Aufgaben, die aus den Gleichungen gerechnet werden, vorlegen.

Von höhern Aufgaben der practiſchen Rechenkunſt.

§. 387. Die bisher vorgetragene Aufgaben gehören zur practiſchen Rechenkunſt; wenn man aber in den gewöhnlichen Rechenbüchern, in welchen die Buchſtabenrechnung mit dem, was dazu gehört, gar nicht vorgetragen wird, dennoch höhere Aufgaben anbringen, und ich weiß nicht was für Regulas

Cœci,

Cœci, Falſi, u. ſ. w. den Lehrlingen, als was ſonderbares, ohne weitere Anleitung empfehlen will, ſo geht man Umwege:

Z. E. Man ſolle 100 ſo theilen, daß der erſte Theil dreymal ſo groß als der andere, und der andere zweymal ſo groß als der dritte. Man ſetze, der kleinſte Theil ſey 2, ſo iſt der folgende $3.2=6$, und der dritte $2.6=12$. Nun iſt $2+6+12=20$; und nicht 100; folglich das angenommene falſch: doch wird ſich 100 zu dem kleinſten Theil verhalten, wie 20 zu ſeinem kleinſten Theil. Das iſt $20:2=100:\frac{2.100}{20}=10$. Das wird der geſuchte Theil nach der Reg. Falſi ſeyn. Allein algebraiſch iſt das Exempel ſo leicht als kurz folgendermaſſen eingerichtet: $x+3x+6x=100$, das iſt $10x=100$, und $\frac{100}{10}=x=10$. Dahero keine ſolche Umwege, wie oben, nöthig ſind.

§. 388. In der gegenwärtigen Lehre von höhern Aufgaben werde ich ſolche Exempel wählen, bey denen ich jedesmal auf die im zweyten Hauptſtük gegebene allgemeine Auflöſungen den Leſer verweiſen darf. Nur muß ich eines voraus melden, daß der Verſtand bey der erſten Setzung des Problems das meiſte thun müſſe, wenn man die vorkommende Aufgaben richtig auflöſen wolle. Dann unſere Abſicht iſt, beſonders ſolche Exempel zu geben, welche mit Umſtänden, die man weglaſſen kann und ſoll, verbunden ſind; wodurch zugleich der Verſtand geſchärfet wird, aus individuellen Begriffen höhere und allgemeinere zu abſtrahiren.

§. 389. Die ganze Kunſt bey höhern Aufgaben beſteht darinnen, daß man den erſten Satz richtig ausdrücke, oder das Problem verſtehe und hernach richtig ſetze; dann wenn der erſte Satz richtig ausgedruckt iſt, ſo darf man in den folgenden Sätzen nur calculiren, welches eben ſo keine groſſe Kunſt iſt. Ich will das Exempel, das ich in meinen Anfangsgründen aller mathemat. Wiſſenſchaften 1759. I. Th. §. 128. angeführt, und das zu dem Ende vom Newton ſchon vorgetragen wurde, auch hier wieder zu Grund le-

legen, damit man ſehe, wie man ein Problem in Worten und in Zeichen recht ausdrucken, und was für Umſtände man weglaſſen könne.

Exempel.

Ein Kaufmann vermehrt ſein Vermögen jährlich um den dritten Theil, nimmt aber alle Jahr zur Erhaltung ſeiner Familie 100 Pf. Sterl. davon weg; und wird nach drey Jahren noch einmal ſo reich, als er anfänglich war: wie viel hat er alſo Vermögen?

I. Ausdruck in Worten.	II. Ausdruck in Zeichen.
1) Ein Kaufmann beſitzt ein gewiſſes Vermögen,	x
2) wovon er das erſte Jahr 100 Pf. Sterl. braucht;	$x - 100$
3) den Reſt vermehrt er um den dritten Theil;	$x - 100 + \frac{x - 100}{3} = \frac{4x - 400}{3}$
4) das zweyte Jahr braucht er wieder 100 Pf.	$\frac{4x - 400}{3} - 100 = \frac{4x - 700}{3}$
5) den Reſt vermehrt er abermal um den dritten Theil;	$\frac{4x - 700}{3} + \frac{4x - 700}{9} = \frac{16x - 2800}{9}$
6) im dritten Jahr braucht er abermal 100 Pf.	$\frac{16x - 2800}{9} - 100 = \frac{16x - 3700}{9}$
7) den Reſt vermehrt man noch einmal durch den dritten Theil,	$\frac{16x - 3700}{9} + \frac{16x - 3700}{27} = \frac{64x - 14800}{27}$
8) und iſt noch einmal ſo reich als er im Anfang war.	$\frac{64x - 14800}{27} = 2x.$

In dieſem letzten Satz iſt das Exempel geſetzt; man darf alſo nur calculiren, und x ſuchen:

Satz: $\frac{64x - 14800}{27} = 2x$ $\cdot 27$

$64x - 14800 = 54x$

$54x = 54x$ ſubtr.

$10x - 14800 = 0$

$14800 = 1400$ addirt

$10x = 14800$ $:10$

$x = 1480$

§. 390. Anm. Dieſes vorausgeſetzt laſſen ſich folgende Aufgaben leicht auflöſen; wir wollen ſie in einige Claſſen eintheilen, damit man ſogleich ſehe, in welche Gattung der Buchſtabenrechnung ſie gehören.

I. Exempel von einfachen Gleichungen.

Cajus wollte einen Garten um baar Geld kaufen, hat aber ſein Vermögen in Capitalien ſtehen, zu dem Ende will er jedem ſeiner Schuldner einen Theil von ihrem Capital aufkünden, weil es gute Schulden ſind, und er ſein übriges Vermögen gern unter vielen Schuldnern vertheilt behalten will; wenn er nun jedem 50 fl. aufkündet, ſo hat er 100 fl. zu viel, und wenn er jedem 40 fl. aufkündet, ſo hat er 200 fl. zu wenig; man fragt, wie viel er Schuldner habe, was ſein Garten koſte, und wie viel er jedem aufkünden müſſe, daß er weder zu viel noch zu wenig zu dieſem Kaufſchilling einnehme?

Die Anzahl der Schuldner ſey x, ſo iſt der erſte Satz

$$50x - 100 = 40x + 200$$ der Wehrt des Garten.

$$100 = 100$$ add.

$$50x = 40x + 300$$

$$40x = 40x$$ ſubtr.

$$10x = 300$$

: 10

$$x = 30$$ die Anzahl der Schuldner;

$$50 \cdot 30 - 100 = 1400 \text{ fl.}$$ der Wehrt des Garten;

$$30 : 1400 = 1 : \frac{\overset{22}{1400}}{33} \quad 46\tfrac{2}{3} \text{ fl.}$$ zahlt ein jeder Schuldner.

auf eben die Weiſe werden folgende Exempel berechnet.

Titius hat zween ſilberne Becher mit einem gemeinſchaftlichen Deckel, den er für 18 fl. ſchätzet; wenn er den Deckel auf den erſten Becher ſetzt, ſo iſt er noch ſo viel wehrt, als der andere; ſetzt er aber den Deckel auf den andern Becher, ſo ſind beede gleichviel wehrt. Oder er hat zwo Tabattieren, legt er in die erſte 18 fl., ſo iſt ſie noch ſo viel wehrt als die andere, legt er aber die 18 fl. in die andere, ſo ſind beede gleichviel wehrt. Man fragt, wie viel beede Becher oder Tabat-

tieren

tieren wehrt ſeyen? Der Wehrt der einen ſey x der andern y, ſo iſt

Nr. I. $x + 18 = 2y$ und Nr. II. $y + 18 = x$

$$\frac{x+18}{2} = y \quad :2$$

$$18 = 18 \text{ ſubtr.}$$

$$y = x - 18$$

nach Nr. II. $x - 18 = y$

$$\frac{x+18}{2} = x - 18$$

$$\cdot 2$$

$$x + 18 = 2x - 36$$

$$36 = 36 \text{ add.}$$

$$x + 54 = 2x$$

$$x = x \text{ ſubtr.}$$

$54 = x$. der Wehrt des erſten Bechers oder der erſten Tabattiere; folglich

weil $y = x - 18$ nach nr. II. ſo iſt, wenn man ſubtr.

$y = 54 - 18 = 36$. der Wehrt des zweyten.

Eben ſo iſt das alte Exempel zu rechnen: Der Mauleſel ſagt zum Eſel, wenn du einen Centner Laſt von mir nimmſt, ſo haben wir beede gleich ſchwer; wenn aber ich einen Centner von dir nehme, ſo trage ich noch ſo ſchwer. Wie viel trug ein ieder? Es ſey die Laſt des Eſels y und des Mauleſels x, ſo iſt $x - 1 = y + 1$, und $x + 1 = (y - 1)2 = 2y - 2$; folglich $y + 2 = 2y - 3$, und $y + 5 = 2y$, dahero $y = 5$ die Laſt des Eſels, folglich $x = 7$ die Laſt des Mauleſels. Man begreift von ſelbſt, daß man dieſe Exempel allgemein machen kann, wenn man ſtatt der Zahlen, die gegeben ſind, die Buchſtaben a u. ſ. w. ſetzt.

II. Exempel von einfachen Gleichungen und Proportionen.

Zween Bothen machen einerley Weg; der eine geht ſpäter als der erſtere, aber lauft ſtärker; er wird alſo den erſten einholen. Geſetzt nun, der erſte mache des Tags vier Meil; der zweyte gehe drey Tag ſpäter, und mache hingegen des Tags ſechs Meilen; wenn wird er den erſten einholen? Die geſuchte Zeit heiſſe x Tage; alſo wird der erſte Zeit brauchen $3 + x$ Tage; dann 3 Tage

Tage hat er voraus; und lauft noch ſo lang bis ihn der zweyte einholt, das iſt, nach den ſchon geloffenen 3 Tagen noch x Tage. Der Raum oder Weg, den er bis dahin durchloffen, wird (3+x)4 Meilen machen; denn jeden Tag macht er 4 Meilen; folglich in den erſten 3 Tagen 3.4 Meilen, und in den noch rückſtändigen x Tagen x.4 Meilen; der zweyte Both lauft nur x Tage, jeden Tag aber 6 Meilen, das iſt, in x Tagen, x.6 Meilen; der Weg den beede Bothen laufen, iſt gleich; folglich $6.x = (3+x)4$ oder $6x = 12 + 4x$ folglich $2x = 12$ und $x = 6$. Er holt ihn alſo in 6 Tagen ein. Oder allgemein: man ſetze die drey Tage, welche der erſte früher oder der andere ſpäter ausgegangen $= c$

Die Tagreiſe des erſten, das iſt 4 Meilen $= a$

Die Tagreiſe des letztern, das iſt 6 Meilen $= b$

ſo iſt, weilen beede einerley Weg machen, wie oben

$$\begin{array}{l} bx = ac + ax \\ ax = ax \\ \hline bx - ax = ac \quad \text{oder} \\ (b-a)x = ac \quad \text{folglich} \\ x = \dfrac{ac}{b-a} \end{array}$$

Oder zween Cörper, die mit verſchiedener Geſchwindigkeit bewegt werden, laufen einander nach; man gibt die Diſtanz des einen vom andern, und die Geſchwindigkeit beeder Cörper; man ſolle die Zeit finden, wenn ſie zuſammen ſtoſſen. Die Diſtanz ſey $= c$, die Geſchwindigkeit des langſamen Cörpers $= a$, des ſchnellen $= b$, ſo iſt, weil ſich die Zeiten wie die Geſchwindigketien hier verhalten,

$$a : b = x : c + x \quad \text{folglich}$$

$$ac + ax = bx \quad \text{und}$$

$$ac = bx - ax = (b-a)x \quad \text{wie oben; dahero}$$

$$\frac{ac}{b-c} = x. \quad \text{die allgemeine Formel für alle Fälle dieſer Art.}$$

III. Exempel von Brüchen.

Man ſolle eine Zahl finden, deren Helfte, dritter und vierter Theil um eins gröſſer als die geſuchte Zahl iſt: die geſuchte Zahl ſey x, ſo iſt

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x = x + 1$ oder unter einerley Benennung gebracht

$\frac{12}{24}x + \frac{8}{24}x + \frac{6}{24}x = x + 1$ das iſt addirt

$\frac{26}{24}x = x + 1$

—.24

$$\underline{\qquad\qquad\qquad} \cdot 24$$
$$26x = 24x + 24$$
$$\underline{24x = 24x} \text{ ſubtr.}$$
$$2x = 24$$
$$\underline{\qquad\qquad} : 2$$
$$x = 12.$$ folglich iſt 12 die einige Zahl, die dieſe Eigenſchaft hat.

IV. Exempel von quadratiſchen Gleichungen.

Schwenter meldet von dem unter den Alten berühmten deutſchen Rechenmeiſter, Adam Rieſe, er habe über ſein Symbolum die Zahl 2 in folgender Geheimnißvollen Geſtalt geſetzt $\overset{2}{\underset{2}{2X2}}$; nachgehends habe man herausgebracht, daß er es deßwegen gethan, weil die Zahl 2 die einige ganze Zahl ſey, die quadrirt und zu ſich ſelbſt addirt, einerley Zahl gebe. Man verlangt alſo die Zahl, deren Duplum und Quadrat einander gleich. Sie ſey x, ſo wird der Satz ſeyn:

$$x^2 = 2x$$
$$\underline{\qquad\qquad} : x$$
$$x = 2$$

Dieſe Aufgabe iſt alſo bey ganzen Zahlen beſtimmt; bey Brüchen iſt ſie unbeſtimmt, wie man leicht begreift, indeme eine Menge Zahlen dieſe Eigenſchaft haben, wenn die Frage nicht auf ganze Zahlen eingeſchränkt wird.

Die Aufgaben, welche durch unreine quadratiſche Gleichungen aufgelößt werden, ſind etwas ſchwerer. z. E. Titia wird gefragt, wie alt ſie ſeye? ſie ſagt: meine Mutter hat mich im 40ſten Jahr ihres Alters gebohren; wird man nun mein Alter mit dem gegenwärtigen Alter meiner Mutter multipliciren, ſo kommt das Alter Methuſalah, des älteſten unter allen Menſchen, heraus, der 969 Jahr gelebt hatte. Hieraus kann man mein und meiner Mutter Alter finden.

Der Titia Alter ſeye $= x$
ſo wird der Mutter Alter ſeyn $= x + 40.$

das Product davon $x^2 + 40x = 969.$ eine unreine
man addire nach §. 321. $400 = 400$ quadr. Gleichung

$$x^2 + 40x + 400 = 1369$$

Hieraus iſt die Quadrat-Wurzel $x + 20 = 37.$
$20 = 20$ ſubtrahirt

$x = 17$ der Titia Alter;
folglich $17 + 40$ der Mutter Alter.

Ein ander Exempel von einer reinen Gleichung iſt folgendes: Ein Feldherr ſtellt ſeine Trouppen in ein vollkommenes Quadrat, es bleiben ihm aber 284 Soldaten übrig; nun dieſe nicht müſſig ſtehen zu laſſen, vertheilet er in jede Reyhe einen Soldaten weiter, es fehlen ihm aber hierzu noch 25. Man fragt, wie viel er Soldaten gehabt habe? Die Seite des erſten Quadrats ſeye $= x$, ſo iſt die Anzahl der Soldaten $x^2 + 284$. Des andern Quadrats Seite iſt nach der Aufgabe $x + 1$, folglich ſein Quadrat $x^2 + 2x + 1$, und die Anzahl der Soldaten in dieſem Fall $x^2 + 2x + 1 - 25 = x^2 + 2x - 24$. Folglich, weil die Anzahl der Soldaten einerley iſt,

$x^2 + 284 = x^2 + 2x - 24$. u. wenn man x^2 beederſeits ſubtr.
$284 = 2x - 24$, addirt man beederſeits 24, ſo iſt
$308 = 2x$ und $x = 154$. folglich auf Anzahl Soldaten $(154 : 154) + 284$.

V. Exempel, welche durch Progreßionen und Logarithmen aufgelößt werden.

Wenn einer ſein Geld auf Leibrenten gibt, ſo muß man dieſe Rechnung verſtehen. Ich will ein kurzes Exempel geben:

Cajus hat ſein Geld in Zinſen ſtehen; hat aber nicht genug an den Zinſen, und muß vom Capital jährlich zuſetzen. Geſetzt nun, er brauche alle Jahre gleichviel, und wollte wiſſen, wie lang er noch leben darf, oder wie lang es noch anſtehe, bis er nichts mehr einzunehmen habe, ſo kan man die Sache folgendesmaſſen berechnen.

Das Capital ſey $= a$
Jährlicher Zinß oder das landläufige Procent heiſſe $= \frac{n}{m}$
Das was er im erſten Jahr zuſetzt $= b.$
Die Zeit, wie lang ers treiben kann, das iſt die Anzahl der Jahre, die man ſucht $= x,$

So

So wird er das erſte Jahr

I. An Zinſen brauchen eine Summe $= \frac{na}{m}$

und an Capital zuſetzen $= b$

das iſt, das erſte Jahr wird er verzehren die Summe $= \frac{na}{m} + b$

eine Summe, die in allen folgenden Jahren gleich groß iſt.

II. Das nächſte zweyte Jahr wird ſein Capital, weil er b zuſetzte, nur noch ſeyn $= a - b$

alſo wird er auch weniger Zinſe einnehmen; nemlich gerade ſo viel weniger als b ausgeworfen hatte: das iſt, der Verluſt an Zinſen iſt $= \frac{nb}{m}$

und folglich die Einnahme in Zinſen $= \frac{na}{m} - \frac{nb}{m} = \frac{na - nb}{m}$

Er ſetzt aber das zweyte Jahr wiederum zu, damit er gerade ſo viel wieder einnehme, als er das vorige Jahr eingenommen; er muß alſo erſtlich b und ſodann noch ſo viel vom Capital zuſetzen, als er weniger Zins eingenommen, das iſt, als b das Jahr vorher getragen hatte, d. i. $\frac{nb}{m}$, folglich iſt der ganze Zuſatz vom Capital im zweyten Jahr zuſammen addirt $b + \frac{nb}{m}$, oder unter einerley Benennung gebracht $\frac{mb + nb}{m} = \frac{(m+n)}{m} . b$

III. Was er das dritte, vierte und folgende Jahre zuſetzen muß, findet er durch die Regel Detri nach einer continuirlichen Proportion; wie ſich der Zuſatz des erſten Jahrs zum Zuſatz des zweyten Jahrs verhält, ſo verhält ſich der Zuſatz des zweyten Jahrs zum Zuſatz des dritten, und ſo dieſer zum Zuſatz des vierten; das iſt in Buchſtaben:

$b : \frac{(m+n)}{m}.b = \frac{(m+n)}{m}.b : y$ oder wenn man die erſte Verhältniß mit b dividirt

$\overline{} : b$

$1 : \frac{m+n}{m} = \frac{(m+n)}{m}b : y$ folgl. y oder Zuſ. des 3. Jahrs $= \frac{(m+n)^2 b}{m^2}$

und weil ferner, da die erſte Verhältniß immer bleibt, durch Hülfe der Diviſion,

$1 : \frac{m+n}{m} : \frac{(m+n)^2 b}{m^2} : z$ ſo iſt der Zuſ. des 4ten Jahrs $= \frac{(m+n)^3 b}{m^3}$

und eben ſo der Zuſatz des fünften Jahrs $= \frac{(m+n)^4 b}{m^4}$

alſo iſt jedesmal der Exponent von $m+n$ um eins weniger als die Anzahl der Jahre. Dahero der Zuſatz vom letzten oder vom xten Jahr $= \frac{(m+n)^{x-1} b}{m^{x-1}}$

Man hat dahero folgende Progreßion:

Jahre:	1	2	3	4	5	x
jährl. Zuſ.	b,	$\frac{b(m+n)}{m}$,	$\frac{b(m+n)^2}{m^2}$,	$\frac{b(m+n)^3}{m^3}$,	$\frac{b(m+n)^4}{m^4}$.	$\frac{b(m+n)^{x-1}}{m^{x-1}}$

Die Summe aller dieſer x Zuſätze iſt dem ganzen Capital gleich, weil es durch die jährliche Zuſätze nothwendig zuletzt aufgehen muß. Da nun die Summe der gefundenen geom. Progreßion nach §. 288. gefunden werden kann, ſo iſt nach ſelbigem §. das Capital $a = \left(\frac{b(m+n)^x}{m^x} - b\right) : \frac{m+n}{m} - 1$

und wenn man den Diviſor unter einerley Benennung bringt $\frac{m+n}{m} - 1 = \frac{m+n-m}{m}$

$$\frac{m+n-m}{m} = \frac{n}{m}$$

$a = \left(\frac{b(m+n)^x}{m^x} - b\right) : \frac{n}{m}$ d. i. nach §. 70. $= \left(\frac{b(m+n)^x}{m^x} - b\right) \cdot \frac{m}{n}$

und

und wenn man wirklich multiplicirt $a = \frac{mb(m+n)^x}{nm^x} - \frac{mb}{n}$

jezo darf man nur fort calculiren $\frac{mb}{n} = \frac{mb}{n}$ add.

$$a + \frac{mb}{n} = \frac{mb(m+n)^x}{nm^x} \quad .n$$

$$na + mb = \frac{mb(m+n)^x}{m^x} \quad :m$$

$$\frac{na}{m} + b = \frac{b(m+n)^x}{m^x}$$

Dieſe Gleichung logarithmiſch ausgedruckt nach §. 308. gibt $l\left(\frac{na}{m} + b\right) = lb + xl(m+n) - xlm$

$$lb = lb \quad \text{ſubtr.}$$

$$l\left(\frac{na}{m} + b\right) - lb = xl(m+n) - xlm$$

$$= x(l(m+n) - lm) \quad :l(m+n) - lm$$

$$\frac{l\left(\frac{na}{m} + b\right) - lb}{l(m+n) - lm} = x.$$

§. 391. Wenn man das Exempel in Zahlen auflößt, ſo ſetzt man für Buchſtaben die gehörigen Zahlen; z. E. das Capital ſey 5000 fl. ſo iſt $a = 5000$; der Zins ſey 5 Procent, ſo iſt $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$. Dann 5 iſt der zwanzigſte Theil von hundert; folglich $\frac{na}{m} = \frac{5000}{20}$ $= 250$; es ſeye der jährliche Zuſatz 50 fl. ſo iſt $b = 50$, und $\frac{na}{m}$ $+ b = 250 + 50 = 300$. und weil $\frac{n}{m} = \frac{1}{20}$ ſo iſt $n = 1$, $m = 20$, und $n + m = 21$. Alſo nach der Formel

$$x = \frac{l\left(\frac{na}{m} + b\right) - lb}{l(m+n) - lm} = \frac{l.300 - l.50}{l.21 - l.20}$$

ſchlägt man nun die Logarithmen dieſer Zahlen in der Tabell auf, ſo iſt

 l, 300

$l.\,300 = 24771212$ $\qquad l.\,21 = 13222193$

$l.\,50 = 16989700$ $\qquad l.\,20 = 13010300$

$l.300 - l.30 = 7781512$ $\qquad l.21 - 20 = 211893$

also $\frac{l.\,300 - l.50}{l.\,21 - l.20} = \frac{7781512}{211893} = 36\frac{153364}{211893}$ Jahr = 36 Jahr 264 Tag.

§. 392. Man begreift von ſelbſt, daß man durch dieſe Formel auch das Capital finden kan, wenn die Anzahl der Jahre gegeben iſt, wie man auch den jährlichen Zuſatz aus den gegebenen Jahren und Capital finden kann. Das hier berechnete Exempel, die Jahre zu finden, haben wir deswegen ausführlich vortragen, damit man auch ein Exempel von Logarithmen habe. Unerachtet man es übrigens auch auf eine andere Art berechnen könnte.

§. 393. Ich will noch ein Exempel vom Interuſurario geben, wie ſolches Herr von Leibnitz berechnet, und Herr GehR. Bilfinger gegen die Herrn Juriſten vertheidiget hat. Wenn ich einem hundert Gulden nach einem Jahr erſt zu bezahlen ſchuldig bin, ich will ihn aber jezt gleich bezahlen, ſo fragt man, wie viel ich ihm geben müſſe, das Capital zu fünf Procent gerechnet? Gebe ich ihm jezo 100 fl. ſo gehören mir innerhalb einem Jahr 5 fl. zurück; (weil ich nach Jahresfriſt von dieſen 100 fl. 5 Procent erheben könnte, und alsdann erſt die 100 fl. zahlen dürfte.) Er gibt mir aber jezo gleich die 5 Procent zurück, folglich werde ich ihm in Jahresfriſt den Zins von 5 fl. nemlich 15 kr. ſchuldig; dieſe will ich ihm auch jezt gleich zurück geben; er wird mir alſo in Zeit eines Jahrs den Zins von 15 kr. wieder ſchuldig ſeyn; ſo geht es fort, daß immer einer dem andern aufs neue etwas ſchuldig wird. Wenn nun das Capital a, und der landläufige Zins zu fünf pro Cento $\frac{1}{20}$, ſo gibt es folgende Reyhe

$$a - \frac{a}{20} + \frac{a}{20^2} - \frac{a}{20^3} + \frac{a}{20^4} - \frac{a}{20^5} + \frac{a}{20^6} \text{ u. ſ. w.}$$

Die Summe dieſer Reyhe iſt nach §. 296. $\frac{20a}{20+1} = \frac{20}{21}a.$

Eben ſo geht es bey zwey Jahren:

Cajus iſt mir eine gewiſſe Summe erſt nach zwey Jahren zu bezahlen ſchuldig; was muß er mir geben, wenn er mich übers

übers Jahr ſchon bezahlen will? Antw. $\frac{20a}{21}$. Nun ſeye $\frac{20a}{21}=b$, man fragt, Cajus iſt mir übers Jahr $\frac{20}{21}a = b$ ſchuldig, was muß er mir geben, wenn er mich jezo gleich bezahlt?

Antwort $\frac{20}{21}b$ Nun iſt
$b=\frac{20}{21}a$ alſo ſubſtituirt

$$\frac{20}{21}\cdot\frac{20}{21}a = \frac{20^2}{21^2}a;$$

Eine ähnliche Rechnung macht man bey drey Jahren; bey welchen $\frac{20^3}{21^3}a$ herauskommt; folglich wird für n Jahre $\frac{20^n}{21^n}a$ herauskommen. Dieſe Rechnung haben verſchiedene Rechtsgelehrte, und unter dieſen ſelbſt Herr Pohlak in Matheſi forenſi, wie er es p. 53. 54. edit. 2. geſteht, unrichtig verſtanden, und daher Leibnitzen eines Irrthums auch pravitatis uſurariæ beſchuldigt. Auf die Belehrung Herrn geh. R. Bilfingers aber geſtunde er die gemachte Fehler, wollte aber doch nicht nachgeben, theils wegen den Geſetzen l. 28. C. de Vſur. l. 26. pr. ff. de condict. in debiti, und wegen den damit übereinſtimmenden Placitis aller JCtorum, theils weil er glaubte, Herr geh. Rath Bilfingers Fall ſey moraliſch unmöglich; indeme der Creditor, um keinen Schaden zu haben, den Augenblick ſo bald die Ziuſe einlaufen, ſie wieder anderswo auf Zinſe anlegen müßte. Allein Herr geh. Rath Bilfinger ließ es bey dem erſten Aufſatz ohne Antwort bewenden. Denn wenn man einem ſolche Einwürfe macht, ſo werden die Verſtändige unter dem gelehrten Publico auf keine Antwort mehr warten, ſondern ſelbſt antworten können. Der letzte Einwurf war beſonders von einem ſo gelehrten Mann, als Herr Prof. Pohlak war, faſt nicht zu vermuthen. Es iſt ja ein Unterſchied zwiſchen 8 bis 14 Tagen, und zwiſchen ganzen Jahren. Wenn der Zins in 14 Tagen wieder angelegt wird, ſo verliehre ich zwar etwas, aber nicht ſo viel, als wenn ich ihn gar nicht anlege. Das augenblickliche iſt nur von Leibnitzen angenommen, um die Rechnung zu erleichtern und faßlich zu machen; hätte man einen Zwiſchenraum zwiſchen dem Eingehen und Anlegen der Zinſe angenommen, ſo würde man eine eben ſo richtige Rechnung herausbringen können, ſie würde nur etwas ſchwerer ſeyn; dahero die Herrn Gegner ſich noch mehr darinnen, aus Unwiſſenheit, verfehlen könnten, als in der Leibnitziſchen erſten und natürlichen Rechnung, die ſie nicht einmal ver-

ſtunden, bis ſie Herr geh. Rath Bilſinger erklärt hat. Was aber den Jurid. Einwurf aus l. 28. C. de Vſuris u. ſ. w. betrift, ſo muß man es ſichs gefallen laſſen, wenn die Geſetze etwas wider die Regeln aller öconomiſchen Billigkeit und Klugheit befehlen. Inzwiſchen wird man doch kein Geſetz aufweiſen, daß einem nicht frey ſtehe, entweder auf baar Geld oder auf Zieler zu handeln! So lang nun dieſe juridiſche Geſetze währen, ſo wird allemal ein Oeconom, der nur ein wenig rechnen kan, und nicht wider ſeinen Nutzen handeln will, beſonders bey groſſen Summen, auf baar Geld und nie auf Zieler handeln. Da nun dieſes frey ſteht, ſo werden, wo dieſe oeconomiſche Klugheit angewandt wird, die obige Geſetze nach und nach von ſelbſt unbrauchbar werden, wenn keine Fälle mehr vorkommen, worinnen ein anderer erſt über zehen oder zwanzig Jahren was zu bezahlen ſchuldig ſeyn dörfte.

Die

Die geometriſche Wiſſenſchaften,

oder

die Elementargeometrie, die Trigo=
nometrie, die practiſche Geometrie,
und die höhere Geometrie.

Erſtes Hauptſtück,
von der gemeinen oder Elementargeometrie.

Erklärung.

§. 394.

Die Geometrie iſt eine Wiſſenſchaft der Gröſſen, in ſoferne man auf die Lage, Ordnung und Verbindung ihrer Theile ſiehet; und in dieſem Stück iſt ſie von der Arithmetik, unterſchieden. Ihre Gegenſtände ſind alſo gerade und krumme Linien, und die verſchiedene Verhältniſſen der Linien, Figuren, Flächen, Cörper. Wenn man nun die gerade Linien, und unter den krummen nur die Cirkellinie, nebſt den darauf ſich beziehenden Figuren, Flächen und Cörpern betrachtet, ſo handelt man die ſogenannte Elementargeometrie ab, welche von den Elementen des Euclides dieſen Nahmen hat; dieſe erſte Gründe der Geometrie werden wir jezo im erſten Hauptſtück der geometriſchen Wiſſenſchaften vortragen, vorhero aber das nöthigſte von ihrer Geſchichte noch ſagen.

Geſchichte der Geometrie.

§. 395. Die erſte Anfänge der Geometrie muß man bey den Egyptern ſuchen, welche durch die

die jährliche fruchtbare Ueberſchwemmung des Nils genöthigt wurden, ihre Felder von neuem wieder abzumeſſen und einzutheilen; doch müſſen dieſe erſte Anfänge blos practiſch geweſen ſeyn, weil in den folgenden Zeiten, z. E. nur ein Pythagoras, der doch bey den Egyptern die Geometrie gelernt, erſt nach ſeinem empfangenen Unterricht neue Sätze erfunden, deren vorherige Unwiſſenheit oder Mangel unter den Egyptern noch von einer ſehr geringen Theorie einen zulänglichen Beweis gibt. Dann wenn zu Pythagorä Zeiten die Egypter den pythagoriſchen Lehrſatz noch nicht wußten, ſo müſſen ſie ſehr mittelmäßige Geometer geweſen ſeyn, oder die Nachkommen müſſen die Wiſſenſchaften ihrer Vorfahren vergeſſen haben, wenn man etwa denken möchte, zu Salomons, und noch früher, zu Moſis Zeiten, ſeyen auch die mathematiſche Wiſſenſchaften unter den Egyptern im höchſten Flor geweſen.

§. 396. Was nun die älteſte Geſchichte der theoretiſchen Geometrie betrift, ſo ſoll in Ruckſicht auf die Zeitordnung, Euphorbus aus Phrygien der erſte geweſen, welcher die Linien und ihre Verhältniß betrachtet, und das ungleichſeitige Dreyeck, wie Laertius berichtet, erfunden haben. Auf ihn folgte Thales von Miletus, 632 vor Chriſti Geburt, der erſt im Alter eine Reiſe nach Egypten that, und ſich von den daſigen Prieſtern unterrichten lieſſe, und die Höhe der Pyramiden aus dem Schatten, den ſie warfen, meſſen lernte. Er hat die Gleichheit der Verticalwinkel und der Winkel an der Grundlinie eines gleichſchenklichten Triangels erfunden. Ueberdas meldet Proclus von ihm, er ſey der erſte geweſen, der bewieſen, daß der Cirkel durch einen jeden Diameter in zween gleiche Theile getheilet werden, und daß man in den Cirkel ein gleichſeitiges Dreyeck einſchreiben könne; für welche letztere Erfindung er dem Jupiter einen Ochſen geopfert habe. Woraus man ſiehet, daß er bey den Egyptern auſſer dem Practiſchen wenig Theorie gelernet haben müſſe; ſonſt würden ihm dieſe erſte Erfindungen der Geometrie nicht eigenthümlich zugeſchrieben worden ſeyn, ſondern vielmehr würde man ſagen müſſen, er habe ſie aus Egypten mitgebracht. Auf ihn folgte

Pythagoras, der zuerſt den Nahmen der Mathematik aufbrachte; er reißte in ſeiner Jugend, da er kaum zwanzig Jahr alt war, nach Egypten, und da er im vierzigſten Jahr nach Italien zurück kam, ſo erwarb er ſich in der Philoſophie und Mathematik einen Nahmen. Seine eigene Erfindungen beſtätigen das, was wir von den Egyptern §. 395. geſagt haben. Dann die von ihm ſich herſchreibende Erfindung, daß die Winkel eines jeden geradelinigten Dreyeck zween Rechten oder 180° gleich ſeyn, wie auch der berühmte ſogenannte Pythagoriſche Lehrſatz, daß im rechtwinklichten Dreyeck das Quadrat der größten Seite den beeden Quadraten der übrigen Seiten zuſammen genommen gleich ſeye, ſind ſo nothwendige Sätze, daß die Egypter ohne deren Kenntniß keine ſonderliche theoretiſche Geometrä ſeyn konnten; Sonſt müßte Pythagoras nur ein Plagium begangen, und ſich die Ehre einer Erfindung zugeſchrieben haben, die er den Egyptern zu danken hatte. Für die leztere berühmte Erfindung hat er den Göttern oder den Muſen eine Hecatombe geopfert, wie die alte Verſe lehren:

Pythagoras quondam Diis fecit nobile ſacrum
Inventa eſt illi linea quod celebris.

Plutarch ſagt, es ſeye nur ein Ochs geweſen; Cicero glaubt, der Ochs ſeye nicht natürlich, weil Pythagoras die Schlachtung der Thiere für eine Sünde gehalten, ſondern ein von Meel, oder, wie Porphyrius meynt, ein von Leimen gemachter Ochs geweſen. Pythagoras ſtarb im 80 Jahr ſeines Alters, 540 Jahr vor Chriſti Geburt. Nicht lange hernach kamen die philoſophiſche Schulen zu Athen auf; Socrates war ihr Stifter, und unerachtet er, wie es ein jeder vernünftiger Menſch billigen wird, mehrmalen ſagte, man ſolle ſich nicht zuviel und allein auf dieſe Wiſſenſchaft legen, weil man ſonſt von vielen nützlichen Geſchäften des geſellſchaftlichen Lebens abgezogen würde, ſo war er doch der Geometrie nicht unkundig. Plato, ſein Schüler, war ſchon mehr dafür eingenommen, und nahm keinen Zuhörer in ſeine Academie auf, der die Geometrie nicht wußte; erklärte auch alle Tag, neben andern philoſophiſchen Lehrſätzen, ein geometriſches Problem. Er ſtarb 346 Jahr vor Chriſti Geburt. Die philoſophiſche Anſtalten zu Athen machten unter dem Plato und ſeinen Nachfolgern dieſem Muſenſitz auch in den mathematiſchen Wiſſenſchaften Ehre genug! Das Delphiſche Problem von Verdopplung des Cubi iſt bekannt. Hippocrates von Chius, ein durch die Seeräuber verunglückter Kaufmann, kam nach Athen, ſich über den an ihm begangenen Raub zu beklagen, er wurde mit den Philoſophen bekannt, verließ das vorige Gewerb, und legte

ſich

ſich mit ſolchem Erfolg auf die Geometrie, daß er der erſte von denen war, welche das Delphiſche Problem auf die Erfindung zwoer mittlern Proportionallinien zwiſchen zwo gegebenen Linien reducirte; von dieſer Zeit an wurde nun das Problem nach der leztern Weiſe immer aufgegeben. Eben dieſer Hippocrates hat ſich auch auf die Quadratur des Cirkels gelegt, und man hat von ihm die ſogenannte Lunulam Hippocratis, die er vollkommen geometriſch quadrirte. Sie nuzt aber zur Quadratur des ganzen Cirkels, wie wir an ſeinem Ort hören werden, weiter nichts. Wie dann überhaupt dieſes Geſchäfte in unſern Tagen etwas unnützes iſt, dafür ſich niemand eine groſſe Belohnung verſprechen dürfte. Wovon an ſeinem Ort mit mehrerem gehandelt werden ſolle.

§. 397. In dieſem Zuſtand befanden ſich nun die geometriſche Wiſſenſchaften bis auf den Euclides, der 300 Jahr vor Chriſti Geburt, als der erſte Lehrer der Mathematik zu Alexandrien auch das erſte und allerbeſte geometriſche Handbuch geſchrieben hat. Er iſt von dem Euclides aus Megara, mit welchem ihn einige für eine Perſon halten, wohl zu unterſcheiden. Denn Diogenes Laertius hat des Megarenſiſchen Euclides Leben genau beſchrieben, und alle ſeine Schriften ſorgfältig aufgezeichnet; unter dieſen Schriften aber ſtehen die vortrefliche Elemente der Geometrie nicht. Sie müſſen alſo nicht von dem Megariſchen, ſondern von einem andern Euclides herkommen. Ueber das war der Megariſche Euclid, nach dem Diog. Laert. ein finſterer, murriſcher, zankſüchtiger Philoſoph; der Alexandriniſche Geometra aber der angenehmſte, freundlichſte und liebenswürdigſte Mann von der Welt, wie ihn Pappus nennt; ein Character, der den nachfolgenden Geometern in neuern Zeiten nicht immer beygelegt wird. Wiewohl der Herr von Leibniz eben ſo wenig finſteres, und hingegen eben ſo viel leutſeliges an ſich hatte, als der Alexandriniſche Euclid. Dieſer Geometra ſchrieb nun ein mathe-

matiſches Handbuch oder 15 Elemente in griechiſcher Sprach, welche in das Lateiniſche überſezt, von verſchiedenen Commentatoribus erklärt, und von dem Dechales ſo hoch gehalten wurden, daß er ſie nach der heiligen Schrift für das allerbeſte Buch in der Welt angeprieſen. Die erſte gedrukte Auflage kam 1482 zu Venedig heraus.

§. 398. Joh. Scheubel, Prof. der Math. zu Tübingen, hat 1550 die ſechs erſte Elemente des Euclidis in ſofern verändert herausgegeben, daß er in den Demonſtrationen alles ohne einige Buchſtaben, deren ſich Euclides bedient, mit den eigenen Nahmen der Sachen vorträgt; andere wie Chriſtian Härlin und Conr. Daſypodius zu Strasburg haben ſeine Beweiſe in förmliche Syllogiſmos reſolvirt. Noch andere wie Petr. Ramus, der zu ſeiner Zeit vor etlich hundert Jahren für den gröſten Philoſophen zu Paris gehalten wurde, und Laz. Schoner haben die Ordnung im Euclide verbeſſern wollen. Ramus ſchrieb daher 27 Elemente, die er und ſein Anhang den Euclideiſchen vorzog; zu Frankfurt am Mayn kamen ſie 1599 unter folgendem Titel heraus: *Petri Rami* Arithmetices libri duo, Geometriæ ſeptem & viginti, a *Laz. Schonero* recogniti & aucti. Allein weder die Lehrart noch die Ordnung des Euclides lieſſe ſich durch dieſe Bemühungen verdringen, indeme die gröſte Kenner immer den ungeänderten Euclides allen andern Arbeiten vorgezogen. Nach dieſem folgte Archimedes von Syracus, der ſich 250 Jahr vor Chriſti Geburt einen bleibenden Nahmen machte, und wie in der Mathematik überhaupt, alſo auch beſonders in der Geometrie ſeinen erfindſamen Geiſt zeigte. In der ſphäriſchen Geom. hat man von ihm den ſchönen Lehrſatz, daß die Kugel $\frac{2}{3}$ vom Cylinder ſeye, der einerley Höhe und Grundfläche mit ihr habe. Den Beweis davon ſolle er auf ſein Grabmal, als ein ewiges Monument, zu ſtechen befohlen haben. Er wurde bey der Einnahm von Syracus durch einen Soldaten über ſeinen Cirkeln im 75 Jahr ſeines Alters erſtochen. Die übrige von den Alten, z. E. einen Apollonius, Pappus u. ſ. w. welche vorzüglich die coniſche Sectionen betrachteten, wollen wir in der Geſchichte der höhern Geometrie nennen. Von den Elementen des Euclides merken wir noch an, daß ſeit Erfindung der Buchdruckerkunſt die erſte und ungemein ſeltene Ausgabe zu Venedig 1482 in der Druckerey Erhard Ratdolts von Augſpurg herauskam, die Hr Prof. Käſtner in einem Schreiben 1750. an Herrn Card. Quirini recenſirt.

§. 399. Die Geometrie wurde nun auf dieſem Fuß erhalten, bis vor etlich hundert Jahren mit den übrigen Wiſſenſchaften

ten auch die Geometrie wieder Zuſätze bekam. Den Franc. Vieta haben wir ſchon genannt §. 126. Er iſt aber auch in der Geſchichte der gegenwärtigen Wiſſenſchaft zu nennen. Apollonius gab ein Problem auf, das er περι επαφων nannte, das iſt, einen Cirkel zu beſchreiben, den drey andere gegebene berühren. Adr. Romanus, ein Niederländer, der aber von Löwen nach Würzburg ſich begab, und daſelbſt wohnhaft wurde, glaubte, man müſſe es durch Hülfe der Hyperbeln auflöſen. Vieta hingegen zeigte, daß es aus den Elementen und blos geometriſch reſolvirt werden könne. Romanus hielte dieſe Auflöſung ſo hoch, daß er ſogleich von Würzburg aus nach Frankreich reißte, den Vietam ſprach, und da er ihm vorher ganz unbekannt war, eine ſehr genaue Freundſchaft mit ihm deßwegen ſtiftete. Bey ſeiner Heimreiſe zahlte ihm Vieta die Reiſekoſten, und that ihm viele Ehre an; wie Thuanus L. 129. Hiſt. ſchreibet.

§. 400. In dem gegenwärtigen Jahrhundert hat der Freyherr von Wolf die Lehre von der Aehnlichkeit der Dreyecke aus dem philoſophiſchen Begriff der Aehnlichkeit zu erklären geſucht, und daher in ſeinen mathematiſchen Schriften den alten Euclideiſchen Vortrag und Beweis weggelaſſen; ob er dardurch mehr Deutlichkeit in die Geometrie gebracht, ſtehet nach dem Urtheil verſchiedener Kenner noch dahin! wenigſtens ſollte der Euclideiſche Vortrag auch noch beybehalten worden ſeyn. In unſerer Abhandlung wird man ihn nicht vermiſſen; wir werden aber den Wolfiſchen Beweis auch anführen, und hernach den Leſer aus beeder Vergleichungen ſelbſt urtheilen laſſen. Das weitere, das hier etwa noch geſagt werden könnte, wird in der Ausführung vorkommen.

Allgemeine Sätze von Linien, Winkeln und Figuren.

§. 401. Erkl. Geometriſche Cörper ſtellt man ſich als etwas zuſammenhangendes dergeſtalten

vor,

vor, daß, wo ein Theil aufhöret, ſogleich der andere unmittelbar anfängt. Dieſes unmittelbare Zuſammenhängen heißt eine ſtetige Gröſſe, Con-) tinuum); und die geometriſche Ausdehnung, in die Länge, Breite und Tiefe, nach ebenen oder krummen Richtungen, iſt überhaupt ein Raum, den das Continuum oder die ſtetige Gröſſe nach allen Seiten zu ausfüllt. Die Grenzen des Körpers heißt man **Flächen**, die Grenzen der Flächen **Linien**, die Grenzen der Linien **Punkte**.

§. 402. **Zuſatz.** Weil die Grenze eines Cörpers kein Cörper mehr iſt, ſo hat die Fläche keine cörperliche Ausdehnung, das iſt, der Cörper beſtehet nicht aus Flächen; eben ſo beſtehet die Fläche nicht aus Linien, weil die Linien ihre Grenzen ſind; und aus gleichem Grund erhellet, daß die Linie nicht aus Punkten beſtehe, oder daß die Punkte keine Theile der Linien ſeyen.

§. 403. **Zuſatz.** Dem ungeachtet gibt es überall Punkten in den Linien, weil kein auch noch ſo kleiner Theil der Linie gedacht werden kann, der nicht einen Anfangs- und Endpunkt hätte; und weil die Theile der Linie, ſie mögen groß oder klein ſeyn, wieder Linien ſind, ſo beſteht die Linie aus unendlich viel unendlich kleinen Linien, das iſt, der Verſtand ſtellt ſie als unendlich theilbar vor, wie auch die Flächen und Cörper.

§. 404. **Erklär.** Eine **gerade Linie** (linea recta) iſt, deren Theile alleſamt einerley Richtung (Direction) haben, oder nach einer und eben derſelben Gegend, oder nach einem Punkt zu liegen; *Fig.* 5.

eine krumme aber, deren kein Theil mit dem andern einerley Richtung hat. *Fig.* 6.

§. 405. Zuſatz. Durch zween Punkte überhaupt wird alſo die Lage, (Poſitio,) und durch die zween Endpunkte die Länge, (Magnitudo) einer geraden Linie gegeben; und zwiſchen zween Punkten läßt ſich nur eine gerade Linie ziehen.

§. 406. Anm. Man kann daher die gerade Linie auch als den kürzeſten Weg zwiſchen zween Punkten, und die krumme als einen jeden andern Weg anſehen, doch ſo, daß niemalen ein Theil des Wegs gerade gehe. Oder wie der Freyherr von Wolf definirt; Eine gerade Linie iſt, deren jeder Theil dem Ganzen ähnlich iſt; da die Theile der krummen Linie dem Ganzen unähnlich ſind.

§. 407. Anmerk. Die krumme Linie iſt alſo von der Neigung zweyer geraden Linien in einem Punkt doppelt unterſcheiden; dann erſtlich läßt ſich in den krummen Linien kein gerader Theil angeben, und zweytens kann man nicht beſtimmen, wie weit die Richtung des Punkts jeden Augenblick von der vorigen verſchieden ſeye, oder bey dem Cirkel, wo ſie zwar einerley iſt, wie groß die Neigung ſeye.

§. 408. Willk. Satz. Man mißt eine gerade Linie, durch Ruthen, Schuhe, Zolle, eine Ruthe hält im geometriſchen Maas 10 Schuh, ein Schuh 10 Zoll, ein Zoll 10 Linien; Ruthen ſchreibt man durch eine °, Schuh durch ′, Zoll durch ″, Linien durch ‴, z. E. 12° 3′ 5″ 6‴. Was man ſonſt für Maaße hat, wird in der practiſchen Geometrie gezeigt werden.

§. 409. Erkl. Ebene Flächen (Superficies plana) ſind, von deren jedem Punkt zum andern man gerade Linien ziehen kann; ſo daß alle Punkten dieſer Linien in der Fläche liegen, bey krummen Flächen läßt ſich kein ebener Theil angeben.

§. 410. Erkl. Ein Cirkel *Fig.* 7. entſteht, wenn ſich eine gerade Linie AC um einen veſten

Punkt

Punkt C herum bewegt. Die krumme Linie, die durch dieſe Bewegung entſteht, heißt die Peripherie ADEBGF. Der Punkt C, um welchen ſich AC bewegt, iſt der Mittelpunkt (Centrum), eine jede gerade Linie von dem Mittelpunkt C bis an die Peripherie hin, heißt der Radius, eine Linie von einem Punkt der Peripherie zur andern die Sehne (Chorda) FG, und wenn ſie durch den Mittelpunkt geht, der Diameter oder Durchmeſſer AB, die größte Chorde; Die gerade Linie, die den Cirkel berührt, ohne ihn zu ſchneiden, wie AT die Tangente, ein Theil der Peripherie wie AD, DE, ein Bogen, (Arcus circuli) ein Theil der Circularfläche wie DCE zwiſchen dem Bogen und den Radiis ein Ausſchnitt des Cirkels (ſector Circuli) und ein anderer zwiſchen der Sehne und dem Bogen wie FHG ein Abſchnitt oder Segmentum.

§. 411. Willk. Satz. Man theilet die Peripherie in 360 Theile, die man Grade heißt, weil dieſe Zahl ſich ohne Bruch durch viel andere dividiren läßt; der 60ſte Theil eines Grads heißt eine Minute, der ſechzigſte Theil einer Minute eine Secunde u. ſ. w. man ſchreibt ſie wie im Längenmaas, die Ruthen, Schuhe, Zolle; die Grade = °, die Minuten = ′, die Secunden = ″, u. ſ. w. z. E. 36° 17′ 38″ 5‴ ſind 36 Grad, 17 Minuten, 38 Secunden, 5 Terzen; welche nach der Sexageſimalrechnung berechnet werden.

§. 412. Zuſatz. Weil die Linie AC, die ſich um C herum bewegt, ſich immer gleich bleibt, ſo ſind alle Radii eines und eben deſſelben Cirkels einander gleich.

§. 413. Zuſatz. Weil AC = CB, ſo iſt AB = 2AC; oder der Diameter der doppelte Radius, und der Radius der halbe Diameter.

§. 414. Erklär. Ein ebener Winkel iſt die Neigung zwoer geraden Linien in einem Punkt. z. E. AB, und BC in dem Punkt B. *Fig.* 8. Wenn die Neigung ſo beſchaffen iſt, daß ſich die eine Linie auf keine Seite mehr als auf die andere wendet, wie in *Fig.* 7. CD auf AC, ſo iſt der Winkel ein rechter (Rectus) ACD. Und eine Linie, die auf der andern unter dieſer Bedingung ſteht, heißt eine Perpendicular-Linie, oder lothrecht ſtehende Linie. Ein ſpitziger Winkel (acutus) ABC iſt kleiner als ein rechter, *Fig.* 8. und ein ſtumpfer Winkel (obtuſus) DEF *Fig.* 9. iſt gröſſer als ein rechter.

§. 415. Willk. Satz. Man ſchreibt einen Winkel entweder durch die an die Endpunkte geſezte Buchſtaben ABC, DEF, ſo, daß der Buchſtabe, der die Neigung anzeigt, in die Mitte kommt, oder durch einen in die Neigung geſezten kleinen Buchſtaben, wie *Fig.* 8. 9. die Buchſtaben o, n. Da es heißt, der Winkel n, der Winkel o.

§. 416. Zuſatz. Weil *Fig.* 7. auf dem Diameter AB die Linie DC ſo ſtehen kann, daß ſie ſich weder gegen AC noch CB mehr neiget, und eben dieſes durch die Verlängerung in die entgegengeſezte Seite bewerkſtelligt wird, ſo beſteht ein jeder Cirkel aus vier rechten Winkeln; und weil der vierte Theil von 360°, welche die Peripherie des Cirkels ausmachen, = 90° iſt, ſo hält ein jeder rechter Winkel 90°.

§. 417. Zuſatz. Das Maas eines Winkels iſt alſo ein Cirkelbogen, deſſen Mittelpunkt die Neigung des Winkels iſt, und der zwiſchen den Schenkeln des Winkels, als zween Radiis enthalten iſt.

§. 418. Zuſatz. Weil alle Cirkel, groſſe wie kleine, einerley Zahl von Graden, nemlich 360° halten, ſo iſt es gleichgültig, ob man mit einer groſſen oder kleinen Eröfnung des Cirkels einen Winkel mißt; die Anzahl der Grade iſt beederſeits einerley, nur ſind die einzeln Grade im erſten Fall gröſſer, und im andern kleiner. Dann man begehrt nicht zu wiſſen, wie groß der Bogen ſey, wenn er in eine gerade Linie ausgedehnt würde, ſondern wie viel er Grade halte, oder wie groß die Neignng des Winkels ſeye.

§. 419. **Erklär.** Eine **Figur** iſt eine allenthalben begrenzte ſtetige Gröſſe; ſie iſt **geradelinigt** und eben (rectilinea), wenn ihre Grenzen gerade Linien ſind, oder wenn ſie allenthalben von geraden Linien eingeſchloſſen wird. z. E. **Dreyecke**, die in drey Seiten, **Vierecke**, die in vier, **Vielecke**, die in mehrere Seiten eingeſchloſſen ſind.

§. 420. Zuſatz. Zwo gerade Linien ſchlieſſen alſo keine Figur ein, ſondern man muß wenigſtens drey Linien dazu haben, dahero das Dreyeck die erſte und ſimpelſte geradelinigte Figur iſt.

§. 421. **Erklär.** Dreyecke kann man nach ihren Winkeln und nach ihren Seiten betrachten. In Ruckſicht auf die Seiten gibt es **gleichſeitige**, (æquilatera), wenn alle drey Seiten gleich ſind, **gleichſchenklichte** (æquicrura, iſoſcelia), wenn zwo Seiten gleich ſind, und **ungleichſeitige** Drey-

ecke, (ſcalena) wenn keine Seite der andern gleich iſt. In Ruckſicht auf die Winkel gibt es rechtwinklichte (rectangula), wenn einer von den Winkeln ein rechter iſt, ſtumpfwinklichte (obtuſangula, amblygona) wenn das Dreyeck einen ſtumpfen Winkel enthält, und ſpizwinklichte (acutangula, oxygona) wenn alle drey Winkel ſpitzig ſind. Das ſind die ſechs Gattungen von Dreyecken. Ein **Viereck** hat vier Seiten und vier Winkel; es heißt ein **Quadrat**, wenn alle vier Seiten und Winkel gleich, nemlich rechte Winkel ſind; ein **Rechreck** oder Rectangulum, wenn zwar alle vier Winkel gleich, das iſt, lauter rechte Winkel, hingegen nur zwo gegenüber ſtehende Seiten, alſo nicht alle vier Seiten gleich ſind. Eine **Raute** (Rhombus), wenn alle vier Seiten gleich, die Winkel aber ſchief, und nur zwey gegenüber ſtehende gleich ſind; eine **länglichte Raute** (Rhomboides) wenn nur zwo gegenüber ſtehende Seiten und zwo eben ſo ſtehende Winkel einander gleich ſind. Der allgemeine Nahme für dieſe Gattungen von Vierecken iſt das Parallelogramm; alle andere Vierecke, die nicht ſo beſchaffen ſind, heißt man Trapezia, oder ungleichſeitige Vierecke. Ein **Vieleck** iſt entweder regulair, oder irregulair; jenes hat lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel, dieſes nicht.

§. 422. **Lehrſatz.** Durch zween Winkel, die zuſammen kleiner als 180°, und durch eine Seite, welche die beede Winkel einſchlieſſet, wird nur ein einiges Dreyeck beſtimmt. Dann man verlängere (*Fig.* 15.) die Seite IG, welche mit der gegebenen GH einen Winkel IGH macht, ſo wird ſie der gleichfalls

ver=

verlängerten Seite HL, welche mit HG den Winkel LHG macht, in dem Punkt K begegnen, und das Dreyeck in dieſem einigen Punkt beſtimmen.

§. 423. Zuſatz. Wenn dahero in zween Dreyecken zween Winkel mit der eingeſchloſſenen Seite einander gleich ſind, ſo ſind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das iſt congruent, und dekken einander; und wenn man hundert von ſolcher Beſchaffenheit hätte, ſo würden ſie alle einander decken.

§. 424. Anm. Warum die beede Winkel zuſammen weniger als 180° oder zween rechte Winkel betragen müſſen, wird weiter unten an ſeinem Ort erwieſen werden. Das was zum gegenwärtigen Lehrſatz gehört, iſt völlig erwieſen, nemlich daß durch zwey Winkel, und die eingeſchloſſene Seite ein Dreyeck beſtimmt, und daß folglich alle auf dieſe Weiſe beſtimmte Dreyecke gleich und ähnlich ſeyen.

§. 425. Lehrſatz. Durch zwo Seiten und den eingeſchloſſenen Winkel wird nur ein einiges Dreyeck beſtimmt. Dann nach *Fig.* 14. ſind die Seiten DE und EF gegeben, nebſt dem Winkel DEF, den ſie einſchlieſſen; man kann alſo von D nach F keine andere Linie ziehen, als die Linie DF, weil zwiſchen zween Punkten nur eine einige gerade Linie möglich iſt.

§. 426. Zuſatz. Wenn alſo in zween Dreyecken zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel einander gleich ſind, ſo ſind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, das iſt congruent, und decken einander.

§. 427. Zuſatz. Zwo Seiten mit einem Winkel überhaupt, der nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, beſtimmen das Dreyeck noch nicht, es wäre dann, daß man ſagte, was es für ein Dreyeck ſeye, nem-

lich rechtwinklicht, ſpizwinklicht oder ſtumpfwinklicht; welche Vorausſezungen aber nicht in die erſte und allgemeine Beſtimmungsgründe der ganzen Geometrie gehören. Dann *Fig.* 10. ſeyen gegeben die zwo Seiten AE und AC, und der Winkel C, der nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, ſo werden ſich durch dieſe drey gegebene Stücke die Dreyecke: AEC und ADC beſtimmen laſſen; denn man ſetze den Fuß des Zirkels in A, und beſchreibe mit der Eröfnung AE den Bogen ED, ſo iſt AE = AD. Folglich werden zwo verſchiedene Dreyecke dadurch beſtimmt, die einander nicht decken. Sagt man aber, das Dreyeck ſoll rechtwinklicht ſeyn, und der rechte Winkel iſt bey AB, ſo wird es das △ BAC, ſoll es ſtumpfwinklicht ſeyn, und die gegebene Winkel ſind C, AC, AE, ſo iſt es das △ AEC, ſoll es ſpizwinklicht ſeyn, ſo iſt es das △ ACD.

§. 428. Anm. Man kann aus dieſem Lehrſaz auch zeigen, daß die Winkel an der Grundlinie eines gleichſchenklichten △ gleich ſeyen; wenn man das △ verdoppelt, und beeden hernach eine gemeinſchaftliche Seite läßt; wir werden aber den Beweis unten beſonders vortragen.

§. 429. **Lehrſatz.** Aus drey Seiten, davon je zwo zuſammen gröſſer als die dritte ſeyn müſſen, läßt ſich nur ein einiges Dreyeck beſtimmen. Dann man nehme *Fig.* 13. CD zur Grundlinie an, und lege BC mit dem Punkt C auf D, AB mit dem Punkt B auf D; ſo wird ein Dreyeck beſtimmt, das dem andern vollkommen gleich iſt, wenn man AB mit dem Punkt A auf C, und BC mit dem Punkt B auf D leget; weil in dieſem Fall nur die Lage verändert wird; denn wenn man ſie aus Papier ausſchneidet, und ihre Lage ändert; ſo wird man finden,

den, daß ſie einander vollkommen decken. Eben das folgt, wenn man AB oder BC zur Grundlinie macht; man bekommt allemal congruente Dreyecke, in welchen blos die Lage etwas verändert iſt.

§. 430. Zuſatz. Wenn in zweyen Dreyecken die Seiten einander gleich, ſo ſind die ganze Dreyecke gleich und ähnlich, oder congruent.

§. 431. Zuſatz. Wenn zwo Seiten zuſammen nicht gröſſer ſind als die dritte, ſo treffen ſie über der Grundlinie nicht zuſammen, ſondern fallen entweder in die Grundlinie hinein, und machen alſo wieder eine gerade Linie und keine Figur, oder ſie laſſen eine Oefnung, und geben folglich kein überall begrenztes Continuum.

§. 432. Zuſatz. Ein gleichſeitiges Dreyeck wird durch eine einige Linie oder Seite, und ein gleichſchenklichtes durch die Grundlinie und einen Schenkel beſtimmt.

§. 433. Zuſatz. Nach allen dieſen Lehrſätzen ſind die Winkel, die gleichen Seiten, und die Seiten, die gleichen Winkeln entgegen ſtehen, oder opponirt ſind, einander gleich, eine Seite aber iſt demjenigen Winkel opponirt, der ſie ſchließt; ſo iſt *Fig.* 14. DF dem Winkel E opponirt.

§. 434. Anm. Die angeführte drey Lehrſätze mit ihrem jedesmaligen erſten Zuſatz ſind allgemeine Beſtimmungsgründe durch die ganze Geometrie, und müſſen dahero wohl gefaßt werden. Man könnte den dritten auch aus dem zweyten herleiten, mit Zuziehung der Anmerkung §. 428. allein da man auch in dieſem Fall eben das Aufeinanderlegen der Seiten und Winkel voraus ſezt, wie bey unſerm Beweis, ſo iſt der gegebene eben ſo deutlich. Man muß bey allen dieſen Beweiſen nur an den Grundſatz denken, daß Figuren, die einander decken, wie z. E. bey zwo gleichen Händen die rechte die linke, und die linke die rechte Hand deckt, vollkommen gleich und ähnlich ſind, und

hernach bey dem Beweis im Sinn, oder auch wirklich in der Ausübung mit ausgeſchnittenem Kartenpapier die Figuren aufeinander legen, und ſehen, ob ſie nnter den gegebenen Bedingungen einander decken.

§. 435. **Lehrſatz.** Ein jeder Winkel und eine jede gerade Linie läßt ſich in zween gleiche Theile theilen.

I. Satz. *Fig.* 20.	II. Satz. *Fig.* 19.
o = n.	AC = CB.
Beweis.	nr. I. Beweis.
CE = CF } per conſtr.	AD = DB } per conſtruct.
EG = FG	AE = EB
CG = CG	DE = DE
△CEG = △CFG §. 430.	△ADE = DEB. §. 430.
folgl. o = n. §. 433.	folgl. n = o. §. 433.
	nr. II. n = o } nach nr. I.
	AD = DB
	DC = DC
	△ADC = △CDB. §. 426.
	folgl. AC = CB. §. 433.

§. 436. **Erläuterung.** Man ſoll *Fig.* 20. den Winkel ECF in 2 gleiche Theile theilen, ſo macht man aus dem Scheitel C mit beliebiger Oefnung des Zirkels Durchſchnitte in E und in F, daß CE und CF gleich werden; und eben ſolche Durchſchnitte macht man in G, aus den Punkten E und F, daß EG = GF werde; hernach ziehet man die Linie CG; ſo iſt o = n, oder der Winkel C in zween gleiche Theile getheilt, deren Helfte iſt o und n. Bey der Theilung der geraden Linie AB, macht man aus A und B Durchſchnitte in D und E mit beliebiger Eröfnung des

des Zirkels, daß AD = DB, und AE = EB werden; man zieht die Linie DE durch die Punkten D und E, die ſich ſelbſt gleich iſt, ſo werden AC und CB die zwo Helften der Linie, und in C wird die Linie AB in zween gleiche Theile getheilt ſeyn.

§. 437. Zuſatz. Es erhellet aus §. 435. I. Satz, daß man den halben Winkel wieder halbiren könne u. ſ. w. folglich läßt ſich jeder Winkel in 2, 4, 8, 16, 32 gleiche Theile geometriſch eintheilen. Hingegen die Eintheilung in drey gleiche Theile (Triſectio anguli) gehört ſchon in die höhere Geometrie.

§. 438. Zuſatz. Aus dem Beweis §. 435. II. Satz erhellet, wie man aus einem gegebenen Punkt auf eine gerade Linie einen Perpendikel herabfällen könne; dann der Punkt ſey D, die Linie AB, *Fig.* 19. ſo wird DC auf AB perpendicular ſeyn, weil der Winkel ACD = DCB folglich = 90° wie unten erwieſen werden ſoll.

§. 439. Lehrſatz. In einem gleichſchenklichten Dreyeck ſind die Winkel an der Grundlinie (anguli ad baſin) einander gleich; dann *Fig.* 21. theile man die Grundlinie AE in zween gleiche Theile in D nach §. 435, und ziehe aus dem Punkt D nach der Spitze C die Linie DC, ſo wird ſichs zeigen, daß die Winkel an der Grundlinie o und n gleich ſind.

Satz. o = n.

Beweis.

AC = CE per hypoth. weil es ein gleichſchenk. △ iſt
AD = DE per conſtruct.
DC = DC

△ACD = △DCE. folglich
o = n §. 433.

§. 440.

§. 440. Zuſatz. In einem gleichſeitigen Dreyeck ſind alle drey Winkel einander gleich; denn man kann es in allen Lagen als ein gleichſchenklichtes anſehen, und die dritte gleiche Seite zur Grundlinie machen.

§. 441. Zuſatz. Aus dem gegebenen Beweis erhellet, wie man auf eine Linie aus einem gegebenen Punkt D eine Perpendicularlinie aufrichten ſolle, wenn man *Fig.* 21. DA = DE und AC = EC mit dem Cirkel macht, und ſodann die Linie DC ziehet, ſo iſt ſie auf AD perpendicular.

Die Verhältniß der Winkel gegen einander, nebſt den daraus flieſſenden Folgen.

§. 442. Erklär. Nebenwinkel ſind diejenige Winkel, die aus einem und eben demſelben Punkt einer gegebenen geraden Linie gezogen werden. *Fig.* 16. ACD, DCB, oder n, m ſind Nebenwinkel; denn ſie ſind beede aus dem Punkt C auf der Linie AB gezogen; lat. heiſſen ſie contigui, und wenn es ihrer nur zween ſind, deinceps poſiti. Vertical-Winkel ſind, deren Schenkel im Scheitel beederſeits verlängert einander durchkreuzen, wie *Fig.* 18. die Winkel o und x.

§. 443. Lehrſatz. Alle Nebenwinkel auf einer Linie ſind zuſammen zween rechte, oder 180° gleich.

Saz. *Fig.* 16.

$n + m = 180°$

Bew.

$n = AD$

$m = DB$

$n + m = AD + DB$

$AD + DB = 180° = \text{ſemic.}$

$n + m = 180°$

Saz. *Fig.* 17.

$m + n + o = 180°$

Bew.

$m = DE$

$n = EF$

$o = FG$

$m + n + o = DE + EF + FG$

aber $DE + EF + FG = 180°$

$m + n + o = 180°$

§. 444. Zuſatz. Alle aus einem gegebenen Punkt auf einer geraden Linie gezogene Winkel, welche zuſammen 180° halten, ſind Nebenwinkel.

§. 445. Zuſatz. Iſt einer von zween Winkeln gegeben, ſo weiß man auch den andern; dann es ſey *Fig.* 16. m gegeben, ſo iſt $n = 180° - m$.

§. 446. Zuſatz. Wenn auf einer geraden Linie nur zween Nebenwinkel ſind, und wenn beede einander gleich ſind, ſo iſt einer wie der ander ein rechter; dann es ſey *Fig.* 19. $x = y$. ſo iſt

I. $x + y = 180°$

$x = y$

$2x = 180$

$:2$

$x = 90 = R.$

II. $x + y = 180$

$x = y$

$2y = 180$

$:2$

$y = 90 = \text{Recto}.$

§. 447. Zuſatz. Wenn von zween Nebenwinkeln einer ein rechter iſt, ſo iſt auch der andere ein rechter, iſt aber der eine ſtumpf, ſo iſt der andere ſpitzig, und iſt der eine ſpitzig, ſo iſt der andere ſtumpf.

§. 448.

§. 448. Zuſatz. Alle Winkel um einen feſten Punkt herum halten zuſammen 360°, oder 4 rechte Winkel, oder einen ganzen Zirkel. *Fig.* 17. dann $m + n + o + p + \varepsilon + q = DE + EF + FG + GH + HI + ID = \text{Circ.} = 360° = 4 \cdot 90° = 4.$ Rectis.

§. 449. Lehrſatz. Alle Vertical-Winkel ſind einander gleich. Dann man ziehe aus dem Durchſchnittspunkt bey m *Fig.* 18. mit beliebiger Eröfnung des Zirkels den Theil der Peripherie ABDE, und bemerke neben den zween Vertical-Winkeln noch den Nebenwinkel m, ſo wird der Beweis von ſelbſt ſich geben.

Satz. *Fig.* 18.

$o = x.$

Bew.

$$o + m = 180°$$
$$m + x = 180°$$
$$o + m = m + x$$
$$m = m \text{ ſubtr.}$$
$$o = x.$$

§. 450. Zuſatz. Wenn alſo von zween Vertical-Winkel einer gegeben iſt, ſo iſt der ander auch gegeben; wenn $o = 30°$, ſo iſt auch $x = 30°$.

§. 451. Lehrſatz. In einem jeden geradelinigten Dreyeck ſind zween Winkel zuſammen kleiner als 180°, oder zween rechte Winkel. Man betrachte das △ ABC *Fig.* 22. und theile die Seite AC in zween gleiche Theile in E, nach §. 435. Man ziehe die Linie BE, und verlängere ſie nach F, bis

EF

EF = BE. Man ziehe die Punkte F und C zuſammen, ſo bekommt man das △ EFC = △ ABE; weil nach der Conſtruction AE = EC, EB = EF, und die Vertical-Winkel bey E einander gleich ſind; folglich das △ EFC = △ ABE. Man bezeichne die kleine Winkel s, o, n, m, ſo iſt der Beweis des Lehrſatzes leicht zu finden.

Satz. *Fig.* 22.

$s + o < 180°$

Bew.

△ ABE = △ EFC per conſtr. folgl. nach §. 433.

$s = n$

$n < n + m$

$s < n + m$ §. 23.

$o = o$ add.

$s + o < n + m + o$

$n + m + o = 180°$ §. 443.

$s + o < 180°$

§. 452. Zuſatz. Dieſer Beweis gilt von allen drey Seiten, dann wenn man die Seite AC nach G verlängert, ſo wird ſich der Beweis eben ſo geben, wie er ſich bey der nach D verlängerten Seite BC ergab; alſo ſind allemal zween Winkel in einem Dreyeck zuſammen kleiner als 180°, oder zween Rechte.

§. 453. Zuſatz. Zween an die Endpunkte einer Linie geſezte Winkel können niemalen zuſammen ſtoſſen, es ſey dann, daß ſie kleiner als zween Rechte ſind; in welchem Fall ſie allein convergiren; ſind

ſind ſie aber grǒſſer, ſo divergiren ſie auf der einen, und ſtoſſen auf der entgegengeſezten untern Gegend der Seiten zuſammen, wenn man ſie unterwarts verlǎngert.

§. 454. Zuſatz. Man begreift hieraus zugleich, daß in einem geradelinigten Dreyeck nicht mehr als ein rechter, und nicht mehr als ein ſtumpfer Winkel ſeyn kǒnne; wir werden aber davon unten noch beſonders reden.

§. 455. Erklǎr. Parǎllellinien ſind, welche, wenn man ſie auf beeden Seiten ohne Ende verlǎngert, niemalen zuſammen ſtoſſen. Dergleichen ſind *Fig.* 23. AB, CD.

§. 456. Lehrſatz. Wenn *Fig.* 23. zwo Parallellinien AB, CD durch eine dritte EF durchſchnitten werden, ſo halten

I. Die beede innere Winkel $n + y$ zuſammen $180°$.

II. Die Wechſelswinkel x und y ſind einander gleich.

III. Der ǎuſſere Winkel o iſt dem entgegengeſezten innern y gleich.

I. Saẞ. *Fig.* 23.

$$n + y = 180°$$

Beweis.

Entweder iſt $n + y < 180°$
oder $n + y > 180°$
oder $n + y = 180°$ kein viertes gibt es nicht.

Iſt $n + y < 180°$ ſo werden AB und CD gegen D und B convergiren oder zuſammen ſtoſſen, §. 453. folglich nicht parallel ſeyn;

Iſt

Iſt $n + y > 180°$ ſo werden AB und CD gegen die entgegengeſezte Richtungen A und C zuſammen ſtoſſen nach §. 453. folglich abermal nicht parallel bleiben; da ſie aber nach der Vorausſeʒung parallel ſind, ſo muß nothwendig ſeyn:

$n + y = 180°$.

II. Saʒ.

$x = y$.

Bew.

$n + y = 180°$ nach nr. I.
$n + x = 180°$ nach §. 443.

$n + y = n + x$
$n = n$ ſubtr.

$y = x$.

III. Saʒ.

$o = y$.

Bew.

$n + y = 180°$
$o + n = 180°$

$o + n = n + y$
$n = n$ ſubtr.

$o = y$.

§ 457. Lehrſaʒ. Wenn zwo Linien AB, CD, *Fig.* 23. von einer dritten ſo geſchnitten werden, daß

I. Die beede innern Winkel $n + y = 180°$.

II. Die Wechſels-Winkel x und y einander gleich.

III. Der äuſſere Winkel o dem entgegen geſezten innern gleich; ſo ſind die Linien AB, CD, parallel.

I. Saʒ.

Wenn $n + y = 180°$, ſo ſind AB, CD parallel.

Bew.

Wenn $n + y = 180°$, ſo kann AB und CD gegen B und D nie zuſammen ſtoſſen nach §. 456. nr. I.

aber wenn $n+y=180^\circ$, ſo iſt auch
$x+m=180^\circ$. Dann

$$\left.\begin{array}{l} x+n=180^\circ \\ m+y=180^\circ \end{array}\right\}$$ nach §. 443.

$x+n+m+y=2.180=360^\circ$.
$n+y=180^\circ$ per hypoth. ſubtr.

$x+m=180^\circ$. folgl. kann AB und CD auch nicht gegen A und C zuſammen ſtoſſen nach §. 456. dahero AB u. CD parallel ſind.

II. Satz.

Wenn $x=y$, ſo iſt AB, CD parallel.

Beweis.

$x+n=180^\circ$ nach §. 443.
$x=y$ per hypoth. ſubſtituirt

$y+n=180^\circ$ folglich auch nach nr. I.
$x+m=180^\circ$, und dahero
AB, CD parallel nach §. 455.

III. Satz.

Wenn $o=y$, ſo iſt AB, CD parallel.

Beweis.

$o+n=180^\circ$ nach §. 443.
$o=y$ per hypoth. ſubſtituirt

$y+n=180^\circ$ folglich nach nr. I.
$y+m=180^\circ$

alſo AB, CD parallel nach §. 455.

§. 458. Anm. Der gegebene Beweis iſt der Euclideiſche, mit einer kleinen Veränderung, um die Sache deutlicher zu machen. Herr v. Wolf hat den Euclidiſchen verlaſſen, und folgenden *Fig.* 25. gegeben. Man fälle auf die Linie DE aus dem Punkt

des

des Durchſchnitts H den Perpendikel HE, und auf die Linie CH aus dem Punkt D den Perpendikel DC; ſo ſind die Dreyecke DCH und DEH einander gleich, weil DH = DH, DC = HE, und die Winkel C und E rechte Winkel ſind. §. 427. folgl. x = y. Allein dieſer Beweis ſezt voraus, daß DC = HE; die Sache iſt wahr, aber die Erklärung des Euclides von Parallellinien ſagt nur, daß ſie nie zuſammen ſtoſſen; nicht aber, daß alle Perpendicularlinien zwiſchen zwo parallelen gleich ſeyen, welches erſt eine Folge aus dem Beweis iſt. Gibt man von Parallelen die Erklärung, daß ſie ſolche Linien ſeyen, die auf einer gegebenen CD perpendicular ſtehen, ſo hat der Beweis ſeine Richtigkeit. Euclides aber wollte dieſe Definition nicht geben, ſondern lieber aus der ſeinigen erſt folgern. Man ſehe, was Herr Prof. Käſtner theils in der Vorrede zum I. Th. ſeiner mathem. Anfangsgründe aus Gelegenheit der Einwendung Hrn Corte, theils in der Ausführung S. 181. folgg. davon weiter meldet. Sonſt kann mans auch mechaniſch beweiſen, wenn die Linie CD ſich immer parallel nach AB bewegt.

§. 459. Zuſ. Die Linie CD *Fig.* 25. ſchneide eine von zwey Parallelen unter dem rechten Winkel C, ſo wird auch der andere CDE ein rechter Winkel ſeyn; denn C + CDE = 180° nach §. 456; C = 90, nach der Vorausſetzung, dieſes ſubtrahirt, läßt CDE = 90; eben das gilt von dem Perpendikel HE.

§. 460. Zuſ. Wenn CH = DE, CD = HE, ſo iſt, weil auch vorhin DH = DH, △ CHD = △ DHE, folglich x = y und s = r, daher CH mit DE, nud CD mit HE parallel, das iſt, wenn in einem Viereck je zwo einander gegenüber ſtehende Seiten gleich ſind, ſo ſind ſie auch parallel.

§. 461. Zuſ. Und umgekehrt, wenn je zwo gegen einander über ſtehende Seiten parallel ſind, ſo ſind ſie einander auch gleich, das iſt, Parallelen zwiſchen Parallelen ſind gleich. Dann es ſey CH parallel DE, CD parallel HE, ſo iſt x = y und r = s nach §. 457. folglich △ CDH = △ DHE nach §. 422. und alſo CD = HE, CH = DE.

§. 462. Zuſ. Wenn in einem Parallelogramm ein rechter Winkel iſt, ſo ſind alle vier rechte Winkel; es ſey (*Fig.* 30.) $o = 90$, ſo iſt $n = 90$, $m = 90$, $r = 90°$; dann

I. $o + n = 180°$ nach §. 456.
$o = 90$ per hypoth. ſubtrahirt
$n = 90$.

II. $n + m = 180°$
$n = 90$ nr. I. ſubtr.
$m = 90$

III. $m + r = 180$
$m = 90$ nr. II.
$r = 90$

§. 463. Zuſ. Sind drey oder mehrere Parallelen gezogen, wie *Fig.* 24. ſo wird die ſie ſchneidende Linie bey den Durchſchnitts-Punkten gleiche Wechſels-Winkel, und den äuſſern den entgegen geſetzten innern auch gleich machen, wie aus dem Beweis §. 456. von ſelbſt erhellet, wie dann auch je zween und zween innere jedesmal zuſammen 180° halten werden.

§. 464. Lehrſatz. Alle Winkel in einem geradelinigten Dreyeck, machen zuſammen 180° oder zween rechte Winkel aus. Dann man ziehe mit der Grundlinie DE des Dreyecks, DEC *Fig.* 26. die Parallellinie AC durch den Scheitel C, und bezeichne die Winkel n, o, m, r, s, ſo wird ſich der Beweis von ſelbſt geben.

Satz. *Fig.* 26.
$r + o + s = 180°$.

Bew.
$n = r$ nach §. 456.
$o = o$
$m = s$ nach §. 456. man addire beede Reyhen zuſammen, ſo iſt

$n + o$

$n + o + m = r + o + s$ aber
$n + o + m = 180^\circ$ nach §. 443. folgl.
$r + o + s = 180^\circ$.

§. 465. Zuſ. In einem geradelinigten Dreyeck kann alſo nicht mehr als Ein rechter, und vielweniger mehr als Ein ſtumpfer Winkel ſeyn, die übrige zween müſſen ſpitzig ſeyn; weil ſonſt ihre Summe mehr als 180° betragen würde.

§. 466. Zuſ. In einem gleichſeitigen Dreyeck, wo alle drey Winkel einander gleich ſind, hält ein jeder Winkel 60°, weil $60 = \frac{180}{3}$.

§. 467. Zuſ. In einem rechtwinklichten gleichſchenklichten Dreyeck iſt der Winkel an der Grundlinie = 45°. Denn der rechte Winkel hält 90°, folglich die andern beede auch 90°; und weil ſie einander gleich, jeder 45°.

§. 468. Zuſ. Wenn in einem ungleichſeitigen Dreyeck zween Winkel gegeben ſind, ſo iſt auch der dritte gegeben; er iſt nemlich 180°, weniger die zween gegebene; dann weil alle drey 180° halten, ſo darf man nur die zween gegebene von 180° abziehen, ſo bleibt der dritte übrig.

§. 469. Zuſ. In einem gleichſchenklichten Dreyeck ſind alle drey Winkel gegeben, wenn nur einer gegeben iſt. Dann entweder iſt einer von den gleichen Winkeln an der Grundlinie gegeben oder nicht, iſt jenes, ſo darf man ihn nur verdoppeln, und von 180° abziehen, ſo hat man den dritten; iſt aber dieſer gegeben, ſo darf man ihn von 180° abziehen, und den Reſt halbiren, ſo hat man das Maas der zwey übrigen.

§. 470. Lehrſatz. Der äuſſere Winkel an einem Dreyeck iſt den beeden entgegengeſezten innern gleich. (Angulus externus æqutaur duobus oppoſitis internis) Dann man verlängere *Fig.* 27. 28. die Seiten CA nach B, und bezeichne die Winkel o, n, x, y, ſo iſt der Beweis von ſelbſt zu machen; der äuſſere Winkel iſt nemlich o, die beede entgegengeſezte innere x und y.

Saz. *Fig.* 27. 28.

$o = x + y.$

Beweis.

$o + n = 180^{\circ}$ nach §. 443.

$n + x + y = 180^{\circ}$ nach §. 464.

$o + n = n + x + y$

$n = n$ ſubtr.

$o = x + y.$

§. 471. Zuſ. Wenn der äuſſere Winkel gegeben, ſo ſind die zwey entgegengeſezte innere und auch der dritte, als der Nebenwinkel vom äuſſern Winkel gegeben.

§. 472. Zuſ. In einem gleichſchenklichten Dreyeck iſt der äuſſere Winkel zweymal ſo groß als einer von den entgegengeſezten innern, wenn die innere die Winkel an der Grundlinie ſind; und der Winkel an der Grundlinie iſt die Helfte von dem äuſſern Winkel.

§. 473. Lehrſatz. Der Winkel zwiſchen zwo Parallellinien iſt die Summe der Winkel, den ſeine Schenkel mit den Parallellinien machen. *Fig.* 29. Der Winkel ſey FEG, man verlängere FE bis

H,

H, und bezeichne die Winkel n, x, y, r; ſo iſt die Folge richtig.

Satz. *Fig.* 29.

$n = x + y$.

Beweis.

$n = y + r$ nach §. 470.

$r = x$ nach §. 457. man ſubſtituire

ſo iſt $n = y + x$.

§. 474. Anm. Dieſen Lehrſatz braucht man in der Aſtronomie, wenn man die Parallaxe der Sterne genauer berechnen will; Er verdient dahero wohl, in der Geometrie vorgetragen zu werden, worinnen er bisher wenigſtens in den gewohnten Lehrbüchern noch nicht erſchienen iſt.

§. 475. **Erkl.** Der **Winkel an dem Mittelpunkt** (angulus ad Centrum) iſt derjenige, deſſen Spitze an den Mittelpunkt und deſſen beede Schenkel an die Peripherie des Cirkels ſtoſſen, wie *Fig.* 31. der Winkel ACB, oder o; hingegen der **Winkel an der Peripherie** (angulus ad peripheriam) deſſen Spitze ſo wohl als die beede Schenkel an die Peripherie hinſtoſſen, *Fig.* 31. den Winkel ADB oder x.

§. 476. Zuſ. Der Winkel an dem Mittelpunkt hat zu ſeinem Maas den Bogen auf dem er ſteht. Dann weil AC = CB, ſo iſt AB das Maas des Winkels o nach §. 417.

§. 477. Lehrſatz. Der Winkel an dem Mittelpunkt iſt zweymal ſo groß als der Winkel an der Peripherie, der mit ihm auf einerley Bogen ſteht. Wo es nach *Fig.* 31. 32. 33. drey Fälle gibt, in welchen die Lage dieſer Winkel gegen einander betrachtet werden kann.

I. Fall. Satz. *Fig.* 31.

$o = 2x.$

Bew.

$o = x + y$ nach §. 470.
$x = y$ §. 439.

$o = 2x$ und
$\frac{1}{2}o = x.$

II. Fall. Satz. *Fig.* 32.

$o + m = 2x + 2n.$

Bew.

$\left.\begin{array}{l} o = 2x \\ m = 2n \end{array}\right\}$ nach nr. I.

$o + m = 2x + 2n$ oder
$\frac{o + m}{2} = x + n.$

III. Fall. Satz. *Fig.* 33.

$o = 2x.$

Bew.

$p + o = 2r + 2x$ nach nr. II.
$p = 2r$ ſubtr.

$o = 2x.$ oder
$\frac{1}{2}o = x.$

§. 478. Zuſ. Der Winkel an der Peripherie hat zu ſeinem Maas den halben Bogen auf dem er ſteht. Dann (*Fig.* 31.) $x = \frac{1}{2}o$; $\frac{1}{2}o = \frac{1}{2}AB$, folgl. $x. = \frac{1}{2}AB.$

§. 479. Zuſ. Alle Winkel an der Peripherie, die auf einem und eben demſelben Bogen ſtehen, ſind einander gleich; dann nach *Fig.* 34. iſt

$\left.\begin{array}{l} D = \frac{1}{2}AB \\ E = \frac{1}{2}AB \\ F = \frac{1}{2}AB \\ G = \frac{1}{2}AB \end{array}\right\}$ nach §. 478. folglich

$D = E = F = G.$

§. 480. Zuſ. Alle Winkel an der Peripherie, die auf dem Diameter, das iſt, auf einem halben Cirkel ſtehen, ſind rechte Winkel, und ein jeder hält

90°;

90°; dann *Fig.* 35. iſt nach dem vorhergehenden §. der Winkel $ADB = AEB = AFB = \frac{1}{2} AB$, aber $\frac{1}{2} AB = 90°$ oder ein rechter Winkel; folglich $ADB = AEB = AFB = 90°$. Dieſe Eigenſchaft des Cirkels muß man ſich wohl bekannt machen, indeme man ſich im folgenden mehrmalen darauf berufen wird.

§. 481. Zuſ. Der über die Peripherie verlängerte Winkel x nach *Fig.* 36. hat zu ſeinem Maas die halbe Differenz der zween Cirkelbogen AB und DF, die ſeine verlängerte Schenkel EA und DB ſchneiden.

Dann $o = x + y$ nach §. 470.
$y = y$ ſubtr.

$o - y = x$; da nun $o = \frac{1}{2} AB$, $y = \frac{1}{2} DF$ u. nach §. 478.

ſo iſt, wenn man dieſe Wehrte ſubſtituirt $o - y = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DF$

folglich $x = \frac{1}{2} AB - \frac{1}{2} DF = \frac{AB - DF}{2}$.

§. 482. Zuſ. Man kann an dem Ende einer Linie nach §. 480. leicht einen Perpendikel aufrichten, auch einen jeden Winkelhacken oder rechten Winkel nach eben demſelbigen Zuſatz probieren oder prüfen, ob er richtig ſeye.

Die Verwandlung der Figuren.

§. 483. Erkl. Eine Diagonallinie iſt eine Linie, die von einem Eck der gegebenen Figur zu einem andern gezogen wird. Wie *Fig.* 37. die Linie BD.

§. 484. Zuſ. Das Viereck iſt alſo die erſte Figur, in welcher eine Diagonallinie möglich.

§. 485. Lehrſatz. Eine Diagonallinie theilet ein jedes Parallelogramm in zween gleiche Theile.

Satz. *Fig.* 37.

△ ABD = △ BCD.

Bew.

AB = CD } nach §. 421. weil es ein Parallelogramm iſt, nach der Vorausſetzung.
AD ≐ BC }

BD = BD

folglich △ ABD = △ BCD. nach §. 429.

§. 486. Zuſ. Demnach werden alle Quadrate, Rectangula oblonga, Rhombi und Rhomboides durch die Diagonalen in zween gleiche Dreyecke getheilt; die Trapezia ſind unter denen Vierecken allein ausgenommen, weil ſie nach der Erklärung davon keine Parallelogramme ſind.

§. 487. Lehrſatz. Ein jedes Rectangulum kann in ein Quadrat und ein jedes Quadrat in ein Rectangulum verwandelt werden. Dann *Fig.* 38. verlängere man von dem gegebenen □ FIDE die Seite DE, bis DC der Höhe des Rectanguli gleich iſt, in welches man es verwandeln will; man ziehe von C durch I die Linie CG, welche die verlängerte FE in G ſchneiden wird; man mache das Dreyeck AGC dem Dreyeck EGC gleich; ſo wird ABIH = IDEF.

Satz. □ IDEF = □ ABIH. *Fig.* 38.

Beweis.

△ EGC = △ AGC.

△ GIF = △ GHI nach §. 483. dieſes ſubtr.

läßt

läßt $\triangle EGC - \triangle GIF = \triangle AGC - GHI$ das iſt in der Figur

$FICE = ACIH$ weil ferner

$\triangle BIC = \triangle DCI$ §. 483. dieſes ſubtr.

$FICD - \triangle BIC = ACIH - \triangle DCI$ das iſt in der Figur

$\square FIDE = \square ABIH$.

§. 488. Zuſatz. Eben ſo erhellet, daß Rhombus ſich in ein Rhomboides, Rectangula und Rhomboides in andere gleichen Inhalts verwandeln laſſen.

§. 489. Zuſ. Wenn alſo in einem Parallelogrammen die Diagonallinie gezogen, und in ſelbiger nach Belieben einen Punct, wie I *Fig.* 38. angenommen wird, durch welchen man mit den Seiten des Parallelogramms die Parallellinien HD, und BF ziehet, ſo entſtehen vier Parallelogramme, von welchen die zwey, durch welche die Diagonallinie nicht gehet, einander gleich ſind.

§. 490. Erkl. Wie man die Grundlinie eines Dreyecks die Seite nennt, mit deren es auf dem Horizont ſtehend vorgeſtellt wird, ſo iſt ſeine Höhe eine Linie, die von der Spitze auf den Horizont aber perpendicular herabgezogen wird, dahero wann es ſchief iſt, die Grundlinie verlängert werden muß. Wie *Fig.* 41. EH, *Fig.* 45. BE, die Höhen ſind; übrigens iſt es gleichgültig, welche Seite man zur Grundlinie annimmt.

§. 491. Lehrſatz. Ein jedes ſchiefwinklichtes Parallelogramm läßt ſich in ein ihm gleiches rechtwinklichtes von einerley Grundlinie und Höhe

he verwandeln, oder zwey Parallelogramme, die einerley Grundlinie und Höhe haben, ſind einander gleich. Dann *Fig.* 39. ſtehen die zwey Parallelogramme ABCD und ABFE, jenes rechtwinklicht, dieſes ſchief, beyde auf einer Grundlinie, und ſind von einerley Höhe, das iſt, zwiſchen zwo Parallelen DF und AB, eingeſchloſſen; man ziehe die Linie CE; ſo wird ſich der Beweis von ſelbſt geben.

Satz. *Fig.* 39.

□ ABCD = □ ABFE.

Beweis.

AB = DC aus der Definition der Parallelogr. nach §. 421.
AB = EF folgl.

nr. I. DC = EF
CE = CE addirt

DC + CE = EF + CE d. i. in der Figur
DE = CF.

DE = CF nr. I.
DA = CB } nach §. 421.
AE = BF } folglich nach §. 429.

nr. II. △ DAE = △ CBF.

△ DAE = △ CBF nach nr. II.
△ CGE = △ CGE ſubtrah.

△ DAE − △ CGE = △ CBF − △ CGE d. i. in der Figur

DAGC = EGBF. ferner
△ AGB = △ AGB addirt, gibt

DAGC + △ AGB = EGBF + △ AGB. d. i. in der Figur

□ ABCD = □ ABFE.

§. 492.

§. 492. Zuſatz. Auf eine ähnliche Weiſe erhellet, daß nach der *Fig.* 40. ABDF = ACEF; und die Höhe beeder Parallelogrammen iſt CK.

§. 493. Zuſatz. Alle Dreyecke die einerley Grundlinie und Höhe haben, ſind einander gleich; welches aus § 491. verglichen mit §. 485. deutlich iſt. Dann *Fig* 41 iſt Δ ACB = Δ A[redacted], weil □ AFCB = □ A[redacted] nach §. 491. es iſt aber ACB = ½ AFCB, und Δ ADB = ½ ADEB; Da nun die Ganze gleich ſind; ſo ſind auch die Helften gleich, das iſt, das Δ ABC = Δ ADB. Eben ſo werden alle Dreyecke, ſo viel deren ſind, wenn ſie einerley Gradlinie und Höhe haben, einander gleich ſeyn.

§. 494. Lehrſatz. Ein jedes Dreyeck läßt ſich in ein Parallelogramm von einem gegebenen Winkel und Seite verwandeln. Dann es ſeye *Fig.* 42. das Δ BAC gegeben, man ſolle es in das Parallelogramm MCHL, deſſen Winkel CHL gegeben iſt, verwandeln. Man theile die Grundlinie BC in E in zween gleiche Theile, und richte unter dem gegebenen Winkel ECG = CHL das Parallelogramm ECGF auf, man verlängere FG nach I, daß GI der gegebenen Seite gleich werde; Man mache den Winkel GIH dem gegebenen CHL gleich, und ziehe durch die Puncte I und C die Linie IK, welche in K die bis dahin verlängerte Linie FE ſchneiden wird; man ziehe endlich durch K eine Parallellinie mit FI, ſo iſt □ MCHL = Δ BAC.

Satz. *Fig.* 42.

Δ BAC = □ MCHL.

Bew.

Bew.

△ ABC = □ ECGF. nach §. 493. weil ABC = $\frac{1}{2}$ ABCG u. $\frac{1}{2}$ ABCG = ECFG welches leztere aus der Conſtruction klar iſt.

□ ECGF = MCHL nach §. 491.

△ ABC = □ MCHL.

§. 495. Zuſatz. Weil ein jedes ſchiefes Parallelogramm ſich in ein rechtwinklichtes und dieſes in ein Quadart verwandeln läßt, nach §. 487. ſo läßt ſich ein jedes Dreyeck in ein ſchiefes Parallelogramm, aus dieſem in ein Rectangulum, und aus dieſem in ein Quadrat verwandeln; man mag hernach dieſe oder jene Verwandlung bey vorwaltenden Umſtänden nöthig haben.

§. 496. Zuſ. Iſt der gegebene Winkel CHL, ein rechter, ſo wird das Dreyeck unmittelbar in ein Retangulum, und aus demſelben in ein Quadrat verwandelt; wenn man wie oben, FEC den gegebenen rechten Winkel gleich macht.

§. 497. Lehrſatz. Wenn man die Diagonallinie eines Parallelogramms in zween gleiche Theile theilet, *Fig.* 43. und ziehet durch den Theilungs-Punkt C die Linie DF nach Belieben von einer Parallelſeite zur andern, ſo ſind die Trapezia ADFG und DBEF einander gleich.

Saz. *Fig.* 43.

ADFG = DBEF.

Beweis.

△ ABG = △ EGB.

pr. I. △ DCB = △ FCG nach §. 423. weil GC = CB

ex

ex conſtr. die Winkel CGF
=CBD und die Winkel bey
C Vertical. folglich

$\triangle ABG - \triangle DCB = \triangle EGB - FCG$. das iſt
in der Figur

ADCG = EBCF weil nun wie oben, nr. I.
$\triangle FCG = \triangle DCB$. ſo iſt, wenn man beederſ. add.

$ADCG + \triangle FCG = EBCF + \triangle DCB$ das iſt,
in der Figur

ADFG = DBEF.

§. 498. Zuſatz. Ein jedes Parallelogramm läßt ſich durch den Mittelpunkt ſeiner Diagonallinie in ſo viel gleiche Trapezia theilen, als ſich durch dieſen Punkt Linien geben laſſen, das iſt, in unendlich viele.

§. 499. Lehrſatz. Alle vier Winkel in einem Trapezio machen, wie in einem jeden Viereck, zuſammen 360° oder einen ganzen Cirkel oder vier rechte Winkel, welches klar iſt, wenn man *Fig.* 45. die Diagonallinie ziehet.

Satz. *Fig.* 45.

$A + B + C + D = 360°$.

Bew.

Die Summe der Winkel in $\triangle ABD = 180°$ } nach §.
Die Summe der Winkel in $\triangle BCD = 180°$ } 464.
folgl. add.

Die Summe der Winkel in $\triangle ABD + \triangle BCD = 360°$
aber

Dieſe Sum. iſt = der Sum. der Wink. A+B+C+D;

folgl. die Summe der Winkel in Trapezio,
das iſt $A+B+C+D=360°$.

§. 500.

§. 500. Zuſatz. Wann das Trapezium in einen Cirkel ſich einſchreiben läßt, ſo machen *Fig.* 46. zween einander gegenüber ſtehende Winkel wie A und C, ferner B und D jedesmal zuſammen 180° oder zween Rechte; das iſt $A + C = 180°$ und $B + D = 180°$; dann $A = \frac{1}{2} BCD$ und $C = \frac{1}{2} BAD$, folglich $A + C = \frac{1}{2} (BCD + DAB,)$ das iſt, wie aus der Figur erhellt, $\frac{1}{2}$. Circ. $= \frac{1}{2}$. $360° = 180°$.

§. 501. Zuſatz. Eine jede geradelinigte Figur läßt ſich durch die Diagonallinien in Dreyecke, und dieſe Dreyecke laſſen ſich in Quadrate verwandeln nach *Fig.* 63. verglichen mit §. 494.

§. 502. Erklärung. In einem rechtwinklichten Dreyeck heiſſen die beeden Seiten die den rechten Winkel einſchlieſſen, die Catheti, und die Seite die dem rechten Winkel entgegen ſtehet, und ihn gleichſam aufſpannet, die Hypothenuſe.

§. 503. Lehrſatz. Zwey gegebene Quadrate laſſen ſich in eines verwandeln, das den gegebenen zween vollkommen gleich iſt, und eines läßt ſich in zwey verwandeln, die dem gegebenen gleich ſind. Oder das Quadrat der Hypothenuſe iſt den beeden Quadraten der Cathetorum zuſammen genommen gleich. Dann man ſetze die Seite AB und BC der zwey gegebenen Quadrate ABHG und BCKI, *Fig.* 51. unter dem rechten Winkel ABC zuſammen, ziehe die Hypothenuſe AC, und richte auf dieſelbe das Quadrat ACDF auf; man ziehe mit CD aus dem Punkt B des rechten Winkels, die Parallellinie BE, und vereinige die Punkte B und F durch die Linie BF, die Punkten G und C durch

die

die Linie GC; ſo wird, wann man noch die Winkel n, o, m bezeichnet, und die Diagonallinien BG und FL ziehet, der Beweis nicht ſchwer ſeyn.

Satz. *Fig.* 51.

AB quadr. + BC quadr. = AC quadr. oder weil das Quadrat AB = AB^2, u.ſ.w.

$AB^2 + BC^2 = AC^2$.

Bew.

n = m nach §. 421. ſind rechte Wink. in Quadr.
o = o add.

n + o = m + o.
GA = AB } nach §. 421.
AC = AF } folglich

△ AGC = △ ABF nach §. 426.
△ AGC = △ AGB nach §. 493.

△ ABF = △ AGB
△ AGB = ½ ABHG nach §. 486.

△ ABF = ½ ABHG
△ ABF = △ ALF nach §. 493.

½ ABHG = △ ALF
ALF = ½ AFEL. nach §. 486.

½ ABHG = ½ AFEL
. 2

ABHG = AFEL.

Eben ſo iſt BCKI = DELC. folglich add.

ABHG + BCKI = AFEL + DELC das iſt in der Figur

AB quadr. + BC quadr. = ACDF oder AC quadr. oder $AB^2 + BC^2 = AC^2$.

§. 504. Dieſes iſt der wichtige pythagoriſche Lehrſatz, der ſonſten auch Magiſter Matheſeos heißt; Pythagoras ſoll ihn erfunden, und dafür den Göttern eine Hecatomben geopfert haben; das iſt, nach der gemeinſten Erklärung ein Opfer von hundert Ochſen. Homerus braucht aber dieſes Wort von Opfern, die über hundert ja über tauſend Opferſtücke hielten, und eben keine Ochſen waren, ſondern auch Schaafe, Ziegen u. ſ. w. es heißt alſo überhaupt, ein groſſes Opfer, welches eher die Zuhörer des Pythagoras als er ſelbſt für dieſe Erfindung geopfert haben mögen; dahero man ſich weiter den Kopf mit einigen nicht darüber verbrechen darf, wie es komme, daß Pythagoras, der ein Thier zu tödten für eine Sünde hielte, in ſo ein groſſes Schlachtopfer einwilligen konnte? Und noch vielweniger ſind diejenige zu hören, die Hecatombe gerade für ein Ochſenopfer, aber wegen den beſondern Meynungen des Pythagoras für ein unblutiges Ochſenopfer ausgeben, und deßwegen ſagen, er oder ſeine Zuhörer haben künſtliche Ochſen von Teig, oder von Leimen gemacht, und ſolche hernach geopfert. Doch es mag mit dem Opfer ſo oder anders gegangen ſeyn, ſo iſt uns ungleich weniger daran gelegen, als an der Erfindung dieſes wichtigen Lehrſatzes ſelbſt, welcher durch die ganze Mathematik hindurch in alle dahin gehörige Wiſſenſchaften einen ungemein groſſen Einfluß hat.

§. 505. Zuſatz. Wenn man von dem Quadrat der Hypothenuſe das Quadrat eines der Cathetorum abzieht, ſo bleibt das andere übrig; oder $AC^2 - AB^2 = BC^2$.

§. 506. Zuſatz. Ein jedes Quadrat läßt ſich verdoppeln, oder in ein Quadrat verwandeln, das noch einmal ſo groß iſt. Dann man ziehe *Fig.* 52. die Diagonallinie AC, ſo iſt $AC^2 = AB^2 + BC^2$ nach §. 503. das iſt $2AB^2$ nach §. 421. oder 2. ABCD. Eben ſo läßt ſich auch ein jedes Quadrat halbiren, daß die Helfte ein Quadrat wird, das noch einmal ſo klein iſt, als das vorige.

§. 507. Zuſatz. Drey oder mehrere Quadrate, von verſchiedener Gröſſe, laſſen ſich in eines verwandeln, das den gegebenen zuſammen genommen gleich iſt. Dann es ſeyen die Quadrate *Fig.* 53. AB^2,

AB^2, BC^2, CD^2, DE^2, wo alle gegebene Breiten unter rechten Winkeln zuſammen geſezt ſind, ſo iſt AE^2 allen dieſen Quadraten zuſammen genommen gleich; weil $AC^2 = AB^2 + BC^2$; $AD^2 = AC^2 + CD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2$; und $AE^2 = AD + DE^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$.

§. 508. Zuſatz. Eine jede geradelinigte Figur läßt ſich in ein ihr gleiches Quadrat verwandeln, dann ſie läßt ſich durch Diagonallinien in Dreyecke verwandeln, dieſe können in Quadrate verwandelt werden §. 495. die Quadrate zuſammen aber können alle in eines verwandelt werden, nach dem unmittelbar vorhergehenden Zuſatz.

Die Ausmeſſung geradelinigter Figuren.

§. 509. Erklär. Eine geradelinigte Figur wird ausgemeſſen, wenn man eine kleinere Fläche in ihr ſo oft herum legt, als ſie ſich herumlegen läßt; die Zahl, welche anzeigt, wie vielmal die kleinere Fläche in der gröſſern herumgelegt werden kann, beſtimmt den Inhalt der gröſſern Fläche; (Aream Figuræ) Man wählt zu Ausmeſſung ſolcher Figuren kleine Quadrate, weil ſich alle geradelinigte Figuren in Quadrate verwandeln laſſen. §. 495. Den Inhalt eines ſolchen Quadrats beſtimmt man durch Linien, Zoll, Schuhe, Ruthen, nach dem geometriſchen Maas, davon was §. 408. geſagt worden.

§. 510. Lehrſatz. Ein Rectangulum wird ausgemeſſen, wann man das zum Maasſtab angenommene kleine Quadrat ſo vielmal in demſelben herumlegen läßt, als das Product der Grundlinie

in die Höhe, welche beede die Seite des kleinen Quadrats mißt, Einheiten in ſich begreiſt; dann es ſeye *Fig.* 44. das groſſe Quadrat ABCD, und das kleine, das im groſſen herumgelegt wird, Abcd; die Höhe AD hält drey Längen wie Ab, die Seite des kleinen Quadrats, und die Grundlinie AB hält fünf ſolche Längen, ſo wird das Quadrat Abcd im groſſen Rectangulo 3 . 5 oder 15, oder AD . AB mal herumgelegt werden können; folglich wird der Inhalt des Rectanguli ABCD = AB . AD . Abcd; oder in Zahlen 3 . 5 . Abcd ſeyn.

§. 511. Zuſatz. Wenn Abcd = 1, ſo iſt der Inhalt des Rectanguli AB . CD, oder 15. Man muß aber dieſe Einheit immer als eine Quadratfläche anſehen.

§. 512. Zuſatz. Die gewöhnliche Art, ſich hier auszudrucken, da man ſagt, das Product aus der Höhe und der Grundlinie ſeye der Inhalt des Rechtsecks, iſt alſo falſch, wenn Abcd nicht im Sinn als die Einheit der meſſenden Fläche hinzugedacht wird, welche mit dem obigen Product multiplicirt erſt die Fläche gibt; dann ſonſt gibt eine Linie mit einer Linie multiplicirt, wieder eine Linie, und niemalen eine Fläche.

§. 513. Zuſatz. Wenn die auszumeſſende Fläche ein Quadrat iſt, ſo darf man nur die Grundlinie mit ſich ſelbſt multipliciren, dieſes Product in Abcd gibt die Fläche des Quadrats. Das iſt, wenn Abcd = 1, das Quadrat der Grundlinie, oder überhaupt einer Seite, nach den oben gegebenen Beſtimmungen §. 510.

§. 514. Zuſatz. Eine Quadratruthe im geometriſchen Maas iſt 10 Schuh hoch und lang, folglich hält eine Quadratruthe 10 . 10 = 100 Quadratſchuhe, eben ſo, ein Quadratſchuh 100 Quadratzoll; und ein Quadratzoll 100 Quadratlinien; dahero die Progreſſion im Flächenmaas nicht von 10 zu 10, wie bey den Längen, ſondern von 100 zu 100 gehet; z. E. 3456043‴ ſind im Quadratmaas 3°45′60″43‴.

§. 515. Zuſatz. Ein ſchiefes Parallelogramm wird ausgemeſſen, wenn man die Grundlinie mit der Höhe multiplicirt, weil ein jedes ſchiefwinklichtes Parallelogramm in ein rechtwinklichtes ſich verwandeln läßt nach §. 487. ein ſolches aber auf die gemeldte Weiſe ausgemeſſen wird §. 510.

§. 516. Zuſatz. Und weil ein jedes Dreyeck die Helfte eines Parallelogramms iſt, das einerley Grundlinie und Höhe mit dem Dreyeck hat, ſo iſt der Inhalt eines Dreyecks das halbe Product aus der Grundlinie in die Höhe; das iſt nach *Fig.* 45. $\frac{AD . EB}{2}$, oder $\frac{1}{2}$ AD . EB. oder $\frac{1}{2}$ EB . AC.

§. 517. Zuſatz. Ein Trapezium läßt ſich durch die Diagonallinie in zwey Dreyecke theilen, folglich iſt ſein Inhalt die Summe des Inhalts der zwey Dreyecke, daraus es beſteht.

§. 518. Zuſatz. Wenn ein Trapezium zwey parallele Seiten hat, wie *Fig* 45. ſo iſt der Inhalt die Summe der zwo parallelen Seiten multiplicirt in ihre halbe Höhe; oder $(AD + BC) . \frac{1}{2}BE$. Dann $AD . \frac{1}{2}BE = \Delta\,ABD$, und $BC . \frac{1}{2}BE = \Delta\,BDC$,

 aber

aber ABD + BDC = ABCD, folglich (AD + BC) $\frac{1}{2}$ BE = ABCD.

§. 519. Zuſatz. Eine jede vieleckigte Figur, ſie mag regulair oder irregulair ſeyn, läßt ſich durch die Diagonallinien in Dreyecke eintheilen, folglich kann man auf eben dieſe Weiſe ihren Inhalt finden, welcher dem Inhalt aller Dreyecke, aus dem ſie beſteht, gleich ſeyn wird.

§. 520. Anm. Wir haben hier nur das nöthigſte, was aus der Lehre von Verwandlung der Figuren unmittelbar fließt, vorgetragen, das weitere gehört in die practiſche Geometrie, welche im folgenden erläutert werden ſolle, und wo man die hieher gehörige practiſche Kunſtgriffe nicht vergeſſen wird.

Die Aehnlichkeit der Dreyecke und der Figuren überhaupt.

§. 521. Erklär. Aehnliche Figuren ſind, welche in nichts von einander unterſchieden ſind, als blos in der Gröſſe, oder in welchen alles einerley iſt, ausgenommen die Gröſſe; wie z. E. zween Cirkel; ein groſſer und ein kleiner; wo dieſes nicht ſtatt hat, ſo ſind ſie unähnlich.

§. 522. Lehrſatz. Zwey Parallelogramme von einerley Höhen verhalten ſich, wie die Grundlinien, wobey aber vorausgeſezt wird, daß die Verhältniß rational ſey.

Satz. *Fig.* 44. β.

ABEF : BCDE = AB : BC.

Beweis.

ABEF = AB . BE und BCDE = BC . BE;

folgl. ABEF : AB . BE = BCDE : BC . BE. u. verſezt

ABEF : BCDE = AB . BE : BC . BE. ;BE

ABEF : BCDE = AB : BC.

§. 523.

§. 523. Zuſatz. Wenn die Grundlinien gleich ſind, ſo verhalten ſie ſich wie die Höhen; welches auf eben dieſe Art erwieſen wird.

§. 524. Zuſatz. Weil die Dreyecke die Helften ſind von Parallelogrammen, die einerley Grundlinien und Höhe mit ihnen haben, ſo verhalten ſich auch die Dreyecke von einerley Grundlinie, wie ihre Höhen, das iſt *Fig.* 44. *β.* △ABE : △BCD = AB : BC. oder wenn ſie einerley Höhe haben, wie ihre Grundlinien.

§. 525. Zuſatz. Iſt die Verhältniß nicht rational, oder kann kein Theil von AB, man mag ihn auch noch ſo klein annehmen, ein gemeinſchaftlicher Theil werden, der m und n mal genommen die beede Linien genau meſſe, ſo nimmt man unendlich kleine Theile an, die man Elemente nennt, damit man auch in ſolchem Fall die Wahrheit der Verhältniß behaupten könne, indeme der Fehler alsdenn geringer wird als jede angebliche Gröſſe.

§. 526. Lehrſatz. Wenn man in einem Dreyeck, wo man will, eine Parallellinie mit der Grundlinie ziehet, ſo ſind die durch die Parallellinie abgeſchnittene Stücke der beeden Seiten proportionell.

Satz. *Fig.* 56.

AD : DB = AE : EC.

Bew.

△ADE : △DEB = AD : DB §. 524.

△DEB = △DEC §. 493. dieſen ſubſt. gibt

△ADE : △DEC = AD : DB

△ADE : △DEC = AE : EC §. 524.

AD : DB = AE : EC.

§. 527. Lehrſatz. In den zweyen durch dieſe Parallellinie entſtehenden Dreyecken ſind jede zwo Seiten des einen Dreyecks den zwo Seiten des andern proportionell.

Satz. *Fig.* 56.

I. Fall.

$AD : AE = AB : AC.$

Bew.

$AD : DB = AE : EC$ nach §. 526.

$AD : AD + DB = AE : AE + EC.$ d. i. in der Fig.

$AD : AB = AE : AC.$ und verſezt

$AD : AE = AB : AC.$

II. Fall.

$AB : BC = AD : DE.$

Beweis.

Wenn man EH mit DA parallel ziehet, ſo iſt BH = DE, nach §. 461. und die Proportion wie vorher; Da man nur C für die Spitze und AB für die Grundlinie annimmt: folglich

$CB : HB = CA : EA.$ das iſt, weil $HB = DE$

$CB : DE = CA : EA.$ ferner

$BA : DA = CA : EA$ folglich

$CB : DE = BA : DA.$ und verſezt

$CB : BA = DE : DA.$ oder umgekehrt

$AB : BC = AD : DE.$

§. 528. Anm. Man kann den zweyten Fall, wie auch den erſten unmittelbar aus der Euclideiſchen Fiaur beweiſen; es ſey *Fig.* 60. zu beweiſen, daß $CB : AB = CE : DE$, ſo iſt der Beweis folgender:

$\triangle DAB : \triangle CDB = DA : DC$ §. 524.

$\triangle \begin{cases} DBE \\ DAE \end{cases} : \triangle CDE = DA : DC.$

weil $\triangle DAE = DBE.$ § 493.

$\triangle DAB$

$\triangle DAB : \triangle CDB = \triangle DBE : \triangle CDE.$

$DAB + CDB : CDB = DBE + CDE : CDE$ das iſt in der Figur

$\triangle CAB : \triangle CDB = \triangle CDB : \triangle CDE$ nun iſt

$\triangle CAB : \triangle CDB = AB : DE$ alſo

$\triangle CDB : \triangle CDE = AB : DE.$

$\triangle CDB : \triangle CDE = CB : CE$ §. 524; folglich

$AB : DE = CB : CE.$ das iſt verſezt

$AB : BC = DE : CE$ und umgekehrt

$CB : BA = CE : ED,$ Dieſen Beweis habe nach dem Euclides in meinen Amœnit. Acad. 1754. und hernach in den erſten Gründen der mathem. Wiſſenſchaften S. 426. folgg. gegeben.

§. 529. Zuſatz. Die angeführte Proportionen *Fig.* 56.

nemlich I. $AD : DB = AE : EC.$

II. $AD : AE = AB : AC.$

III. $AD : DE = AB : BC.$

geben durch die nach §. 275. verſtattete Verſetzungen und Veränderung noch verſchiedene andere Verhältniſſe, die ſich aber alleſamt auf dieſe drey Hauptproportionen gründen.

§. 530. Zuſatz. Wo dieſe Proportionen ſtatt haben, da iſt allemal DE mit BC parallel.

§. 531. Lehrſatz. Wenn in zweyen Dreyecken alle drey Winkel einander gleich ſind, ſo ſind die Triangel ähnlich, und die gleichen Winkeln opponirte Seiten proportionell. Dann es ſey *Fig.* 57. in den Dreyecken BAC, CDE, der Winkel ABC = DCE, der Winkel A = D, folglich auch der dritte dem dritten gleich §. 468. ſo wird CD mit BA parallel ſeyn nach §. 457. welches bey allen Dreyecken dieſer Art klar iſt, weil man allemal zwo Seiten, die gleichen Winkeln opponirt ſind, wie BC und CE, in eine gerade Linie zuſammen ſetzen kann. Daß aber in dieſem Fall CD mit BA parallel, erhellet daraus,

aus, weil nach der Vorausſetzung der Winkel DCE = ABC, und A = D; in welchem Fall alſo CD nothwendig mit AB, und die verlängerte Linie EF mit AC parallel iſt, nach §. 457. folglich wird nach dem vorhergehenden Lehrſatz,

BA : BC = AF : CE;
AF = CD daher

BA : BC = CD : CE. und eben ſo
BC : AC = CE : DE folglich auch nach §. 278.

BA : AC = CD : DE.

§. 532. Zuſatz. Sind in zweyen Dreyecken zween Winkel einander gleich, ſo hat die obige Proportion ſchon ſtatt, dann wenn zween Winkel einander gleich ſind, ſo iſt auch der dritte dem dritten gleich §. 468.

§. 533. Lehrſatz. Wenn ein Winkel wie AEB *Fig.* 58. durch die Linie DE in zween gleiche Winkel AED, und DEB getheilt wird, ſo verhalten ſich die zwo Seiten des Dreyecks AE, und AB, wie die zween Abſchnitte der dritten Seite, welche durch DE abgeſchnitten werden. Dann man verlängere AE nach C, bis EC = BE, und ziehe die Linie EB; ſo wird der Beweis folgender maſſen ſich ergeben.

Satz. *Fig.* 58.
AE : EB = AD : DB.

Bew.
AEB = o + x nach §. 470.
o = x §. 439.

AEB = 2x
AEB = 2AED ex conſtructione

2AED

$2AED = 2x$
$:2$
$AED = x$ folglich

DE parallel BC dahero
AE : EC = AD : DB nach §. 531. aber
EC = EB nach der Conſtruction, folglich

AE : EB = AD : DB.

§. 534. Zuſatz. Wenn dieſe Proportion ſtatt hat, ſo iſt der Winkel AED die Helfte von AEB.

§. 535. Lehrſatz. Eine auf den Diameter des Cirkels von der Peripherie herabgefällte Perpendicularlinie iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen den Abſchnitten (Segmenten) des Diameters, die dadurch beſtimmt werden.

Satz. *Fig.* 59.

AD : DE = DE : DB.

Bew.

Man ziehe aus dem Mittelpunkt den Radius CE; ſo iſt $CE^2 = ED^2 + DC^2$ u. $CE^2 - DC^2 = ED^2$ nach §.

Man ſetze CE = r
DC = a
DE = x. ſo iſt

nr. I. $CE^2 - DC^2 = ED^2$ in kleinen Buchſtaben ausgedruckt

$r^2 - a^2 = x^2 = ED^2$.

Es iſt ferner

nr. II. CB = AC = CE = r; folglich in der Figur
AC − CD = AD das iſt r − a = AD. und
CB + CD = DB das iſt r + a = DB. alſo

iſt $(r - a) . (r + a) = AD . DB$.

das

das iſt, nach §. 147. $r^2 - a^2 = AD.DB$
aber nr. I. $r^2 - a^2 = ED.ED$ oder ED^2.

$$AD.DB = ED.ED. \text{ dahero}$$
$$AD : ED = ED : DB.$$

§ 536. Anm. Eben dieſe Verhältniß läßt ſich auch aus dem obigen Beweis §. 531. herleiten, weil das △ AED, dem Dreyeck DEB, und beede dem Dreyeck AEB ähnlich ſind. Dann *Fig.* 59. iſt der Winkel AEB ein rechter, wie ADE, und EDB es auch ſind nach der Vorausſetzung, folglich ſind alle drey gleich; der Winkel B iſt den △ ABE und DBE gemeinſchaftlich; folglich iſt auch der dritte dem dritten gleich, und △ AEB ∽ △ DEB ∽ △ ADE; dahero AD : DE = DE : DB

§. 537. Lehrſatz. Wenn ein Winkel, wie BCA *Fig.* 62. einen Cirkel durch ſeine zween Schenkel ſchneidet, und mit den verlängerten Schenkeln auf dem Bogen BA ſtehet, ſo verhalten ſich die Segmente der Schenkel auſſer der Peripherie umgekehrt wie die ganze Schenkel.

Satz. *Fig.* 82.

$$CE : CD = CA : CB.$$

Bew.

$o + x = 180°$ nach §. 443.
$x + y = 180°$ nach §. 500.

$o + x = x + y$
$x = x$ ſubtr.

$o = y.$
$C = C$ folglich

△ CED ∽ △ CAB. nach §. 532. dahero
$CE : CD = CA : CB.$

§. 538. Lehrſatz. Wenn an dem einen Ende des Diameters eine Perpendicularlinie oder Tangente aufgerichtet wird, welcher eine vom andern Ende des Cirkels gezogene, und den Cirkel ſchnei-

ſchneidende Linie, als die Hypothenuſe des Dreyecks, begegnet, ſo iſt die Tangente die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Segment der Hypothenuſe auſſer dem Cirkel, und zwiſchen der ganzen Hypothenuſe.

Satz. *Fig.* 61.

HI : BH = BH : AH.

Bew.

m = 90° nach §. 480.
m = n §. 447.

n = 90°
r + s = 90 nach der Vorausſetzung

n = r + s
o = o folglich nach §. 532.

ΔBHA ∽ ΔBHI. dahero

HI : BH = BH : HA.

§. 539. Zuſatz. Das Quadrat der Tangente iſt alſo dem Product der Hypothenuſe in ihr auſſerhalb des Cirkels fallendes Segment gleich, das iſt in der Figur $BH^2 = HA . HI$.

§. 540. Anm. Dieſe drey Lehrſätze haben in der Trigonometrie und höhern Geometrie ihren Nutzen, und ſind wohl zu merken, unerachtet ſie in den gewöhnlichen geometriſchen Schriften nicht vorkommen.

§. 541. Zuſatz. Weil die Seiten, welche in zwey Dreyecken gleichen Winkeln opponirt ſind, ähnlich liegende Seiten (latera homologa) heiſſen, ſo werden die bisherige Lehrſätze kürzlich ſo ausgedruckt, daß man ſagt, in ähnlichen Dreyecken ſeyen die ähnlich liegende Seiten proportionell.

§. 542. Zuſatz. Aus drey gegebenen Seiten kann man nach §. 272. die vierte, und aus zwo, nach §. 274. die mittlere Proportionalſeite finden, wie in der practiſchen Geometrie, wo auch die proportionierliche Theilung der Linien vorkommt, weiters erläutert werden ſoll.

§. 543. Lehrſatz. Aehnliche Dreyecke verhalten ſich wie Quadrate ihrer ähnlich liegenden Seiten (Triangula ſimilia ſunt in ratione duplicata laterum homologorum.) Dann es ſeyen die beeden Dreyecke *Fig.* 66. *α.* *β.* einander ähnlich; man ziehe ihre Höhen BD, bd, ſo wird man ihren Inhalt durch $\frac{AC \,.\, BD}{2}$, und $\frac{ac \,.\, bd}{2}$ ausdrücken können; woraus man den Beweis des Lehrſatzes bald finden kann.

Satz. *Fig.* 66. *α.* *β.*

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC^2 : ac^2$$

Bew.

nr. I. $\triangle ABC \backsim \triangle abc$ nach der Vorausſez. dahers

$$\left.\begin{array}{l} ab : AB = bd : BD \\ ab : AB = ac : AC \end{array}\right\}$$ nach §. 527. dahero

$$ac : AC = bd : BD$$

folglich $\frac{AC \,.\, bd}{ac} = BD.$ §. 272.

nr. II. $\triangle ABC : \triangle abc = BD.AC : bd.ac$ nach §. 516. es iſt aber nach nr. I.

$$BD = \frac{AC.bd}{ac}$$ folgl. ſubſtit.

$\triangle ABC$

$$\triangle ABC : \triangle abc = \frac{AC.AC.bd}{ac} : bd.ac$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \; .\,ac$$

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC.AC.bd : bd.ac.ac$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \; :bd$$

$$\triangle ABC : \triangle abc = AC.AC : ac.ac = AC^2 : ac^2.$$

§. 544. Zuſatz. Aehnliche Figuren verhalten ſich aus gleichem Grunde wie die Quadrate der ähnlich liegenden Seiten, dann ſie laſſen ſich in ähnliche Dreyecke durch die Diagonale theilen, folglich gilt von ihnen, was von den Dreyecken geſagt worden. Dahero *Fig.* 63. *α. β.* $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2$.

Dann $\triangle AFB : \triangle afb = AB^2 : ab^2$ §. 543. weil ferner

$$AFB + FBC + FCE + ECD : afb + fbc + fce + ecd = AFB : afb$$

das iſt $ABCDEF : abcdef = \triangle AFB : afb$

ſo iſt $ABCDEF : abcdef = AB^2 : ab^2$.

§. 545. Zuſatz. Aehnliche Dreyecke verhalten ſich wie die Quadrate ihrer Höhen, *Fig.* 66. weil die Höhen auf ähnliche Weiſe beſtimmt werden.

§. 546. Zuſatz. Eben das gilt von andern ähnlichen Figuren, wo eine Linie auf eine mit den homologen Seiten ähnliche Weiſe beſtimmt wird; ſo verhalten ſich die Cirkel, weil ſie alle ähnlich ſind, wie die Quadrate der Diameter; wie es im folgenden vom Cirkel beſonders ſolle vorgetragen werden.

§. 547. Lehrſatz. Wenn zwo Sehnen eines Cirkels einander ſchneiden, ſo ſind die Producte ihrer Segmente beederſeits einander gleich; und die Segmente ſind wechſelsweis proportionell.

Satz.

Satz. *Fig.* 64.

$$AG . GB = EG . GD.$$

Bew.

$$\left.\begin{array}{l} A = \tfrac{1}{2}BE \\ D = \tfrac{1}{2}BE \end{array}\right\} \text{§. 478.}$$

$$A = D$$

$AGE = DGB$ ſind Vertic. Winkel.

$\triangle AEG \backsim \triangle DBG$ folglich

$AG : EG = GD : GB$ dahero

$$AG . GB = EG . GD.$$

§. 548. Anm. Dieſer Lehrſatz iſt beſonders wegen ſeiner Allgemeinheit zu merken; in den gewöhnlichen geometriſchen Lehrbüchern kommt er ſelten ſo allgemein vor; man findet gemeiniglich nur den beſondern Fall, wenn eine Sehne den Diameter perpendicular ſchneidet, da dann das Product der Segmente dem Quadrat der halben Sehne, das iſt, dem Product der Segmente der Sehne gleich iſt; wie aus § 535. unabhängig von dieſem gegenwärtigen Lehrſatz erhellet. Es iſt aber nicht nur dieſer Fall bey dem Diameter, als der größten Sehne, ſondern bey allen Sehnen, und nicht nur, wenn ſie ſich unter einem rechten, ſondern unter allen nur möglichen Winkeln ſchneiden, hier erwieſen. Herr Prof. Sulzer zu Berlin hat den Begriff der Schönheit, in ſofern der Verſtand ſie erkennt und deutlich vorſtellt, aus dieſem Lehrſatz erläutert, und gezeigt, wie das Vergnügen an der Schönheit von dem erſten an bis auf den letzten allgemein erwieſenen Fall zunehme, und ſich auf deutliche Begriffe gründe, da man ſonſten das Schöne mehr in der undeutlichen Vorſtellung einer Sache geſucht hat.

§. 549. Anmerk. Uebrigens empfehlen wir dieſe Lehre von den Verhältniſſen und Proportionen dem Nachdenken des Leſers um ſo mehr, als ſie, wie wir in der Arithmetik ſchon gemeldt, und wie alle Verſtändige es wiſſen, die Seele der ganzen Mathematik iſt, und in alle Theile derſelben einen ungemein groſſen Einfluß hat.

Von dem Cirkel, deſſen Verwandlung und Ausmeſſung.

§. 550. Lehrſatz. In einem jeden Cirkel ſind die Sehnen gleicher Bogen gleich. Dann man ziehe *Fig* 48. die Sehnen DE, AB, und die Radios DC, CE, AC, CB, ſo werden die Winkel o und x gleich ſeyn, weil nach der Vorausſetzung die Bogen gleich ſind.

Satz. *Fig.* 48.
DE = AB.

Bew.
DC = CA } ſind Radii.
CE = CB }
o = x nach der Vorausſetzung

ΔDCE = Δ ACB.
AB = DE.

§. 551. Zuſatz. Wenn die Sehnen gleich ſind, ſo ſind auch die Bogen gleich; dann in dieſem Fall ſind in den beeden Dreyecken *Fig.* 48. alle drey Seiten einander gleich, folglich o = x, dahero auch die Bogen, welche dieſe Winkel meſſen.

§. 552. Lehrſatz. Eine Perpendicularlinie, welche eine Sehne in zween gleiche Theile theilet, gehet verlängert durch den Mittelpunkt des Cirkels, und theilet ihn in zween gleiche Theile; welches klar wird, wenn man *Fig.* 49. die Sehnen AD, AC, DB, und BC ziehet.

Satz. *Fig.* 49.

DC = Diameter.

Beweis.

AGD = DGB } nach der Vorausſetzung
AG = GB }
nr. I. GD = GD

△ ADG = △ DBG nach §. 426. folglich
AD = DB. ferner

nr. II. AGC = BGC
AG = GB
GC = GC

△ ACG = △ BCG. nach §. 426. folglich
AC = BC nun iſt

AD = DB nach nr. I.
AC = BC nach nr. II. dahero

DA + AC = DB + BC. folgl. auch die Bögen §. 551. deren Summe der ganze Cirkel; dahero

DA + AC = ½ Circ.
und DB + BC = ½ Circ. folglich

DC = Diam.

§. 553. Zuſatz. Durch drey Punkte, die nicht in gerader Linie liegen, wird dahero allemal ein Cirkel beſtimmt; dann *Fig.* 50. ſeyen die Punkten A, B, D, man ziehe die Linien AB, und BD, zwiſchen dieſen Punkten, man theile ſie in zwey gleiche Theile, und ziehe durch die Theilungs-Punkte die Perpendicularlinie IF, GH, ſo ſind es zween Diameter nach dem vorhergehenden §. 552. zween Diameter eines und eben deſſelben Cirkels aber ſchnei-

ſchneiden ſich nirgend als im Mittelpunkt, folglich iſt C der Mittelpunkt und CA der Radius.

§. 554. **Erklär.** Ein Cirkel wird in eine geradelinigte Figur hin beſchrieben, wenn jede Seiten der geradelinigten Figur die Peripherie des Cirkels berührt, und eine Figur wird in einen Cirkel hinein beſchrieben, wenn ein jedes Eck der Figur in der Peripherie des Cirkels ſich endigt.

§. 555. **Lehrſatz.** In ein jedes Dreyeck läßt ſich ein Cirkel beſchreiben; welches geſchiehet, wenn man *Fig.* 47. die Winkel A und D in zween gleiche Theile theilet, und aus dem Punkt C wo ſie einander durchſchneiden, die Perpendicul CB und CE auf die Seiten des Dreyecks fällt.

Saz. *Fig.* 47.
FC, EC, BC ſind Radii des eingeſchriebenen Cirkels.

Beweis.

nr. I. CED = CBD ſind rechte; ex conſtruct.
x = o ex conſtruct. jeder $\frac{1}{2}$ EDB.
CD = CD folglich nach §. 423.

△BDE = △CDB. dahero
CB = CE. eben ſo iſt

nr. II. AFC = ABC.
n = r
AC = AC

△ACF = △ACB. folglich
FC = CB. da nun nach nr. I.
auch CE = CB ſo iſt

FC = CE = CB. alſo drey Radii, und

 der

der Mittelpunkt C; aus C kann man alſo durch die drey Punkte B, F, E den Cirkel beſchreiben, der die obige Eigenſchaften hat; daß nemlich der eingeſchriebene Cirkel alle drey Seiten des Dreyecks berührt.

§. 556. Anm. Auf eine nicht viel verſchiedene Weiſe wird das Problem περι επαφων, das unter den Alten ſo berühmt war, und von dem Franc. Vieta aufgelößt worden iſt, wie wir in der Geſchichte dieſes Hauptſtücks gemeldet, ohne ſonderliche Mühe blos geometriſch aufgelöſet.

§. 557. Zuſatz. Weil ein regulaires Polygon lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat, ſo kann man es ſich als eine in den Cirkel eingeſchriebene Figur vorſtellen, deſſen Seiten die Sehnen des Cirkels ſind.

§. 558. Zuſatz. Und weil die Seiten alle, das iſt, im Cirkel, die Sehnen gleich ſind, ſo ſind auch die Winkel am Mittelpunkt alle gleich; das iſt, wenn man eine hat, ſo hat man alle.

§. 559. Lehrſatz. Aus der Anzahl der Seiten eines regulairen Vielecks wird der Centriwinkel und der Polygonwinkel, das iſt der Winkel, den zwey Seiten mit einander machen, beſtimmt. Dann wenn die Anzahl der Seiten n iſt, ſo iſt der Centriwinkel *Fig.* 67. ACB $= \frac{360°}{n}$ und der Polygonwinkel ABD $= 180° - \frac{360°}{n}$. Dann I. alle Winkel um den Punkt C herum machen 360°; es ſind aber n gleiche Winkel um C herum; alſo hält einer $\frac{360}{n}$; folglich iſt der Centriwinkel ACB $= 360°$. II. Das Dreyeck ACB iſt gleichſchenklicht, weil AC, CB

CB Radii ſind; folglich ſind die Winkel r und m einander gleich. Weil aber nach der Vorausſetzung BD = AB, ſo iſt △CBD = CAD; folglich o = r. Nun iſt m + o = ABD dem Polygonwinkel; daher, wenn man gleiches ſubſtituirt, der Polygonwinkel = $180° - \frac{360}{n}$, weil r + m = $180° - \frac{360}{n}$ iſt.

§. 560. Zuſ. Wenn die Sehne dem Radius gleich iſt, ſo iſt das Polygon ein regulaires Sechseck, dann alsdenn iſt das △ADB gleichſeitig, folglich der Centriwinkel = 60; aber $\frac{360}{60} = 6$; daher ein Sechseck beſchrieben wird, wenn man den Radius ſechsmal in der Peripherie herumträgt.

§. 561. Zuſ. Wenn die Zahl der Seiten gerad iſt, ſo macht die Helfte der Centriwinkel 180°, und das Polygon wird durch jeden continuirten Radium in zween gleiche Theile getheilt.

§. 562. Zuſatz. Man kann die Fläche eines regulairen Polygons finden, wenn man die Summe ſeiner Seiten, das iſt n Seiten mit der halben Höhe CH multiplicirt; dann man kann ſich ein Polygon darſtellen, als ob ſein Umfang in eine gerade Linie ausgedehnt wäre, auf welcher als auf der Grundlinie alle *Fig.* 67. mögliche Dreyecke ſtünden; dieſe werden in eines verwandelt, deſſen Innhalt das Product aus der Grundlinie in die halbe Höhe iſt. Nach *Fig.* 55.

§. 563. Lehrſatz. Weil der Cirkel ein regulaires unendlichs Vieleck, ſo kann man ſich ihn eben ſo vorſtellen; und weil die Grundlinien der unendlich kleinen Dreyecke unendlich klein ſind, ſo kann

man ihre Höhe für den Radius annehmen; dahero ſein Inhalt die Peripherie in den halben Radius oder vierten Theil des Diameters multiplicirt iſt.

§. 564. Anm. Daß dieſer Begriff vom Cirkel möglich, und wie man wirklich den unendlich kleinen Theilen der Peripherie durch die Approximation nahe gekommen ſeye, werden wir ſogleich im folgenden zeigen. Von den Polygonen aber werden wir das weitere in der Ebenen Trigonometrie mit mehrerer Deutlichkeit und deſto kürzer ſagen können.

§. 565. Zuſatz. Ein jedes regulaires oder irregulaires Polygon läßt ſich durch Diagonallinien, die einander nicht durchkreuzen, in ſo viel Dreyecke theilen, als es Seiten hat, weniger zwey. *Fig.* 63. α. Dann ſo viel ſich nicht durchkreuzende Diagonalen laſſen ſich ziehen, als es Seiten hat, weniger drey, und dieſe Diagonalen bringen allemal ein Dreyeck wieder heraus, z. E. das Viereck hat eine Diagonale, und dadurch zwey Dreyecke, das Fünfeck zwo Diagonale, und dadurch drey Dreyecke, das Sechseck drey Diagonale, und dadurch 4 Dreyecke u. ſ. w.

§. 566. Lehrſatz. In einem jeden Cirkel kommen die Sehnen ihren zugehörigen Bogen deſto näher, je kleiner ſie ſind. Dann es ſey *Fig.* 54. der Bogen ADB gegeben, ſeine Sehne iſt AB, man theile den Bogen ADB in zween gleiche Theile in D; ſo iſt die Helfte des Bogen nun AFD, und die Sehne AD, welche ſchon gröſſer als AE, die Helfte der vorigen Sehne; theilt man AFD wieder in zwey gleiche Theile, ſo wird die Sehne davon abermal gröſſer werden als $\frac{1}{2}$AD; folglich dem Bogen ſelbſt immer näher kommen, je kleiner er wird. Das iſt, der Unterſchied zwiſchen der Sehne und dem Bogen

gen wird durch unendlich viele Halbirungen zulezt kleiner werden als eine jede angebliche Gröſſe.

§. 567. Zuſatz. Ein jedes regulaires Vieleck das in den Cirkel eingeſchrieben iſt, läßt ſich verdoppeln, oder in eins verwandeln, das zweymal ſo viel Seiten, und diß in eines, das viermal ſo viel Seiten hat u. ſ. w. Dann es ſey *Fig.* 54. CA der Radius, der gegeben iſt, AB die Seite des gegebenen Vielecks, ſo iſt AD die Seite des Vielecks, das noch ſo viel Seiten hat; und dieſe Seite läßt ſich aus AB der Seite des vorigen regulairen Vielecks und aus AC, dem Radius, finden. Dann $AD^2 = AE^2 + ED^2$; welche beede leztere Quadrate bekannt ſind.

Satz. *Fig.* 54.

$$AD^2 = AC^2 + DE^2 = 1 - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}AB^2)} \text{ wenn } AC = 1.$$

Bew.

nr. I. $CE = \sqrt{(CA^2 - AE^2)}$ aber

$AE^2 = \tfrac{1}{4}AB^2$ ſubſtituirt, gibt

$CE = \sqrt{(CA^2 - \tfrac{1}{4}AB^2)}$

nr. II. $DE = CD - CE$

$CD = CA$ ſubſtituirt

$$DE = CA - CE = CA - \sqrt{(CA^2 - \tfrac{1}{4}AB^2)}$$
$$= 1 - \sqrt{(1 - \tfrac{1}{4}AB^2.)}$$

§. 568. Zuſatz. Eben ſo läßt ſich aus dem gefundenen AD die Seite des Vielecks, das zweymal ſo viel Seiten als dieſes, oder viermal ſo viel Seiten als das erſte hat.

§. 569. Zuſatz. Wenn man nun die unendlich kleine Seite des Vielecks dem unendlich kleinen Cirkelbogen gleich ſezt, ſo wird der Radius die Hö-

he des unendlich kleinen Dreyecks ſeyn, wie *Fig.* 55. folglich die Summe aller dieſer Dreyecke der Inhalt des Cirkels, woraus man die Peripherie und die Verhältniß des Radius, folglich auch des doppelten Radius, oder des Diameters zur Peripherie findet; welche in allen Cirkeln einerley iſt, weil ſie alle einander ähnlich ſind.

570. Zuſatz. Man wird alſo zulezt auf ein Vieleck kommen, deſſen Seite kleiner iſt als jede angebliche Gröſſe, und die dem Cirkelbogen ſelber ſo nahe kommt, als möglich iſt.

§. 571. Anm. Auf dieſe Weiſe hat man die Quadratur des Cirkels geſucht, auch durch mancherley Abkürzungen der Rechnungen, wie Hugenius und vorher ſchon Ludolph von Cölln eine Verhältniß zwiſchen dem Diameter und der Peripherie gefunden, welche, wenn der Diameter = 1, nach der Decimalrechnung zwiſchen 1: 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 382 279 50 und zwiſchen 1 : 3, 141 . . . . 51 hinein fällt. Das iſt, wenn der Diameter 1 mit zwey und dreyſig angehängten Nullen iſt, ſo iſt der Diameter 3 mit den obigen angehängten 32 Zahlzeichen; die erſte 31 ſind richtig, und ohne Fehler, aber nur noch nicht complet, weil die Rechnung ohne Ende fortgeht. Folglich kann man nach der Ludolphiſchen Verhältniß alle andere angegebene oder neu erfundene, wenn man welche erfinden würde, prüfen. Wenn ſie unter der Bedingung, daß der Diameter 1 mit 31 Nullen vermehrt iſt, wohin man alle Verhältniſſe reduciren kann, von den 32 Zahlzeichen der Peripherie, wie ſie Ludolph von Cölln gefunden, abweichen, ſo ſind ſie offenbar falſch; ohne daß man nöthig hätte, eine weitere Unterſuchung über die angegebene Verhältniß anzuſtellen. Dann die Ludolphiſche Verhältniß iſt als eine Näherung oder Approximation, die bey der zwey und dreyßigſten Zahl abgebrochen wird, erwieſen, folglich ein wahrer und wirklicher Theil von der unendlichen Reyhe. Da nun dem Wahren nichts Wahres widerſpricht, ſo muß eine jede andere Rechnung, die auf obige Weiſe reducirt, der Ludolphiſchen widerſpricht, eben deßwegen falſch ſeyn; und auf dieſe Weiſe kann man die vorgegebene Adeptos ohne weiteres Diſputiren abweiſen.

§. 572. Anm. Die Möglichkeit ſowohl als die Unmöglichkeit der beſtimmten Quadratur des Cirkels iſt noch nicht erwieſen: von der unbeſtimmten Quadratur des Cirkels kann man aus der

höhern

höhern Geometrie zeigen, wie wir unten hören werden, daß ſie was unmögliches ſeye; daraus aber läßt ſich der Schluß auf die beſtimmte Quadratur nicht machen. Inzwiſchen, wenn ſie auch möglich iſt, ſo iſt es erſt die Frage, ob die Verhältniß rational oder irrational ſeyn würde. Wäre das leztere, ſo würde man aus dieſer Erfindung nicht das mindeſte weiter wiſſen, als man ſchon weiß. Dann eine Irrationalverhältniß erfordert, wie die Ludolphiſche, eine ewige Rechnung. z. E. Wenn die Verhältniß des Diameters ganz genau wäre wie $1 : \sqrt{12}$, ſo würde die Quadratwurzel aus 12 eine unendliche Reihe in Decimalbrüchen geben; welche man, weil wir nicht unendlich fortrechnen können, einmal abbrechen müßte. Und allem Vermuthen nach iſt dieſe Verhältniß irrational; wir ſagen vermuthlich, dann daß ſie wirklich irrational ſeyn müſſe, iſt noch nicht völlig erwieſen, obſchon einige, wie Sturm Math. Enucl. L. I. §. 2. Prop. 43. es bewieſen zu haben, glauben. Wäre aber, gegen alle Wahrſcheinlichkeit, das Verhältniß rational, ſo würde der daraus zu hoffende Nutzen im gemeinen Leben und in allen Theilen der angewandten Mathematik nicht gröſſer ſeyn, als der, den man von der Ludolphiſchen Verhältniß hat. Und alles, was man dabey hoffen könnte, wäre dieſes, daß der Beweis, nachdem er etwa ausfallen würde, nebenher zu Erfindung anderer Wahrheiten Anlaß geben könnte, wozu aber in der Mathematik und vorzüglich in der Rechnung des Unendlichen noch weit reichere Erfindungsquellen verborgen liegen.

§. 573. Anm. Ich wünſchte, daß dieſe Betrachtung manche dunkle Köpfe, denen die Quadratur des Cirkels ſo nahe am Herzen liegt, daß ſie Jahr und Tage blos darüber nachdenken, und bis zum Krankwerden rechnen, von dem groſſen Zeitverluſt bey ihrer mühſamen und unnützen Arbeit überzeugen möchte, um ſo mehr, wenn es oft Leute ſind, welche kaum die vier Rechnungsarten verſtehen, und wie **Merkel** einen Leibniz einen xyz Rechner heiſſen, wodurch man die Sache nur verwirre; oder wenn gar der Geiz ihre Rechenkunſt beſeelet, und ſie, ich weiß nicht was für groſſe Prämien ſich von der Entdeckung ihres Geheimniſſes verſprechen, welche nirgend als in ihrem finſtern Gehirn exiſtiren; dann groſſe Herren werden eine Erfindung, die im gemeinen Leben keinen weitern Nutzen hat, gewiß nicht ſo verſchwenderiſch belohnen. Sind dieſe Gründe noch nicht hinlänglich, ſolche hochmüthige Adeptos von ihrem Eigenſinn abzubringen, ſo kann man noch auſſer Hrn Prof. Kästners Warnung Anfangsgr. der Math. I. Th. p. 272. folgg. vorzüglich Hrn Prof. Krafft Diſſert. de Quadratura Circuli præſertim Merkeliana. und ſeine Geom. ſublim. Sect. III. de Circulo leſen, wo verſchiedene falſche Quadraturen ſolcher Adeptorum erzehlt und in ihrer Blöſſe dargeſtellt werden.

§. 574. Anm. Im gemeinen Leben, und überhaupt in der practiſchen Mathematik, braucht man die Ludolphiſche Verhältniß nicht nach allen ausgerechneten Figuren oder Zahlzeichen, insgemein nimmt man die erſte drey an, und ſagt, die Verhältniß des Diameters zum Cirkel ſey wie 100 zu 314; eine Verhältniß, die man auswendig wiſſen muß; hat man ſehr groſſe Cirkel zu meſſen, ſo nimmt man 4 Zahlen, nemlich 1000 zu 3141, oder 5 wie 10000 : 31415 u. ſ. w. bey ſehr kleinen Cirkeln iſt die alte ſchon lang bekannte Archimedeſche Verhältniß wie 7 zu 22 gut genug: der Geometra hat keine nöthig, ſondern folgt überhaupt der Verhältniß, wie 1 : P, wo 1 den Diameter und P die Peripherie bedeutet; wie wir ſogleich hören werden.

§. 575. **Lehrſatz.** Wenn der Diameter eines Cirkels d, oder 2r genannt wird, ſo iſt ſeine Peripherie, $p = d . P$ oder $2r . P$, und ſein Inhalt $r^2 P$; woferne man die Verhältniß des Diameters zur Peripherie in allen Cirkeln durch $1 : P$ ausdruckt. Es ſey p die Peripherie, r der Radius, und der Inhalt oder area circuli a, ſo iſt

Satz.

I. $p = 2r . P$ — II. $a = r^2 . P.$

Bew. (I.)

$1 : P = 2r : p$ §. 569. folgl.

$2r.P = 1.p$ d. i.

$p = 2r.P.$

Bew. (II.)

$a = 2r.P . \frac{2}{4}r.$ nach §. 569. das iſt

$a = 2r.P.\frac{1}{2}r = \frac{2}{2}r^2 P = r^2 P.$

§. 576. **Zuſatz.** Wenn man $2r = d$ ſezt, ſo iſt $a = \frac{d^2 P}{4}$.

§. 577. **Lehrſatz.** Die Peripherie zweyer Cirkel verhalten ſich wie die Diameter oder Radii, und die Flächen wie die Quadrate der Diameter, oder der Radiorum. Dann es ſeyen die Peripherien p, und π, die Diameter 2r und 2ϱ, die Flächen A und α, ſo iſt

I. Satz.

I. Satz.

$p:\pi = r:\varrho$

Bew.

$p:\pi = 2rP:2\varrho P$ §. 575.

$\underline{\qquad\qquad}\ \underline{\qquad\qquad} : P$

$p:\pi = 2r:2\varrho$ und

$\underline{\qquad\qquad}\ \underline{\qquad\qquad} : 2$

$p:\pi = r:\varrho$ das iſt, wie die Diameter oder ihre Helften, die Radii.

II. Satz.

$A:\alpha = r^2:\varrho^2$

Bew.

$A:\alpha = r^2P:\varrho^2P$ §. 575.

$\underline{\qquad\qquad}\ \underline{\qquad\qquad} : P$

$A:\alpha = r^2:\varrho^2$ u. wenn man mit 4 mult.

$\underline{\qquad\qquad}\ \underline{\qquad\qquad} : 4$

$A:\alpha = 4r^2:4\varrho^2 = D^2:d^2$ d. i. wie die Quadrate der Diameter oder der Radiornm.

§. 578. Anm. Setzt man für 1 : P die Ludolphiſche Verhältniß 100 : 314, ſo bekommt man $D^2 : A = 100^2 : \frac{314 \cdot 100}{4} = 10000 : 7850 = 1000 : 785$. welche Zahl man wegen practiſchen Aufgaben auch auswendig behalten kann. Aus dieſer Proportion läßt ſich der Inhalt des Cirkels leicht berechnen, ohne daß man vorher die Peripherie ſuchen dörfte.

§. 579. Zuſatz. Weil $a = \frac{d^2P}{4}$ §. 576. ſo iſt $\sqrt{\frac{4a}{P}} = d$, folglich kann man aus dem gegebenen Inhalt den Diameter finden. Und weil $p = 2rP$ ſo iſt $2r = \frac{p}{P}$, folglich kann man aus der Peripherie den Diameter und Radium finden.

§. 580. Zuſatz. Den Innhalt eines Sectors findet man, wenn man den Bogen, der gegeben ſeyn muß, im Längenmaas ſuchet, welches aus der gefundenen Peripherie ſich leicht finden läßt; der Bogen ſey z. E. 34°, ſo ſagt man, wenn p gefunden, $360° : 34° = p : p \cdot \frac{34}{360}$, welches der in eine gerade Linie verwandelte Bogen ſeyn wird, dieſen mul-

multiplicirt man mit dem halben Radius, ſo hat man den Inhalt des Ausſchnitts oder Sectors.

§. 581. Zuſatz. Weil das Quadrat des Diameters noch einmal ſo groß iſt als das Quadrat einer Seite des auf ihm aufgerichteten gleichſchenklichten rechtwinklichten Dreyecks, ſo iſt das Quadrat das um den Cirkel herumbeſchrieben wird, nochmal ſo groß als das Quadrat das in den Cirkel beſchrieben wird; nach §. 503.

§. 582. Lehrſatz. Die Winkel verhalten ſich gegeneinander ordentlich wie die Bogen, die ſie meſſen, und umgekehrt wie die Radii, (anguli ſunt in ratione directa arcuum & inverſa radiorum.) Dann es ſeyen Fig. 81. die Winkel GKD, und FKD gegeben, der Radius KG ſey R, und KL ſey r, die allgemeine Verhältniß, die wir oben §. 575. 1 : P. nannten, ſeye R : P, daß für 1 geſezt wird R; ſo iſt die Peripherie des kleinen Cirkels $p = \frac{rP}{R}$. Hieraus wird

Satz. *Fig.* 81.

$$GKD . FKL = \frac{GD}{R} : \frac{FL}{r}$$

Bew.

$$GKD : 360 = GD : P$$
$$360 : FKL = p : FL \quad \text{multiplicirt}$$
$$GKD . 360 : FKL . 360 = p . GD : P . FL$$
$$: 360$$
$$GKD : FKL = p . GD : P . FL \quad \text{aber}$$
$$p = \frac{rP}{R} \quad \text{wie oben gezeigt, diß ſubſtituirt, gibt}$$

GKD

$$GKD : FKL = \frac{rP . GD}{R} : P . FL \quad :rP$$

$$GKD : FKL = \frac{GD}{R} : \frac{FL}{r}.$$

§. 583. Lehrſatz. Der Ring zwiſchen zweyen concentriſchen Cirkeln iſt die Differenz der Quadrate ihrer Radiorum in P multiplicirt. Wo P des groſſen, p des kleinen Cirkels Peripherie, R und r die Radii ſind.

Satz.

$(R^2 - r^2)P =$ dem eingeſchloſſenen Ring.
(Annulo intercepto,)

Bew.

$A = R^2P$ } §. 575. wo A, a die areæ der Cirkel
$a = r^2P$ } ſubtr. ſind.

$A - a = R^2P - r^2P = (R^2 - r^2)P$
$A - a =$ annulo.

$(R^2 - r^2)P =$ annulo.

§. 584. Zuſatz. Der Abſchnitt des Rings PGDL verhält ſich zum ganzen Ring wie GD zu 360°.

§. 585. Lehrſatz. Das zwiſchen zween Bogen von verſchiedenen Cirkeln, nemlich zwiſchen einem Quadrat und halben Cirkelbogen enthaltene Stück AEBFA *Fig.* 65. läßt ſich völlig quadriren, und iſt dem gleichſchenklichten Dreyeck ABC gleich.

Satz. *Fig.* 65.

AFBEA = △ ABC.

Bew.

Beweis.

Weil $AB^2 = \frac{1}{2} AD^2$, ſo iſt der Cirkel, wovon AEB ein Bogen iſt, nochmalen ſo groß als der Cirkel, wovon AFB ein Bogen iſt; folglich iſt ein Quadrat vom groſſen Cirkel der Helfte des kleinen Cirkels gleich, und alſo AEBC = AFBA.

$$AFBA = AEBC$$
$$AEBA = AEBA$$

$$AFBA - AEBA = AEBC - AEBA$$, es iſt aber aus der Figur

$$\triangle ABC = AEBC - AEBA$$ folgl.

$$AFBA - AEBA = \triangle ABC$$ aber in der Figur

$$AFBA - AEBA = AFBEA$$

$$AFBEA = \triangle ABC.$$

§. 586. Anm. Dieſe Quadratur ſchreibt ſich von dem Hippocrates her, und heißt deßwegen, weil das Cirkelſtück Mondförmig iſt, Lunula Hippocratis; der Erfinder war ein verdorbener oder vielmehr verunglückter Kaufmann, welcher von dem Arzt Hippocrates wohl zu unterſcheiden iſt; Er legte ſich als ein unglücklicher Kaufmann auf die Mathematik, und bekam durch dieſe Wiſſenſchaft wo nicht gröſſern Reichthum doch einen gröſſern Nahmen als durch ſeine vorige Handthierung. Wie er denn unter den griechiſchen Lehrern der Mathematik, die vor Chriſti Geburt berühmt waren, ſich einen noch währenden Nahmen, den aber nur die Mathematikverſtändige wiſſen, erworben hat. Zur Quadratur des Cirkels ſelbſt trägt übrigens dieſe Erfindung nichts bey. Man weiß nur den Raum der zwey Cirkelbogen, davon der eine ein Theil eines doppelt ſo groſſen Cirkels iſt, der andere aber eines doppelt ſo kleinen, und von deſſen Raumes Quadratur die Verhältniß der Quadrate der Diameter zum Inhalt ihrer Cirkel der Grund iſt. Wenn man einen Cirkelabſchnitt, wie ADBA *Fig.* 54. quadriren könnte, ſo würde die Quadratur, ohnerachtet ſie übrigens nach §. 573. entbehrlich iſt, richtiger erfunden werden. Inzwiſchen iſt die bey nahe wahre Quadratur eines ſolchen Cirkelabſchnitts aus §. 579. klar; dann man ſucht den Ausſchnitt oder Sector des Cirkels nach §. 580. ziehet das Dreyeck ACB davon ab, ſo hat man das Segmentum circulare oder den Abſchnitt ADBA. Weitere Umſtände hievon gehören in die practiſche

ctiſche Geometrie. z. E. Daß unter allen Figuren von gleichem Umfang der Cirkel die größte Fläche, und wiederum die regulaire eine gröſſere Fläche als die irregulaire, gleichen Umfangs, und die regulaire von mehreren Seiten wieder mehr als die regulaire von weniger Seiten, dahero auch aus dieſem Satz der erſte folgt, daß das regulaire unendliche Eck, das iſt der Cirkel, unter allen Figuren gleichen Inhalts die größte Fläche haben werde. Folglich können Figuren von einerley Umfang verſchiedene Flächen von verſchiedener Gröſſe haben. Wenn die Dido mit dem aus der Ochſenhaut geſchnittenen Riemen das ihr verſprochene Land im Cirkularumfang umſchloſſen, ſo hat ſie ungleich mehr Raum bekommen, als wenn ſie den Riemen im Quadrat ausgeſpannt hätte; unerachtet beederſeits der Umfang einerley war. Wie dann auch die Fläche einerley bleiben kann, wenn der Umfang gleich unendlich wäre. Denn zwey Parallelogramme von gleicher Grundlinie und Höhe ſind einander gleich, das eine kann ein Quadratenmäßiger Umfang ſeyn, das andere ein ſchiefes Rhomboides, daß die zwo Parallelen, die es nach der Länge einſchlieſſen, ans Unendliche grenzen. Welches um ſo eher zu merken, als man in der Ausübung hier manche Fehler macht.

Die Lage der Linien gegen die ebene Flächen und der Flächen gegen einander.

§. 587. Anm. Die ebene Geometrie iſt allen denenjenigen nöthig, die in den ſphäriſchen Wiſſenſchaften und überhaupt in der angewandten Mathematik mit Ueberzeugung was thun wollen: Weil aber zu den Figuren, welche ſie erläutern, nicht nur die Perſpectiv ſondern auch die Mahlerey erfodert wird, wenn ſie deutlich ſeyn ſollen, ſolche aber noch nicht erkläret iſt, ſo haben wir, um nicht vieles undeutlich zu ſagen, nur eine Figur, nemlich die 68. *Fig.* zu dieſem Zweck zeichnen laſſen, werden aber in der Ausführung dennoch der Deutlichkeit durch körperliche oder maſſive Ausdrücke zu Hülfe kommen, auch die von Holz oder Chartenpapier zu ſchneidende Flächen nennen, wodurch man der Einbildung die Sache eben ſo gut oder noch beſſer eindrucken kann, als durch Zeichnungen; dann es wird der mathematiſchen Schärfe gleichgültig ſeyn, ob der Kupferſtecher oder der Formſchneider die Figuren zeichnet.

§. 588. **Lehrſatz.** Wenn zween Punkte einer geraden Linie in einer ebenen Fläche liegen, ſo

liegt

liegt die ganze Linie darinnen, und wenn drey Punkte, die nicht in gerader Linie ſind, in einer und eben derſelben Fläche liegen, ſo liegt die ganze Figur, die durch die drey Punkte beſtimmt wird, z. E. ein Dreyeck, ein Cirkel, in einer ſolchen ebenen Fläche. Der Beweis gründet ſich auf die erſten Begriffe, die wir ſchon erklärt haben, und kann auf einem jeden ebenen Tiſch, wo man ſolche Punkten annimmt, einem handgreiflich gemacht werden; dahero dieſer Lehrſatz auch von manchen für einen Grundſatz angenommen wird.

§. 589. Zuſatz. Drey Punkte beſtimmen alſo die Lage einer Ebene; und ein jedes Dreyeck liegt in einer Ebene.

§. 590. Lehrſatz. Wenn eine gerade Linie auf einer ebenen Fläche, oder nur auf zwo einander durchkreuzenden Linien, auf dem Durchſchnittspunkt, perpendicular ſteht, ſo ſteht ſie auf allen möglichen geraden Linien, die noch weiter durch den Durchſchnittspunkt gezogen werden können, perpendicular. Die Sache iſt ſo natürlich, daß es überflüſſig wäre, einen Beweis zu geben; wenn wir auch die perſpectiviſche Malereyen ſchon wirklich erkläret hätten. Man ſetze eine Stecknadel auf einen ebenen Tiſch perpendicular, und ziehe durch den Punkt, wo die Nadel aufſteht, in der Ebene ſo viel gerade Linien, als man will, ſo werden überall mit der perpendicularen Stecknadel, die ſich auf keine Seite mehr lenket als auf die andere, nach der Definition der perpendicularen Linien, rechte Winkel gemacht werden; folglich wird ſie auf allen möglichen geraden Linien der Ebene perpendicular ſtehen.

§. 591.

§. 591. Zuſatz. Alle auf dieſe Weiſe ſich durchkreuzende Linien, auf welchen eine dritte perpendicular ſtehet, ſind daher in einer und eben derſelben Ebene befindlich.

§. 592. Lehrſatz. Zwo Linien, die auf einer ebenen Fläche perpendicular ſtehen, ſind parallel. Dann man ziehe von den Endpunkten ſolcher Linien oder Stecknadeln eine gerade Linie in der Ebene, welche Linie verlängert die beede Perpendikel ſchneidet, ſo werden die dadurch entſtehende zwey rechte Winkel, innerhalb der Perpendicularlinien zuſammen 180°, machen; weil 2.90 = 180°, folglich nach §. 457. beede Perpendikel parallel ſeyn.

§. 593. Zuſatz. Wenn von ſolchen zwo Parallellinien eine auf der Ebene perpendicular ſtehet, ſo wird auch die andere auf der Ebene perpendicular ſtehen.

§. 594. Zuſatz. Wenn auf der Ebene in den Endpunkten der beeden Perpendicularen auch Parallellen gezeichnet werden, wie *Fig.* 68 ſo wird die Diagonal des Rectanguli, nemlich AF, nur alsdenn perpendicular auf DE ſeyn, wenn die Grundlinie des Parallelogramms FI mit der Parallele KL in I rechte Winkel macht. §. 457. und wenn zwo Parallelen mit einer dritten parallel ſind, ſo ſind ſie unter ſich parallel; wie man augenſcheinlich ſieht, wenn man drey Stecknadeln auf einer Ebene in gerader oder anderer Direction unter einerley Winkel einſtecket.

§. 595. Zuſatz. Was von den Parallelen und Perpendicularlinien geſagt worden, gilt auch von den Ebenen.

§. 596. Zuſatz. Aus einem gegebenen Punkt über der Ebene kann man nicht mehr als eine Perpendicularlinie auf die Ebene herab fällen, welche zugleich der kürzeſte Weg von dem gegebenen Punkt auf die Ebene herab iſt.

§. 597. Zuſatz. Zwiſchen zwo Ebenen iſt der kürzeſte Weg eine gerade Linie, die auf beeden Ebenen perpendicular ſtehet, und die man die Diſtanz der beeden Ebenen nennet.

§. 598. Lehrſatz. Man nehme auf einer Ebene zwo Parallellinien an; man fälle aus einem beliebigen Punkt über der Ebene eine Perpendicularlinie auf die eine der gegebenen Parallellinien, welche zugleich perpendicular auf die ganze ebene Fläche ſeye: aus eben dem angenommenen Punkt fälle man einen Perpendikel auf die andere Parallellinie, welche folglich auf die Ebene nicht parallel ſeyn kann nach §. 596. ſo wird die Linie in der Ebene zwiſchen den Endpunkten der Perpendikel auf beede Parallelen perpendicular ſeyn. Das iſt *Fig.* 68. die Linie FI; dann es ſey die Ebene BC, oder ein ebener Tiſch, die beede Parallellinien KL, DE, der Punkt oberhalb der Ebene A, von welchem auf KL der Perpendikel AI herabgefällt wird, der auf die Ebene BC ſelbſt perpendicular iſt; von A werde auf die andere parallele DE, der Perpendikel AF gefällt, der aber nur auf DE und nicht auf die ganze Ebene perpendicular ſtehen kann, von F nach I ziehe man die gerade Linie, ſo macht FI mit DE bey F einen rechten Winkel.

Satz,

Saꝫ. *Fig.* 86.

$DFI = IFE = 90°$

Bew.

$DFI + FIK = 180°$ nach §. 457.

$FIK = 90$

$DFI = 180 - 90° = 90°$ oder folgender maſſen:

Wenn AF auf DE perpendicular iſt, ſo werden von allen Punkten zwiſchen A und I auf F Linien gezogen werden können, die auf DE perpendicular ſind, dann der Punkt A kann in die Linie AI angenommen werden wo er will; wenn er nun dem Punkt I unendlich nahe iſt, indeme man ſich vorſtellen kann, die Linie AI ſeye im Punkt F an DE beveſtiget, und bewege ſich um die Axe und DE herum, ſo daß die Winkel bey F unverrückt bleiben, ſo fällt er mit I zuſammen, folglich iſt auch IF auf DE perpendicular, das iſt $DFI = IFE = 90°$.

Oder auch apogogiſch, wenn FI auf DE nicht perpendicular wäre, ſo müßte eine andere Linie durch F auf DE perpendicular ſeyn; folglich auch ein anderer Perpendikel von A auf dieſe Linie und auf die ganze Ebene ſich fällen laſſen; welches nicht möglich, weil von keinem Punkt auſſer der Ebene zween verſchiedene Perpendikel auf die Ebene ſich fällen laſſen.

§. 549. Anm. Wenn man ein hölzernes rechtwinklichtes Dreyeck ſich ſchneiden läßt, und auf einem Tiſch zwo Parallelen in der Diſtanz der Grundlinie ziehet, ſo wird man augenſcheinlich ſehen, daß, nur in dem Fall, wenn die Grundlinie des Dreyecks mit einer der gezogenen Parallelen auf der Ebene rechte Winkel macht, die Hypothenuſe mit der andern Parallele einen rechten Winkel macht; ſonſt aber in keinem Fall. Dieſer Lehrſatz iſt beſonders zu merken, weil er im folgenden, vornemlich in der ſphäriſchen Trigonometrie, ſehr brauchbar iſt.

§. 600. **Zuſatz.** Wenn FI mit IL einen rechten Winkel macht, ſo iſt AF wie FI auf DE perpendicular.

§. 601. **Zuſatz.** Wenn AI auf der Ebene BC perpendicular ſtehet, ſo ſtehet die ganze Ebene durch AI drauf. Das ganze hölzerne Dreyeck AFI, oder ein Quadrant, deſſen Radius AI, iſt auf der Ebene BC perpendicular. Dann AI iſt mit allen Linien der Ebene BC durch I perpendicular, folglich auch mit FI, daher FIA = 90°.

§. 602. **Zuſatz.** Und wenn die Ebene AFI auf BC ſenkrecht oder perpendicular ſteht, ſo iſt auch AI auf BC ſenkrecht, und AI iſt der einige Perpendikel, der ſich aus A auf BC fällen läßt.

§. 603. Anm. Aus den bisherigen Lehr- und Zuſätzen wird man die nachfolgende Erklärungen der Neigungswinkel ſowohl der Linien gegen Ebenen, als der Ebenen gegen einander deſto beſſer faſſen, dahero wir dieſe Erklärungen auf den Beſchluß verſparet haben.

§. 604. **Erklär.** Der Neigungswinkel einer Linie gegen eine Ebene, iſt der Winkel, den die Linie mit einer andern in der Ebene dergeſtalt gezogenen Linie macht, daß ein Perpendikel von einem nach Belieben angenommenen Punkt in der geneigten Linie auf die Linie in der Ebene herab gefällt werden kann, der ſie ſchneidet. So iſt AFI in der 68. *Fig.* der Neigungswinkel der Linie AF mit der Ebene BC, weil die in der Ebene gezogene Linie FI mit AI einen rechten Winkel macht; eine jede andere Linie in BC, die von F aus gegen einer andern Richtung gezogen wird, würde dieſes nicht leiſten, folglich den Neigungswinkel nicht beſtimmen.

§. 605. Erkl. Eben ſo iſt der Neigungswinkel zwoer Ebenen gegen einander der Winkel CDE *Fig.* 83. wann von einem beliebigen Punkt C der Ebene ACB auf den Durchſchnitt beeder Ebenen AB ein Perpendikel CD gezogen, und eben ſo in der andern Ebene ABC, die Linie ED auf AB perpendicular gezogen wird, daß CD und DE im Punkt D ſich begegnen. Jede andere Linie von D aus gegen eine andere Richtung wird zwar auch einen Winkel, aber nicht den Neigungswinkel der beeden Ebenen gegen einander beſtimmen.

§. 606. Zuſatz. Wenn CD nicht nur auf AB ſondern auch DE perpendicular iſt, ſo ſtehen beede Ebenen auf einander perpendicular.

§. 607. Zuſatz. Zwo parallele Ebenen ſtoſſen niemalen zuſammen, und machen mit einer dritten Ebene, auf der ſie ſtehen, gleiche Neigungswinkel.

§. 608. Zuſatz. Zwo einander durchſchneidende Ebenen ſtehen auf einer dritten perpendicular, wenn ihre Durchſchnittslinie auf der dritten perpendicular ſteht; und die Durchſchnittslinie ſteht auf der dritten Ebene ſenkrecht, wenn die beede ſich durchſchneidende Ebenen auf der dritten ſenkrecht ſtehen; welches aus *Fig.* 68. erhellet, wenn man an das Dreyeck AFI ein Rectangulum nach Belieben hinſezt, daß die Linie AI beeder Durchſchnittslinie wird; wie man ſolches leicht mit Chartenpapier bewerkſtelligen kann.

§. 609. Anm. Ueberhaupt werden alle die bisher vorgetragene Sätze erleichtert, und ohne Müh gefaßt werden, wenn man ſich von Holz oder Chartenpapier die Ebenen unter den angeführten Bedingungen ſchneiden läßt, und ſolche ſo zuſammen fügt, daß die Beweiſe der Lehrſätze auch der Einbildungs-

kraft ſo ſinnlich werden, als die bisherige, die wir aus denen bezeichneten Figuren erläutert haben.

Allgemeine Begriffe geometriſcher Cörper, oder Einleitung in die Stereometrie.

§. 610. Erkl. Ein Continuum, das zwiſchen zwo ebenen gleichen Grundflächen, und zwiſchen ſo viel Parallelogrammen eingeſchloſſen iſt, als jede Grundfläche Seiten hat, heißt ein Prißma *Fig* 73. 71. es iſt dreyeckigt, wenn die Grundflächen Dreyecke; viereckigt, wenn die Grundflächen Vierecke ſind; ſind dieſe viereckigte Grundflächen Parallelogramme, ſo heißt das Prißma ein Parallelepipedum, *Fig.* 70. welches ſchief iſt, wenn die Seitenflächen ſchief, und ſenkrecht, wenn die Seitenflächen ſenkrecht auf der Grundfläche ſtehen; das ſenkrechte wird ein Cubus, wenn die Seitenflächen und Grundflächen alleſamt gleich ſind. *Fig.* 69. Wenn die Grundfläche unendlich viel unendlich kleine Seiten hat, das iſt, wenn ſie ein Cirkel iſt, ſo wird aus dem Prißma ein Cylinder. *Fig.* 74.

§. 611. Erklär. Eine Pyramide iſt ein Cörper, der von einer ebenen Grundfläche, und ſo viel ſich im Scheitel zuſpitzenden Dreyecken begrenzet wird, als die Grundfläche Seiten hat. *Fig* 72. Aus der Pyramide wird ein Kegel, (Conus) wenn die Grundfläche ein Cirkel iſt; und der Kegel heißt abgekürzt (conus decurtatus) wenn ſeine Spitze mit einer der Grundfläche parallelen Ebene abgeſchnitten wird. *Fig.* 75.

§. 612.

§. 612. Erklär. Eine Kugel entſteht, wenn ſich ein halber Cirkel um ſeinen Diameter herum, wie um eine Axe bewegt, bis er wieder in die vorige Lage kommt. Die krumme Ebene, welche die Kugel begrenzt, heißt die Kugelfläche.

§. 613. Erkl. Ein córperlicher Winkel (angulus ſolidus) iſt ein Winkel, der von mehr als zwo Linien eingeſchloſſen iſt, und davon niemalen mehr als zwo in einer und eben derſelben ebenen Fläche liegen können. So iſt ein jedes Eck in einem Zimmer ein córperlicher Winkel.

§. 614. Zuſatz. Zu einem córperlichen Winkel hat man wenigſtens drey Seiten nóthig.

§. 615. Zuſatz. Ein córperlicher Winkel beſtehet aus verſchiedenen ebenen Winkeln; die Summe dieſer Winkel, die den córperlichen ausmachen, müſſen allemal weniger als vier rechte Winkel oder 360° halten, ſonſt werden ſie in eine und eben dieſelbe Ebene fallen.

§. 616. Anm. Man verſtehet hier auswärtsgehende Winkel, und keine einwärtsgehende; die Franzoſen nennen dieſe zwo Gattungen von Winkeln angles rentrans und ſaillants.

§. 617. Erkl. Regulaire Córper ſind, die in regulaire Vielecke, die lauter gleiche Flächen und gleiche Ecke oder córperliche Winkel haben, eingeſchloſſen ſind.

§. 618. Zuſatz. Es gibt alſo nur fünf regulaire Córper, die von den Hedris oder Seiten und der Anzahl der Winkel benennt werden: nemlich 1) das Hexaedrum oder Cubus, den man teutſch den Würfel heißt, es iſt in ſechs gleiche Quadrate eingeſchloſſen, und der córperliche Winkel beſteht

aus drey Rechten oder 3 . 90 = 270°. 2) Das Tetraedrum iſt in vier gleiche gleichſeitige Dreyecke eingeſchloſſen, der cörperliche Winkel, den je drey Dreyecke mit einander machen, iſt alſo 3 . 60 = 180°. 3) Das Octaedrum iſt in acht gleiche gleichſeitige Dreyecke eingeſchloſſen, davon je vier Dreyecke zuſammen den cörperlichen Winkel machen, der folglich 4 . 60 = 240° hält. 4) Das Icoſaedrum iſt in zwanzig gleiche gleichſeitige Dreyecke eingeſchloſſen, davon je fünf zuſammen den cörperlichen Winkel machen, der dahero 5 . 60 = 300° hält. 5) Das Dodecaedrum iſt in zwölf regulaire gleiche Fünfecke eingeſchloſſen, davon je drey den cörperlichen Winkel machen; der folglich, weil der Polygonwinkel im Fünfeck $= 180 - \frac{360}{5} = 180 - 72 = 108°$ iſt, nach dieſer Rechnung 3 . 108 = 324° hält. Weitere regulaire Cörper gibt es nicht; dann ein cörperlicher Winkel, den 6 gleichſeitige Dreyecke machen, würde 6 . 60 = 360° halten, folglich in eine und eben dieſelbe Ebene fallen; eben das gilt von dem cörperlichen Winkel, den vier Quadrate machen ſollen; dann 4 . 90 = 360°; ſie fallen alſo auch in eine Ebene; und noch vielweniger würden die aus mehr Winkeln beſtehende regulaire Vielecke dazu taugen; z. E. das Sechseck hat zum Polygonwinkel 120°, folglich würden drey Flächen davon, die man wenigſtens haben müßte, 3 . 120 = 360° machen, welche ſchon in eine Ebene fallen.

§. 619. Zuſatz. Die Kugel, als ein Unendlicheck, könnte man noch als den ſechsten regulairen Körper anſehen, der aus unendlich viel unendlich kleinen Flächen und aus gleichen cörperlichen Win-

Winkeln, die aus dieſen unendlich vielen gleichen Flächen entſtehen, zuſammen geſezt iſt.

Die Verwandlung der Körper.

§. 620. Lehrſatz Ein ſchiefes Parallelepipedum kann in ein ſenkrechtes verwandelt werden, das ihm vollkommen gleich iſt, wenn es nur einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat. Oder zwey Parallelepipeda, die einerley Grundfläche und Höhe haben, ſind einander gleich. *Fig.* 70.

Saß, *Fig.* 70.

FGHKICDR = FGHKNABS

Beweis,

DFASBDR = CGKNACI.

CLMSB = CLMSB ſubtr.

DFASBDR—CLMSB=CGKNACI—CLMSB

d. i. in der Figur

DFLMIC = BLGKNA. ferner iſt

HFLMKG = HELMKG addirt

DFLMIC + HFLMKG = BLGKNA + HFLMLG

d. i. in der Figur

FGHKICDR = FGHKNABS.

§. 621. Zuſatz. Ein jedes Parallelepipedum läßt ſich durch die Diagonallinie in zwey gleiche dreyeckigte Prißmata verwandeln, und jedes iſt die Helfte von einem Parallelepipedo, das gleiche Höhe und Grundfläche hat.

§. 622. Zuſatz. Ein jeder Cubus läßt ſich in ein ſchiefes Parallelepipedum verwandeln, das mit dem Cubo gleichen Inhalts iſt.

§. 623. Zuſatz. Ein vieleckigtes Prißma läßt ſich durch die Diagonallinie in ſo viel dreyeckigte verwandeln, als die Grundlinie Seiten hat, weniger zwey. §. 519. Die Summe dieſer Prißmatum iſt dem Inhalt des vieleckigten gleich.

§. 624. Zuſatz. Weil der Cylinder als ein unendlicheckigtes Prißma angeſehen werden kann, ſo kann auch der Verſtand dieſe Verwandlung vom Cylinder denken.

§. 625. Lehrſatz. Ein jedes dreyeckigtes Prißma läßt ſich in drey vollkommen gleiche Pyramiden von einerley Höhe und Grundfläche verwandeln. Dann man darf ſich nur ein dreyeckigtes Prißma von Holz ſchneiden laſſen, und ſolche durch die Diagonallinien der Seitenflächen ſchneiden, ſo wird man drey gleiche Pyramiden bekommen. Wie ſolches durch den Augenſchein bey einem hölzernen Prißmate bewieſen werden kann: das nöthigſte, was den Schnitt betrift, erſiehet man auch aus *Fig.* 71.

§. 626. Zuſatz. Eine dreyeckigte Pyramide iſt alſo der dritte Theil eines dreyeckigten Prißmatis, das einerley Höhe und Grundfläche mit ihm hat.

§. 627. Zuſatz. Weil ein vieleckigtes Prißma in lauter dreyeckigte durch die Diagonalen ſich verwandeln läßt, ſo gilt dieſes auch von der Pyramide; und eine vieleckigte Pyramide von lauter ausgehenden Winkeln wird der dritte Theil eines eben ſo vieleckigten Prißma ſeyn.

§. 628. Anm. Die Beſtimmung von ausgehenden Winkeln ſetzen wir hinzu, weil von dieſen eigentlich die Rede iſt; welches Euclides ſupponirt, dahero Herr le Sage Hist. de l'Acad. Roi. des Scienc. à Paris 1762 unſeres Bedenkens die davon handelnde Stelle des Euclides nicht für fehlerhaft oder unterſchoben halten dürfte; weil der Beweis von einwärtsgehenden Winkeln nicht ſtatt hat, und Euclides dieſe Beſtimmung nicht beygeſetzt:

Uns dünkt, er hat ſie ſupponirt, weil von ſolchen Winkeln eigentlich die Rede iſt. Unerachtet er bekannter maſſen in cörperlichen beſonders coniſchen Schnitten nicht ſo glücklich, ſo wollen wir doch dieſes zu ſeiner Entſchuldigung nicht anführen.

§. 629. Lehrſatz. Weil ein Kegel als eine Pyramide angeſehen werden kann, deren Grundfläche unendlich viel Ecke hat, ſo kann man auch den Kegel als den dritten Theil des Cylinders anſehen, der mit ihm einerley Grundfläche und Höhe hat.

§. 630. Zuſatz. Eine Kugel läßt ſich, wenigſtens durch den Verſtand, in eine Pyramide verwandeln, deren Grundfläche die Oberfläche der Kugel, und die Höhe der Radius iſt.

§. 631. Lehrſatz. Zween gleiche Cubi laſſen ſich in einen verwandeln, der den beeden gegebenen vollkommen gleich iſt. Ein Cubus oder Würfel läßt ſich verdoppeln, oder in einen andern Cubus verwandeln, der gerade noch einmal ſo groß iſt, als der gegebene. Dann es ſeye des gegebenen Cubi Seite $= a$, ſo iſt ſein Inhalt a^3, die Seite des geſuchten $= x$, ſo iſt ſein Inhalt $= x^3$, folglich nach der Bedingung $x^3 = 2a^3$, und $x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$; wenn man nun zwiſchen a und 2a zwo mittlere continuirlich geometriſche Proportionalzahlen ſuchet, ſo wird die erſte davon die geſuchte Seite ſeyn; es ſeyen die zwey mittlere Proportionalzahlen x, y, daß die Progreſſion heiſſe a, x, y, 2a; ſo iſt

nr. I. $a : x = x : y$ nr. II. $x : y = y : 2a$.

folgl. $ay = x^2$ $2ax = y^2$

$:a$

$y = \frac{x^2}{a}$ und quadrirt

y^2

$y^2 = \frac{x^4}{a^2}$ es iſt aber auch nach nr. II.

$y^2 = 2ax$ folglich

$$\frac{x^4}{a^2} = 2ax$$

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot a^2$$

$$x^4 = 2a^3x$$

$$\overline{\qquad\qquad} : x$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$\overline{\qquad\qquad} \sqrt[3]{\ } \text{extr.}$$

$x = \sqrt[3]{2a^3} = a\sqrt[3]{2}$. Da nun x die Seite des doppelten Cubus iſt, ſo iſt es auch die erſte von zwo mittleren Proportionalgröſſen zwiſchen a und 2a; daher man durch dieſe Methode die Seite des doppelt ſo groſſen Cubus finden kann.

§. 632. Anm. Diß iſt das ſogenannte Delphiſche Problem, welches unter den Alten eine ſehr berühmte Aufgabe war. Der heydniſche Apollo wurde um Abwendung der Peſt von den Athenienſern angerufen. Er verſprach zu helfen, woferne man ſeinen Altar zu Delphi, der ein völliger Cubus war, verdoppeln, oder einen neuen Altar machen würde, der gerade noch einmal ſo groß, und doch wie der vorige, abermal ein vollkommener Cubus wäre. Dieſes Problem gab nun Griechenland allen ſeinen Weiſen auf, vermuthlich ſteckten es die Geometern ſelbſt hinter die delphiſche Prieſter, damit der Ausſpruch des Apollo deſto eher alle Gelehrte in der griechiſchen Welt dazu aufmuntern möchte. Man wollte die Sache mit einer geometriſchen Zuverläßigkeit und nicht mechaniſch ausmachen; da es aber den meiſten zu ſchwer fiele, ſo blieb das Problem lange Zeit unaufgelößt. Eratoſthenes, Bibliothecarius zu Alexandrien, und der bekannte Hippocrates, von dem wir ein quadrirtes mondförmiges Cirkelſtück, Lunulam Hippocratis, haben, fielen zuerſt darauf, daß das Problem von der Erfindung zwoer mittleren Proportionallinien zwiſchen zwo gegebenen Linien abhange; wie unſer oben gegebener Beweis lehret. Der Beweis iſt zwar mehr arithmetiſch als geometriſch; dann der Lehrſatz in Worten heißt folgender maſſen: Wenn man die Seite des gegebenen Cubus mit der Cubicwurzel aus 2 multiplicirt, ſo hat man die Seite des Cubus, der noch einmal ſo groß iſt. Weil aber dieſes Product die erſte von zwo mittlern Pro-

Proportionallinien zwiſchen a und 2a iſt, wie wir gezeigt, ſo läßt ſich der Beweis auch geometriſch vortragen.

Die Ausmeſſung der Cörper.

§. 633. **Erkl.** Ein Cörper wird ausgemeſſen, wenn man, wie in dem Flächenmaas eine Fläche, alſo hier im Cörpermaas einen Cörper zur Einheit macht, und ſuchet, wie oft dieſer zur Einheit gemachte Cörper in dem andern enthalten ſeye. z. E. *Fig.* 80 α; da die Frage iſt, wie oft der kleine Cörper AMNLK im groſſen ADFEBC enthalten ſeye, oder herumgelegt werden könne?

§. 634. Zuſatz. Der Cörper AMNLK wird zur Einheit angenommen; und weil die vollkommene Quadrate im Flächenmaas die dienlichſte Einheiten ſind, ſo hat man auch im Cörpermaas vollkommene Cubos oder Würfel zur Einheit als die dienlichſte angenommen, wie wir ſogleich zeigen werden.

§. 635. Zuſatz. Wenn ein ſenkrechtes Parallelepipedum 6 Schuh lang, 4 Schuh breit, und 2 Schuh hoch iſt, und wenn *Fig.* 80. der Cubus AMNLK einen Schuh lang, breit und hoch iſt, ſo kann man ihn im gröſſern 4 . 2 . 4 = 48 mal herum legen. Alſo iſt der Inhalt des groſſen Parallelepipedi = 48 . AMNLK.

§. 636. Zuſatz. Iſt alſo AMNLK = 1, ſo iſt der Inhalt = 48. Wo man allemal die Einheit hinzu denken muß.

§. 637. Zuſatz. Man kann alſo nicht überhaupt ſagen, wenn man genau redet, der Inhalt eines Parallelepipedi ſeye das Product ſeiner drey

Sei-

Seiten; dann eigentlich zu reden, gibt eine Linie, ſie mag ſo oft multiplicirt werden als ſie will, eben wieder eine Linie; wenn aber dieſes Product in einen Cörper multiplicirt wird, ſo gibt es einen Cörper; und wenn der Cörper = 1, ſo iſt das Product der Linien, weil 1 nicht multiplicirt, durch den im Sinn hinzugedachten Factor der Einheit der geſuchte Cörper.

§. 638. Zuſatz. Weil im Längenmaas ein Schuh 10″ hält, ſo hält ein Cubicſchuh, der 10″ lang, breit und hoch iſt, 10 . 10 . 10 Cubiczoll; und ein Cubiczoll 10 . 10 . 10 Cubiclinien; dahero im Cubicmaas die Linien, Zolle, Schuhe von 1000 zu 1000 gehen; das iſt, 1000 Cubiclinien geben einen Cubiczoll, 1000 Cubiczolle einen Cubicſchuh, 1000 Cubicſchuh eine Cubicruthe; und folglich ſind 34560327854‴ im Cubicmaas 34° 560′ 327″ 854‴.

§. 639. Zuſatz. In dem Ganzen verſchlägt es übrigens nichts, (wofern nur das angenommene Maas = 1 geſezt wird) wenn man ſagt, ein Cubus ſey das dreyfache Product einer Seite, und ein ſenkrechtes Parallelepipedum das Product aller 3 Seiten; die Seite des Cubi ſey drey, ſo iſt ſein Inhalt 3 . 3 . 3 = 27. oder a, ſo iſt ſein Inhalt a^3; die drey Seiten eines Parallelepipedi, 2, 4, 5, oder a, b, c, ſo iſt der Inhalt 2 . 4 . 5 = 40, oder abc; aber alles unter der oben geſetzten Bedingung.

§. 640. Zuſatz. Weil ein jedes ſchiefes Parallelogramm in ein ſenkrechtes verwandelt werden kann, §. 620. ſo läßt ſich ein jedes ſchiefes Parallelogramm ausmeſſen, es iſt nemlich das Product aus der Grundfläche in die Höhe.

§. 641. Zuſatz. Und weil ein dreyeckigtes Prißma die Helfte eines Parallelepipedi von einerley Grundfläche und Höhe iſt, ſo läßt ſich auch dieſes ausmeſſen; es iſt nemlich abermal das Product aus der Grundfläche, nemlich dem ausgemeſſenen Dreyeck in die Höhe des Prißmatis. Eben ſo ſind vieleckigte Prißmata, folglich auch das Unendlicheck, oder der Cylinder dem Product aus den Grundflächen in die Höhe gleich.

§. 642. Zuſatz. Und weil die Pyramid der dritte Theil des Prißmatis von gleicher Höhe iſt, ſo iſt der Inhalt der Pyramide dem Product der Grundfläche in den dritten Theil der Höhe gleich.

§. 643. Zuſatz. Eben ſo iſt der Inhalt des Kegels das Product aus der circularen Grundfläche in den dritten Theil der Höhe, weil der Conus der dritte Theil vom Cylinder iſt, der einerley Grundfläche und Höhe mit ihm hat.

§. 644. Zuſatz. Der abgekürzte Kegel wird ausgemeſſen, wenn man den abgeſchnittenen Theil des Kegels aus den beeden Circularflächen, und aus der gegebenen Höhe des abgekürzten Kegels ſucht, und hernach den kleinen Kegel von dem Ganzen ſubtrahirt. Denn es ſeyen *Fig.* 75. die beeden Radii DE und AC gegeben, ſo weiß man auch ihre Differenz AB; es ſey ferner die Höhe des abgekürzten Kegels BD oder CE gegeben, ſo findet man die Höhe CF des ganzen Kegels, weil $AB : BD = AC : CF$, und auch die Höhe des kleinen Kegels $FE = CF - EC$, und daraus die ganze Kegel, und ihre Differenz, den abgekürzten Kegel.

§. 645. Zuſatz. Wenn man die Oberfläche der Kugel weiß, ſo findet man auch ihren Inhalt, welcher nach §. 630. dem Product aus der Oberfläche in den dritten Theil des Radius, oder in den ſechsten Theil des Diameters gleich ſeyn wird. Wie man aber die Kugelfläche finde, werden wir ſogleich zeigen, weil wir von der Kugel beſonders handeln.

§. 646. Zuſatz. Irregulaire Cörper werden durch allerhand Kunſtgriffe, z. E. durch Einlegen in ein mit Waſſer gefülltes vollkommenes Parallelepipedum u. ſ. w. auf die Regularität reducirt, wie *Fig.* 82. diß aber gehört in die practiſche Geometrie.

Die Kugel oder Sphäre.

§. 647. Erklär. Was eine Kugel ſeye und wie ſie entſtehe, haben wir §. 612. geſagt. Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geſchnitten wird, ſo entſtehen aus den Schnitten Cirkel; welche immer gröſſer werden, je näher die Schnitte dem Mittelpunkt der Kugel kommen, bis ſie im Mittelpunkt die gröſte werden; dahero die gröſte Cirkel einer Kugel (Circuli maximi) diejenige ſind, die durch den Mittelpunkt der Kugel gehen, und deren Peripherie ſich an der Kugelfläche endigt. Alle andere Cirkel ſind kleiner.

§. 648. Lehrſatz. Die Kugel iſt zween Drittheilen von dem Cylinder gleich, der einerley Höhe und Diameter mit der Kugel hat. Dann man ſtelle ſich vor *Fig.* 76. das Quadrat DCBA bewege ſich um AD als eine Axe herum, ſo entſteht ein Cylinder. Zu

glei-

gleicher Zeit ſollen ſich das gleichſchenklichte Dreyeck DCA auch um DA, und der Quadrant DGB ebenfalls um DA als um eine Axe herum bewegen, ſo wird im erſten Fall ein Conus, im andern eine halbe Kugel durch dieſe Bewegung entſtehen. Die Summe aller Durchſchnitte oder Scheiben vom Cylinder wird den Cylinder, die Summe aller Durchſchnitte oder Scheiben vom Conus den Conus, und die Summe aller Durchſchnitte von der Kugel die Kugel geben. Wenn man nun *Fig.* 76. einen beliebigen Durchſchnitt EH, der dem Cylinder dem Conus, und der Kugel gemeinſchaftlich iſt, und hernach in dem Durchſchnittspunkt der Kugel G aus A den Radius AG ziehet, ſo wird der Beweis des vorgetragenen Lehrſatzes nicht ſchwer ſeyn.

Satz. *Fig.* 76.

Sphär. $= \frac{2}{3}$ Cyl.

Beweis.

$AG^2 = AE^2 + EG^2$ §. 503.

$AG^2 = EH^2$ weil $AG = AB = EH$. nach der Vorausſetzung.

$EH^2 = AE^2 + EG^2$

$AE^2 = EF^2$ weil $AD:DC = AE:EF$

folglich ſubſtituirt

$AD:DC = 1:1$ iſt ein Quadrant

$AE:EF = 1:1$ d. i.

$AE = EF$

$EH^2 = EF^2 + EG^2$

$EF^2 = EF^2$ ſubtr.

$EH^2 - EF^2 = EG^2$ folglich

Sum. EH^2 — Sum. EF^2 = Sum. EG^2 das iſt, weil ſich die Quadrate

der Diam. wie die Circulflä-
chen verhalten,

Cyl. — Con. = Sphär. es iſt aber

Cyl. — Con. = Cyl. — $\frac{1}{3}$Cyl. = $\frac{2}{3}$Cyl. daher

$\frac{2}{3}$Cyl. = Sphär.

§. 649. Zuſatz. Ein Cylinder, Kugel und Kegel von gleichen Höhen verhält ſich alſo wie 1, $\frac{2}{3}$ $\frac{1}{3}$, das iſt, wie 3, 2, 1.

§. 650. Anm. Dieſes iſt eine Erfindung des Archimedes, welcher ſo verliebt darein war, daß er ſie auf ſein Grabmaal zu ſtechen befohlen haben ſolle. Sie iſt auch in der That ein Beweis von einer nicht geringen Scharfſinnigkeit, wodurch ſich dieſer groſſe Geometra verewigt hat.

§. 651. Lehrſatz. Die Oberfläche der Kugel iſt vier größten Cirkeln (circulis maximis,) gleich.

Satz.

4 Circ. max. = Superfic. Sphær.

Beweis.

Circ. max. × Diam. = Cylindr. . $\frac{2}{3}$

$\frac{2}{3}$ Circ. max. × Diam. = $\frac{2}{3}$ Cyl.

Sphær. = $\frac{2}{3}$ Cyl.

$\frac{2}{3}$ Circ. max. × Diam. = Sphær.

$\frac{1}{6}$ Diam. × Superf. Sphær. = Sphær. nach §. 640.

$\frac{2}{3}$ Circ. max. × Diam. = $\frac{1}{6}$ Diam. × Superf. Sphær. . 6

$\frac{12}{3}$ Circ. max. × Diam. = Diam. × Superf. Sphær. : Diam.

$\frac{12}{3}$ Circ. max. = Superf. Sphær. das iſt

4 Circ. maximi = Superfic. Sphær.

§. 652. Zuſatz. Da nun der größte Cirkel gefunden wird, wenn man ſeine Peripherie mit dem vierten Theil des Cirkels multiplicirt, ſo iſt die ganze Oberfläche der Kugel das Product aus der Peripherie des größten Cirkels in den Diameter; dann dieſes Product iſt vier Circulis maximis gleich.

§. 653. Zuſatz. Wenn man dieſes Product nochmal mit dem ſechsten Theil des Diameters multiplicirt, ſo hat man den Inhalt der Kugel.

§. 654. Zuſatz. Wenn man die Verhältniß des Diameters wie oben $1 : \pi$ ſezt, ſo iſt der Inhalt einer Kugel, deren Diameter $d = \frac{\pi d^3}{6}$; dann πd iſt die Peripherie, weil $1 : \pi = d : \pi d$; dieſes mit dem Diameter multiplicirt, gibt die Oberfläche der Kugel $= \pi d^2$ nach §. 652. und dieſes Product nochmalen mit dem ſechsten Theil des Diameters $= \frac{d}{6}$ multiplicirt, gibt $\frac{\pi d^3}{6}$, und wenn die Kugel S heiſſet, ſo iſt $\sqrt[3]{\frac{6 \cdot S}{\pi}} = d$.

§. 655. Zuſatz. Wenn eine andere Kugel zum Diameter D hat, ſo iſt ihr Inhalt aus gleichem Grunde $= \frac{\pi D^3}{6}$; folglich verhalten ſich zwey Kugeln A und B wie die Cubi der Diameter. Dann es ſey $\frac{\pi D^3}{6} = A$, und $\frac{\pi d^3}{6} = B$; ſo iſt $A : B = \frac{\pi D^3}{6} : \frac{\pi d^3}{6}$

$$: \frac{\pi}{6}$$

$$A : B = D^3 : d^3.$$

§. 656. Zuſatz. Wenn die Ludolphiſche Verhältniß des Diameters zur Peripherie wie 100 : 314 angenommen wird, ſo iſt die Verhältniß des Cubi vom Diameter zur Sphäre, wie 300 : 157, welches nach der obigen Formel in Zahlen leicht zu berechnen iſt.

§. 657. Anm. Kugeln laſſen ſich in Cylinder, Kegel u. ſ. w. verwandeln; wenn nur etwas, z. E. die Höhe von dem Cörper gegeben wird, worein ſie ſich verwandeln ſollen. z. E. Eine Kugel ſoll in einen Cylinder, deſſen Höhe = a, verwandelt werden, man ſucht den Diameter des Cylinders; ſo iſt nach §. 652, wenn der Diameter = x geſezt wird,

$$\frac{d^3p}{6} = \frac{apx^2}{4} \quad : \frac{ap}{4}$$

$$\frac{4d^3}{6a} = x^2 \text{ oder } \frac{2d^3}{3a} = x^2, \text{ dahero}$$

$$3a : 2d = d^2 : x^2.$$

Eben ſo läßt ſich ein Kegel in eine Kugel verwandeln; man ſucht den Diameter der Kugel, den wir x nennen; ſo iſt der Inhalt des Kegels, wenn ſeine Höhe a geſezt iſt, = $\frac{adp}{12}$, und der Kugel $\frac{px^3}{6}$, dahero

$$\frac{px^3}{6} = \frac{ad^2p}{12} \quad : \frac{p}{6}$$

$$x^3 = \tfrac{6}{12}ad^2 = \tfrac{1}{2}ad^2 \quad : \sqrt[3]{\ }$$

$$x = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}ad^2}.$$

Man ſiehet leicht, daß ſich noch verſchiedene Veränderungen dieſer Art durch Hülfe der Buchſtabenrechnung geben laſſen; wir genügen uns dahero, nur einige gezeigt zu haben.

Die

Die Kugelſchnitte.

§. 658. Erklär. Wenn eine Kugel durch eine ebene Fläche geſchnitten wird, ſo heißt der Schnitt ein Kugelſchnitt, welcher allemal ein Cirkel iſt.

§. 659. Amn. Zum Ueberfluß kann man dieſe Folge, daß der Schnitt ein Cirkell ſeye, auch beweiſen. Dann es ſey *Fig.* 78. in C der Mittelpunkt der Kugel, der Schnitt ſey BEFG; man fälle aus C den Perpendikel CH auf die flache Ebene des Schnittes, und ziehe die Radios CE, CF, und vereinige die Punkten E und H, wie auch F und H durch die Linien EH, FH, ſo iſt

nr. I. $CE^2 = EH^2 + CH^2$ nr. II. $CF^2 = FH^2 + CH^2$

$CE^2 - CH^2 = EH^2$ $CF^2 - CH^2 = FH^2$

nach nr. II. $CE^2 - CH^2 = FH^2$ $CF^2 = CE^2$ ſind Radii

folglich $EH^2 = FH^2$ $CE^2 - CH^2 = FH^2$

$EH = FH$ dahero BEF ein Cirkel.

§. 660. Zuſatz. Wenn $EH = 0$, ſo iſt der Cirkel ein größter.

§. 661. Zuſatz. Weil alle größte Cirkel einen gemeinſchaftlichen Mittelpunkt mit der Kugel haben, ſo halbiren ſie alle einander. Und folglich ſind Cirkel, die einander halbiren oder in zween gleiche Theile theilen, allemal größte Cirkel.

§. 662. Erkl. Zwo einander ſo entgegengeſezte Punkte der Kugel, daß eine gerade Linie von einem zum andern durch den Mittelpunkt der Kugel geht, oder ihr Diameter iſt, heiſſen die Pole der Kugel, und in Ruckſicht auf den Cirkel, durch deſſen Mittelpunkt ſie gehen, und auf deſſen Fläche ſie perpendicular ſtehen, Pole des Cirkels.

§. 663. Zuſatz. Sie ſind alſo von allen Punkten eines gegebenen Parallel-Cirkels gleich weit entfernt.

§. 664. Zuſatz. Eine Kugel auf eine ebene Fläche gelegt, berührt ſie nur in einem unendlich kleinen Theil, und die Ebene iſt für die Kugel was die Tangente für den Cirkel iſt.

§. 665. Zuſatz. Parallel-Cirkel, wie *Fig.* 77. die Cirkel MN, KL, haben einerley Pole, nemlich P und Q.

§. 666. Zuſatz. Zween größte Cirkel, deren ein jeder durch den Pol des andern geht, ſtehen auf einander ſenkrecht. Nach der Erklärung §. 662.

§. 667. Lehrſatz. Wenn ein größter Cirkel durch den Pol des andern gehet, ſo iſt der Bogen zwiſchen dem Pol und dem Cirkel ein Quadrant, und wenn zween größte Kreiſe auf einander perpendicular ſtehen, ſo geht ein jeder durch den Pol des andern. Dann es ſey *Fig.* 77. KDEL ein größter Cirkel; durch ſeine Pole P und Q gehe ein anderer größter Cirkel PGDQ, ſo werden ſie beede einander im Mittelpunkt der Kugel ſchneiden, und durch den gemeinſchaftlichen Diameter halbiren; folglich iſt PC = CQ, und eben ſo PC = DC; und PCD der Winkel, den der größte Cirkel KDEL mit dem andern durch ſeinen Pol gehenden größten Cirkel PGDQ macht; da nun dieſer ein Rechter iſt oder 90° hält, §. 662. ſo muß der Bogen PD, das Maas des rechten Winkels PCD ein Quadrant ſeyn. Dann daß er das Maas des rechten Winkels iſt, erhellet daher, daß PC = CD, folglich wird mit dem Radio CD = PC aus dem Mittelpunkt C der Bogen PE gezogen, welcher das Maas des Winkels iſt. Eben ſo, wenn PD = 90°,

ſo iſt der Winkel PCD, deſſen Maas PD iſt, auch 90° oder ein rechter.

§. 668. Zuſatz. Wenn auf gleiche Weiſe durch eben dieſe Pole ein anderer gröſster Cirkel gezogen wird, wie PHEQ, ſo iſt auch PE ein Quadrant, und der Winkel PCE = 90°. Dahero bey D und E rechte Winkel ſind. Eben das gilt, wenn mehrere ſolche Cirkel durch P und Q gezogen werden.

§. 669. Zuſatz. Weil DC auf CP, und EC auf CP perpendicular iſt, ſo iſt der Winkel ECD der Neigungswinkel der beeden Cirkelflächen PGDQ und PHEQ.

§. 670. Zuſatz Wenn AQ die Tangente von PDQ, und BQ die Tangente von PEQ iſt, ſo iſt der Winkel AQB dem Neigungswinkel DCE gleich.

§. 671. Zuſatz. In einem jeden Parallelkreiſe mit KDL, iſt der Neigungswinkel GFH dem Neigungswinkel DCE gleich, folglich ſind die Bogen GH, DE ähnlich; und haben eine gleiche Anzahl grade; dann ſie ſind beede das Maas der gemeldten Winkel.

§. 672. Erkl. Ein Winkel, den zween gröſste Cirkel mit einander machen, heiſst ein ſphäriſcher Winkel; z. E. der Winkel PDE; dahero er auch durch Bogen von gröſsten Cirkeln gemeſſen wird; und ein ſphäriſches Dreyeck heiſst ein Dreyeck, das aus drey ſphäriſchen Winkeln, und folglich auch drey Bogen von gröſsten Kreiſen beſtehet.

§. 673. Zuſ. Weil zween Bogen gröſster Cirkel, die aus einem Punkt, z. E. dem Pol kommen,

auf einen dritten gröſsten Cirkel einen Bogen abſchneiden können, ſo ſieht man ſchon, daſs ein ſphäriſches Dreyeck mehr als zween rechte Winkel haben könne; wie *Fig.* 77. das Dreyeck PDE.

§. 674. Zuſatz. Wenn PE von PD um 90 Grad entfernt wäre, ſo hätte das Dreyeck den rechten Winkel. Vier kann es nicht haben, wie unten in der ſphäriſchen Trigonometrie gezeigt wird.

§. 675 Anm. Die ſphäriſche Trigonometrie wird beſonders abgehandelt werden; dahero das weitere von den ſphäriſchen Dreyecken in der beſondern Abhandlung davon vorgetragen werden ſoll. In dem bisherigen haben wir die Elementargeometrie ſo vollſtändig vorzutragen geſucht, als man ſie irgendwo in den neueſten Schriften finden wird.

Zwey-

Zweytes Hauptſtück, Von der Trigonometrie.

§. 676.

Erklärung.

Die Trigonometrie lehret, wie aus drey gegebenen Stücken eines Dreyecks, worunter bey ebenen Dreyecken wenigſtens eine Seite ſeyn muß, weil ſonſt die Winkel allein unendlich vielen Dreyecken gemein ſeyn könnten, die übrige Drey finden ſolle; man gibt einem nemlich die drey Stücke des Dreyecks in Zahlen, oder auch allgemein, in Buchſtaben, daraus man das geſuchte durch Rechnung findet.

§. 677. Anm. Die Trigonometrie gehört dahero theils zur Geometrie, theils zur Arithmetik, und wird wegen ihrem ungemeinen Nutzen in der angewandten Mathematik als eine beſondere Wiſſenſchaft abgehandelt, auch die ebene von der ſphäriſchen getrennt, weil jene in allen mathematiſchen, dieſe aber nur in den aſtronomiſchen und damit verbundenen Wiſſenſchaften ihren Nutzen hat. Wir werden dahero, wenn wir die Geſchichte vorgetragen haben, in zween Capiteln von der ebenen ſowohl als von der ſphäriſchen Trigonometrie handeln.

Geſchichte der Trigonometrie.

§. 678. Wie die menſchliche Bedürfniſſe den bisher vorgetragenen Wiſſenſchaften ihren Urſprung gaben,

gaben, ſo hat auch die Trigonometrie ihr erſtes Daſeyn denſelben zu danken. Die Beſtimmung der Zeiten konnte ohne Kenntniß des Himmels nicht in Richtigkeit gebracht werden; die Erſcheinungen aber am Himmel genau zu beſtimmen, hatte man beſonders die Trigonometrie nöthig. Dahero ſchon die Alten ſich dißfalls viele Mühe gegeben, und die Trigonometrie meiſtens ihren aſtronomiſchen Werken vorgeſezt haben.

§. 679. Der erſte, von dem man weiß, daß er was trigonometriſches geſchrieben habe, deſſen Arbeit aber verlohren gegangen, war Hipparchus, der zwölf Bücher de Triangulis verfertigte. Claud. Ptolemaus, der etlich hundert Jahre ſpäter gelebt, im zweyten Jahrhundert unſerer Zeitrechnung, machte im erſten Buch ſeines Almageſti einen Auszug daraus, den wir noch haben; von dieſer Zeit an war man mit den Hipparchiſchen Erfindungen zufrieden, bis vor ungefähr 300 Jahren Joh. Regiomontanus, oder Joh. Müller von Königshofen in Franken, ein Nürnbergiſcher Aſtronom, die Trigonometrie in einem beſondern Werk de Triangulis gemeinnütziger machte. Er hat die Tabulas ſinuum, wie wir ſie noch haben, berechnet, wiewohl er anfänglich den Radius oder Sinus totus nicht in 10 Millionen, ſondern in 60 tauſend Theile getheilet hat. Dieſe Arbeit aber blieb im Rechnen noch immer ſehr mühſam, bis vollends die logarithmiſche Erfindungen hinzu kamen, welche man insgemein dem Joh. Neper, Baron von Merchiſton, einem Schottländer, zuſchreibt, der ſie 1614 zu Edinburg in ſeinem herausgegebenen Canone Mirifico Logarithmo-

rithmorum zuerſt bekannt gemacht haben ſolle; wiewohlen andere einen Deutſchen, den Joſt Byrge zum Erfinder machen.

§. 680. Anm. Von dieſem Joſt Byrge kann man nicht gewiß ſagen, ob er ein Schweitzer oder ein Heſſe von Geburt war, wohl aber, daß er ſich in Heſſen=Caſſel lange Zeit aufgehalten habe, wie ich in meinen Amœnit. Acad. vom Jahr 1754. Faſc. I. unter dem Titel: Memorabilia Germaniæ literatæ gezeigt habe; Er war in mathematiſchen und beſonders aſtronomiſchen Wiſſenſchaften wohl bewandert, welches Zeugniß ihm Keppler gibt; wiewohl er ihn einen zaudernden Menſchen nennt, der ſeine Geheimniſſe, beſonders die Logarithme, verborgen hielte, und nicht wollte auskommen laſſen. Die Stelle des Kepplers ſtehet in ſeinen Tabulis Rudolphinis c. 3. p. 11. wo er dieſen Joſt Byrge eben in Ruckſicht auf ſeine logarithmiſche Erfindung einen Hominem Cunctatorem & Secretorum ſuorum cuſtodem, qui fœtum in partu deſtituit & non ad uſus publicos educavit, ausdrücklich nennet. Mich dünket, dieſes Zeugniß könne doch etwas gelten, und beweiſe wenigſtens ſo viel, daß Byrge vor dem Neper ſchon dieſe Kunſt gewußt, wenn ſie gleich Neper hernach von ſich ſelbſt und nicht von dem geheimnißvollen Byrge gelernet hat.

§. 681. Neper hat die Logarithmen nur auf die Minuten gerechnet, und den Sinum totum = 0 geſezt, daß die Logarithmi negativ werden, wenn die Sinus wachſen. Weil aber diß unbequem ſchiene, ſo hat Heinr. Brigg, Prof. zu Oxfort, auf Gutbefinden des Joh. Nepers, im Jahr 1624 in ſeiner herausgegebenen Arithmetica logarithmica den Sinum totum = 1, und deſſen Logarithmus = 0, angenommen, und nach denſelben berechnet. Benjamin Urſinus hat in dem ſeiner Trigonom. angehängten Canone logarithmorum ſie noch weiter von 10 zu 10 Secunden berechnet. Adrian Vlacq hat 1628 die Logarithme von 20000 bis 90000 vollends hinzugethan, auch die Logarithmos Sinuum und Tangentium nach dieſer Art berechnet, und zwar zum Unglück für ihn, gerade um hundert Jahr früher,

her, als die neuere Entdeckungen gemacht wurden, durch deren Hülfe man alles diß mit ungleich ringerer Mühe hätte berechnen können. Dann ſeit fünfzig Jahren hat man durch die Rechnung des Unendlichen ſolche Kunſtgriffe erfunden, welche das ſonſt ſo beſchwerliche Rechnen, dem ſich Neper, Brigg und Vlacq unterzogen haben, ungemein erleichtern. Die Vlacquiſche Tabellen hält man für die correcteſte, doch kann man auch die Wolfiſche gebrauchen.

§. 682. Was man nun bis zu Anfang gegenwärtigen Jahrhunderts in der Trigonometrie wußte, hat der Freyherr v. Wolf in ſeine mathematiſche Schriften eingetragen. Darinn aber ſchiene er was eigenes zu haben, das eben nicht ſo gar löblich iſt, daß er von allen neuen Entdeckungen, die ſeit dieſer Zeit gemacht wurden, bey den neuen Auflagen ſeiner Schriften das mindeſte nicht eingeſchalten, und dahero nach dem Zeugniß aller Kenner, die Trigonometrie, deren wichtigen Einfluß in andere Wiſſenſchaften er doch überall rühmet, nichts deſtoweniger ſo unvollſtändig und abgekürzt vorgetragen hat, daß man um ſelbige zu ergänzen, entweder Zuſätze in den Collegiis dictiren, oder ein anderes Handbuch zum Leſen zu Grunde legen muß; wir werden uns dahero bemühen, dieſen Abgang hier zu erſetzen, und aus den neueſten Schriften dieſer Art dasjenige hinzuzuthun, was zur Vollſtändigkeit dieſer ungemein fruchtbaren Wiſſenſchaft auf irgend eine Weiſe ſich hinzuſagen läßt.

Erſtes Capitel,
Von der ebenen Trigonometrie.

§. 683.
Erklärung.

Die ebene Trigonometrie (Trigonometria plana) lehret aus drey gegebenen Stücken eines ebenen

nen Dreyecks, unter welchen wenigſtens eine Seite ſeyn muß, die übrige drey Stücke durch Rechnung zu finden.

§. 684. Zuſatz. Eine Seite muß deßwegen gegeben ſeyn, weil drey Winkel unendlich viel ähnliche Dreyecke beſtimmen, und folglich die Seiten der Dreyecke in der ebenen Trigonometrie aus drey gegebenen Winkeln anders nicht als unbeſtimmt gefunden werden; man will aber die Seiten beſtimmt wiſſen. Wie dißfalls die ſphäriſche Trigonometrie von der ebenen unterſchieden ſeye, werden wir unten zeigen.

Allgemeine Begriffe vom Sinus, Coſinus, Tangenten, Cotangenten, Secanten und Coſecanten.

§. 685. Erkl. Eine Perpendicularlinie, welche von dem Endpunkt eines Radii auf einen andern Radius herabgefället wird, heißt der Sinus des Bogens, der zwiſchen den beeden Radiis enthalten iſt. *Fig.* 84. iſt alſo DE der Sinus des Bogens DA.

§. 686. Zuſatz. Weil der Bogen DA das Maas des Winkels DCA iſt, ſo iſt DE auch der Sinus dieſes Winkels.

§. 687. Zuſatz. Wenn der Sinus in gerader Linie verlängert wird, bis er den Cirkel wieder ſchneidet, ſo entſtehet eine Sehne (Chorda) DF, von welcher der Sinus die Helfte iſt; das iſt $DE = \frac{1}{2}DF$.

§. 688.

§. 688. Zuſatz. Weil von dem Endpunkt des Radius DC auf den Radius CB keine andere Perpendicularlinie gefällt werden kann, als diejenige, die auf den ruckwarts nach A verlängerten Radius ſich fällen läßt, nemlich wieder DE, ſo iſt der vorige Sinus der Sinus von beeden Bogen, die zuſammen einen halben Cirkel oder 180° machen.

§. 689. Zuſatz. Zween Nebenwinkel haben alſo einerley Sinus; ſo iſt z. E. der Sinus von 30° auch der Sinus von 150°, das iſt, der Sinus des ſpitzigen Winkels iſt auch der Sinus ſeines ſtumpfen Nebenwinkels.

§. 690. Zuſatz. Die Sinus wachſen von A oder 0 grad bis auf 90° oder H, wo im erſten Quadranten HC der gröſte Sinus wird, von dannen nehmen ſie wieder ab bis B oder 180°, wo der Sinus abermal null wird, von B bis L, alſo 180 + 90 = 270° nehmen ſie aber auf den entgegengeſezten Seiten des Diameters AB wieder zu, und von L bis A oder 360° nochmalen auf dieſer Seiten wieder ab; und wenn man die Peripherie verdoppelt, ſo nehmen ſie von 360 oder A bis H, als 360 + 90 = 450° wieder auf der erſten Seite zu, und von H oder 450° bis B oder 450 + 90° = 540° auf eben der Seite wieder ab u. ſ. w. wie oben; dann man kann die Peripherie ſo vielmal nehmen als man will.

§. 691. Zuſatz. Der gröſte Sinus, wie CH, iſt dem Radius gleich.

§. 692. Erklär. Der gröſte Sinus, das iſt der Radius, heißt in der Trigonometrie der Sinus totus.

§. 693.

§. 693. Zuſatz. Weil kein Sinus gröſſer wird als der Sinus totus, ſo kann man die Sinus als eigentliche Brüche vom Sinus totus oder Radius anſehen.

§. 694. Erklär. Poſitiv heißt bey einer Figur was gegen die eine, negativ was gegen die andere Seite zu lieget; oder umgekehrt, ſo daß beede Gröſſen gerade entgegen geſezt ſind. Oder auch nach den arithmetiſchen Gründen, das negative entſteht aus dem Uebergang durch das Nichts oder die Nulle.

§. 695. Zuſatz. Die Sinus von 0 bis 180° ſind alſo poſitiv, und die von 180 bis 360° ſind negativ; nach §. 690. und dieſe Verhältniß bleibt auch bey Vervielfältigung der Peripherie. Oder wenn man die vier Quadranten eines Cirkels betrachtet, ſo ſind die Sinus in den zween erſten poſitiv, in den zween leztern negativ, bey der Verdoppelung abermal im fünften und ſechsten poſitiv, im ſiebenden und achten negativ u. ſ. w.

§. 696. Zuſatz. DE iſt alſo der Sinus vom Bogen DA, und vom Bogen DB, ferner von dem Bogen DBd aber negativ, und vom Bogen DBdA aber auch negativ; weiter vom Bogen ADBdAD aber wieder poſitiv, u. ſ. w. ins Unendliche.

§. 697. Zuſatz. Ein einiger Sinus iſt alſo der Sinus von unendlich vielen Bögen; dahero keine beſtimmte Verhältniß zwiſchen dem Bogen und ſeinem Sinus ſich geben läßt.

§. 698. Anm. Daß es auſſer dem Sinus totus nur einen einigen Sinus gebe, nemlich den Sinus von 60°, der genau und ohne die Approximation berechnet werden kann, werden wir unten zeigen.

§. 699.

§. 699. Erklär. Wenn ein Bogen unter 90° gegeben iſt, ſo heißt die Anzahl Grade, oder der Bogen, der zu ihm addirt, 90 Grade vollends gibt, das Complementum (Ergänzung) zu 90°, und der Sinus dieſes Bogens der Sinus Complementi oder Coſinus. *Fig.* 84. iſt DH das Complementum von AD, dann AD + DH = 90°; der Sinus von DH iſt DK, nun iſt DK = EC; folglich EC Sinus DH, oder Sinus Complementi oder Coſinus.

§. 700. Lehrſatz. Aus dem gegebenen Radius und Sinus eines Bogens läßt ſich der Coſinus finden: Er iſt nemlich allemal die Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate des Radii und des Sinus.

Satz. *Fig.* 84.

$$EC = \sqrt{(CD^2 - ED^2)}$$

Bew.

$$CD^2 = ED^2 + EC^2 \quad \text{nach dem Pythag. Lehrſatz.}$$
$$ED^2 = ED^2$$

ſubtr.

$$CD^2 - ED^2 = EC^2$$

$\sqrt{}$ extrahirt

$$\sqrt{CD^2 - ED^2} = EC.$$

§. 701. Zuſatz. Wenn der Radius = 1, und der Sinus = s, ſo iſt Coſ. = $\sqrt{1 - s^2}$.

§. 702. Zuſatz. Wenn der Coſinus nebſt dem Radius gegeben, ſo iſt der Sinus auch gegeben, dann wenn der Coſ. σ, ſo iſt s = $\sqrt{1 - \sigma^2}$.

§. 703. Zuſatz. Die Coſinus nehmen ab, wenn die Sinus wachſen, hingegen wachſen ſie, wenn die

die Sinus abnehmen. Dann *Fig.* 84. je gröſſer ED wird, deſto kleiner wird EC, und umgekehrt.

§. 704. Zuſatz. Wenn der Sinus dem Radius gleich wird, in CH, ſo fällt der Coſinus in den Mittelpunkt C und verſchwindet, oder wird = 0, folglich ſind die Coſinus der Bogen über 90° negativ bis auf 180°, wo der Sinus = 0, der Coſ. aber = CB = — AC = Rad. und dahero ein gröſtes wird; dann nimmt er wieder ab bis auf 180 + 90 = 270°, wo er zum zweytenmal = 0 wird; von da an wird er wieder poſitiv, und nimmt zu bis 360, wo er = AC, und von da an bis H, oder bis 360 + 90 = 450° wieder abnimmt und 0 wird u. ſ. w.

§. 705. Zuſatz. Die Coſinus vom erſten und vierten Quadranten ſind alſo poſitiv, die von den zwey mittlern, nemlich zweyten und dritten, ſind negativ. u. ſ. w.

§. 706. Zuſ. Ein jeder Coſinus gehört, wie der Sinus, unendlich vielen Bogen zu.

§. 707. Erklär. Eine gerade Linie, die den Cirkel in dem Punkt wo der Bogen anfängt, unter einen rechten Winkel mit dem Radius berührt, und von dem andern verlängerten Radius geſchnitten und folglich beſtimmt wird, heißt die Tangente des Bogens, und der ſie ſchneidende verlängerte Radius die Secante. So iſt AG die Tangente und CG die Secante.

§. 708. Lehrſatz. Aus dem Radius und Sinus iſt der Coſinus, nach §. 700. und aus beeden die Tangente und Secante gegeben. Dann wenn der Radius = r, und der Winkel oder Bogen AD = φ geſezt wird, ſo iſt

I. Satz. *Fig.* 84.

$$\text{tang.}\ \varphi = \frac{r\ .\ \text{ſin.}\ \varphi}{\cos.\ \varphi}$$

Bew.

$\triangle ECD \backsim \triangle AGC$ folglich

EC : ED = AC : AG das iſt in Buchſtaben:

$$\cos.\ \varphi : \text{ſin.}\ \varphi = r : \frac{r.\text{ſin.}\ \varphi}{\cos.\ \varphi} = AG \quad \text{aber } AG = \text{tang.}$$

$$\frac{r.\text{ſin.}\ \varphi}{\cos.\ \varphi} = \text{tang.}\ \varphi$$

II. Satz. *Fig.* 84.

$$\text{ſecant.}\ \varphi = \frac{r^2}{\cos.\ \varphi}$$

Bew.

$\triangle ECD \backsim \triangle AGC$, folglich

EC : CD = CA : CG

CD = CA ſind Radii: ſubſtit.

EC : CA = CA : CG in Buchſtaben

$$\cos.\ \varphi : r = r : \frac{r^2}{\cos.\ \varphi} = CG \quad \text{aber } CG = \text{ſec.}$$

$$\frac{r^2}{\cos.\ \varphi} = \text{ſec.}\ \varphi$$

§. 709. Zuſ. Nach dem Pythagoriſchen Lehrſatz iſt $CG^2 = AG^2 + AC^2$, und $CG = \sqrt{AG^2 + AC^2}$, das iſt in Buchſtaben $\text{ſec.}\ \varphi = \sqrt{(\text{tang.}\ \varphi)^2 + r^2}$, das iſt, die Secante iſt die Quadratwurzel aus der Summe des Quadrats der Tangente und des Quadrats des Radius, und man kann aus der Tangente die Secante finden.

§. 710.

§. 710. Zuſatz. Auf gleiche Weiſe kann man aus der Tangente und dem Coſinus den Sinus u. ſ. w. oder überhaupt, wann der Radius als bekannt angenommen wird, aus zwey Stücken, was man für will, das dritte finden; wenn man nur die ähnliche Dreyecke *Fig* 84. betrachtet, und daraus das geſuchte herleitet.

§. 711. Zuſ. Wenn cos. $\varphi = 0$, ſo iſt $\frac{r.\sin.\varphi}{\cos.\varphi} = \frac{r.\sin.\varphi}{0} = \infty$ und $\frac{r^2}{\cos.\varphi} = \frac{r^2}{0} = \infty$; folglich Tangente und Secante unendlich; da nun cos φ zweymal in den 4 Quadranten unendlich wird, ſo wird auch die Tangente und Secante zweymal unendlich, und zwar eben da, wo der Coſ. null wird. Eben diß erhellt aus der Figur, weil in beeden Fällen bey H und L die Tangenten und Secanten Parallellinien werden, die unendlich fortgehen, ohne einander zu ſchneiden.

§. 712. Zuſ. Wenn ſin $\varphi = 0$, ſo iſt die tang. auch $= 0$; wie aus dem Ausdruck ſogleich erhellt; folglich wird die Tangente zweymal in den 4 Quadranten null, und zwar eben da, wo der Sinus null wird, die Secante aber wird in dieſem Fall dem Radius gleich.

§. 713. Zuſatz. Im erſten und dritten Quadranten ſind alſo die Tangenten bejahend, im zweyten und vierten verneinend oder negativ.

§. 714. Zuſatz. Eine jede Tangente und Secante correſpondirt unendlich vielen Bögen.

§. 715. Erklär. Die Cotangente iſt die Tangente des Complementi zu 90°, welche durch

 die

die Secante dieſes Bogens, die deßwegen Coſecante heißt, geſchnitten und beſtimmt wird.

§. 716. Lehrſatz. Durch den Sinus und Radius wird die Cotangente und Coſecante beſtimmt. Dann es ſeyen die Buchſtaben wie oben §. 708. ſo iſt

I. Satz. *Fig.* 85.

$$\text{cot.}\,\varphi = \frac{r^2}{\text{tang.}\,\varphi}$$

Bew.

weil AG, HC parallel; ſo iſt der Wink. G = GCH. §. 456.

A = H ſind rechte = 90°

$\Delta GAC \backsim \Delta CHK$. dahero

AG : AC = CH : HK

AC = CH ſind Rad.

AG : AC = AC : HK das iſt in Buchſt.

$$\text{tang.}\,\varphi : r = r : \frac{r^2}{\text{tang.}\,\varphi} = HK = \text{cot.}$$

II. Satz. *Fig.* 85.

$$\text{coſec.}\,\varphi = \frac{r^2}{\text{ſin.}\,\varphi}$$

Bew.

G = GCH

A = H

$\Delta GAC \backsim \Delta CHK$

$\Delta GAC \backsim \Delta DEC$

$\Delta DEC \backsim CHK$. folgl.

ED : CD = CH : CK

CD = CH ſind rad.

ED : CD = CD : CK; in Buchſt.

$$\text{ſin.}\,\varphi : r = r : \frac{r^2}{\text{ſin.}\,\varphi} = CK = \text{coſec.}$$

§. 717. Zuſatz. Was von den Tangenten in Abſicht auf ihre Zeichen nach den verſchiedenen Quadranten und auf die unendlich viele Bogen, die ihnen correſpondiren können, geſagt worden, gilt auch von den Cotangenten.

§. 718. Lehrſatz. Die Cotangenten verhalten ſich umgekehrt wie die Tangenten. Dann es ſey ein anderer Bogen $= \pi$, ſo iſt nach §. 716. cot. $\pi = \frac{r^2}{\text{tang.}\,\pi}$.

Satz.

Satz. *Fig.* 83.

$$\cot.\pi . \cot.\varphi = \text{tang}.\varphi : \text{tang}.\pi.$$

Bew.

$$\cot.\pi : \frac{r^2}{\text{tang}.\pi} = \cot.\varphi : \frac{r^2}{\text{tang}.\varphi}$$ dann beede Paar Glieder ſind gleich,

——— verſezt

$$\cot.\pi : \cot.\varphi = \frac{r^2}{\text{tang}.\pi} : \frac{r^2}{\text{tang}.\varphi}$$

——— . tang. π

$$= r^2 : \frac{\text{tang}\ \pi . r^2}{\text{tang}.\varphi}$$

——— . tang. φ

$$= r^2\,\text{tang}.\varphi : \text{tang}.\pi . r^2$$

$$\cot.\pi : \cot.\varphi = r^2\,\text{tang}.\varphi : r^2\,\text{tang}.\pi$$

——— : r^2

$$\cot.\pi : \cot.\varphi = \text{tang}.\varphi : \text{tang}.\pi.$$

§. 719. Erklär. Der Abſchnitt des Radii durch den Sinus, nemlich AE, heißt der Sinus verſus; man kann ihn wie die andere Stücke leicht finden.

§. 720. Anm. Der Lehrſatz § 716. iſt wohl zu merken, er hat ſowohl hier als in der ſphäriſchen Trigonometrie ſeinen Nutzen; übrigens können die bisherige Sätze kürzlich ſo gefaßt, und dem Gemüth eingedruckt werden. Es ſolle π einen halben Cirkel bedeuten, der Radius $= 1$; ſo wird

I.	II.	III	IV.
ſin. $0\pi = 0$	cos. $0\pi = 1$	tang $0\pi = 0$	cot. $0\pi = \infty$
ſin. $\frac{1}{2}\pi = 1$	cos. $\frac{1}{2}\pi = 0$	tang. $\frac{1}{2}\pi = \infty$	cot. $\frac{1}{2}\pi = 0$
ſin. $\pi = 0$	cos. $\pi = -1$	tang. $\pi = 0$	cot. $\pi = -\infty$
ſin. $\left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2}\pi \\ 3.90^\circ \end{matrix} \right. = -1$	cos. $\left\{ \begin{matrix} \frac{3}{2}\pi \\ 3.90^\circ \end{matrix} \right. = 0$	tang. $\frac{3}{2}\pi = -\infty$	cot. $\frac{3}{2}\pi = 0$
ſin. $2\pi = 0$	cos. $2\pi = 1$	tang. $2\pi = 0$	cot. $2\pi — \infty$

Und wenn ein Bogen überhaupt z genannt wird, ſo iſt, nach den

obigen bewieſenen Lehrſätzen und nur kurzen Wiederholung, wenn der Radius immer $= 1$.

I. $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$. $(\text{tang}. z)(\cot. z) = 1$.

II. $\sin. z = \cos. \times \text{tang}. z$ $\sin. z = \frac{\cos. z}{\cot. z}$

III. $\cos. z = \frac{\sin. z}{\text{tang}. z}$ $\cos. z = \sin. z . \cot. z$

IV. $\text{tang}. z = \frac{\sin. z}{\cot. z}$ $\text{tang}. z = \frac{1}{\cot. z}$

V. $\cot. z = \frac{\cos. z}{\sin. z}$ $\cot. z = \frac{1}{\text{tang}. z}$

VI. $\text{tang}. x : \text{tang}. z = \cot. z : \cot. x$.

welche Formeln man in Bereitſchaft haben muß, wenn man in trigonometriſchen Rechnungen fortkommen will.

§. 721. Lehrſ. Das Quadrat des Radii, oder $(\cos. \varphi)^2 + (\sin. \varphi)^2$ iſt das Product von zween unmöglichen Factoribus, deren einer der Coſ. plus das Product Sin. in die Quadratwurzel aus minus eins, der andere Coſ. minus dem Product vom Sin. in die Quadratwurzel aus minus eins iſt.

Satz.

$$r^2 = (\cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{-1})(\cos. \varphi - \sin. \varphi \sqrt{-1})$$

Bew.

$r^2 = (\cos. \varphi)^2 + (\sin. \varphi)^2$ nach §. 700.

$(\cos. \varphi)^2 + (\sin. \varphi)^2 = \cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{-1}$ multipl mit $\cos \varphi - \sin. \varphi \sqrt{-1}$. (dann wenn man wirkl. mult. ſo iſt

$$\begin{array}{l} (\cos. \varphi)^2 + \cos. \varphi \sin. \varphi \sqrt{-1} \\ - \cos. \varphi \sin. \varphi \sqrt{-1} - (\sin. \varphi)^2 - 1 \\ \hline \end{array}$$

d. i. $\cos. \varphi^2 - (\sin. \varphi)^2 - 1$

aber $-\sin. \varphi^2 . -1 = +(\sin. \varphi)^2$ nach §. 143

$$(\cos. \varphi)^2 + (\sin. \varphi)^2 = (\cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{-1}) \times (\cos. \varphi - \sin. \varphi \sqrt{-1})$$

folgl. $r = (\cos. \varphi + \sin. \varphi \sqrt{-1})(\cos. \varphi - \sin. \varphi \sqrt{-1}$

§. 722. Zuſ. Zween unmögliche Factores können alſo ein mögliches und reelles Product geben.

§. 723. Zuſ. Wenn man mit dem Quadrat des Radius dividirt, ſo iſt

$$1 = \frac{(\cos.\varphi + \sin.\varphi\sqrt{-1})}{r} \cdot \frac{(\cos.\varphi - \sin.\varphi\sqrt{-1})}{r}$$

§. 724. Zuſ. r fällt ganz weg, wenn der Radius = 1 geſezt wird; ferner iſt der obige Ausdruck allemal einem völligen Quadrat gleich, oder zween Quadraten, die ſich in eins verwandeln laſſen.

§. 725. Anm. Dieſer Lehrſatz iſt im folgenden ungemein fruchtbar, und hat ſeinen Nutzen auch in der höhern Geometrie, man muß ihn ſich dahero wohl bekannt machen. Man ſiehet zugleich, was die eingebildete oder unmögliche Wurzeln, davon wir oben gehandelt, in ſchicklicher Zerfällung der Factorum für einen Nutzen haben.

Allgemeine Theorie der trigonometriſchen Rechnung.

§. 726. Lehrſ. In einem jeden geradelinigten Dreyeck verhalten ſich die Seiten, wie die Sinus der ihnen opponirten Winkel; und umgekehrt. Dann es ſey Fig. 87. das Dreyeck ABC gegeben; man beſchreibe einen Cirkel darum, weil ſich um ein jedes Dreyeck ein Cirkel beſchreiben läßt nach §. 555. ſo werden die abgeſchnittene Cirkelbögen AEB, BFC u. ſ. w. die Helften des Maaßes der entgegenſtehenden Winkel C, A ſeyn nach §. 478. folglich die halbe Bögen das Maas der ganzen Winkel; der halben Bögen Sinus aber ſind die halbe Chorden, oder die halbe Seiten, die den Winkeln opponirt ſind; nach §. 687. Dahero der Beweis leicht iſt:

Satz. *Fig.* 87.

ſin. C : AB = ſin. A : BC.

Bew.

ſin. C = $\frac{1}{2}$AB ; ſin. A = $\frac{1}{2}$BC nach §. 687. folglich

ſin. C : $\frac{1}{2}$AB = ſin. A : $\frac{1}{2}$BC und verſezt

ſin. C : ſin. A = $\frac{1}{2}$AB : $\frac{1}{2}$BC

——— ———. 2

ſin. C : ſin. A = AB : BC.

§. 727. Zuſ. Eben ſo beweißt man es vom dritten Winkel, daß ſin. B : ſin. A = AC : BC; dahero der Lehrſatz allgemein iſt.

§. 728. Lehrſ. Alle trigonometriſche Linien, das iſt, Sinus, Coſinus, Tangenten, Cotangenten, u. ſ. w. verhalten ſich bey ähnlichen Bogen wie die Radii. Dann *Fig.* 86. iſt Cd : de = CD : DE; nun ſind Cd, CD Radii, der eine ſey r, der andere R, die andere zwo Linien ſind die Sinus der ähnlichen Bogen DA, da; folglich Cd : r = CD : R, oder Cd : CD = r : R; Eben ſo wird der Beweis bey den übrigen trigonometriſchen Linien geführt.

§. 729. Lehrſ. In einem jeden geradelinigten Dreyeck kann von einer angenommenen Spitze eine gerade Linie unter beliebigem Winkel auf die Grundlinie herabgezogen werden; alsdann verhalten ſich die Abſchnitte der Grundlinie durch die correſpondirende Seiten dividirt, wie die Sinus der opponirten neu entſtandenen Winkel. Dann es werde *Fig.* 88 *α*. aus der Spitze E die Linie ED unter was für einen Winkel man will, auf AB gezogen, ſo iſt folgender Satz zu erweiſen.

Satz.

Saß. *Fig.* 88. *a.*

$$\sin. o : \sin. s = \frac{AD}{AE} : \frac{DB}{EB}.$$

Bew.

$$\left.\begin{array}{l}\sin. o : \sin. n = AD : AE \\ \sin. m : \sin. s = EB : DB.\end{array}\right\} \text{§. 726.}$$

$$\sin. o \times \sin. m : \sin. s \times \sin. n = AD \cdot EB : AE \cdot DB$$

$\sin. m = \sin. n$ nach §. 689. folglich ſubſtituirt

$$\sin. o \times \sin. n : \sin. s \times \sin. n = AD \cdot EB : AE \cdot DB$$

$$: \sin. n$$

$$\sin. o : \sin. s = AD \cdot EB : AE \cdot DB$$

$$: AE$$

$$= \frac{AD \cdot EB}{AE} : DB$$

$$: EB$$

$$= \frac{AD}{AE} : \frac{CA}{EB} \text{ alſo}$$

$$\sin. o : \sin. s = \frac{AD}{AE} : \frac{DB}{EB}.$$

§. 730. Zuſ. Man könnte den Saß auch ſo ausdrucken, die Sinus ſind in dieſem Fall, unter den Bedingungen §. 729. in ratione directa Segmentorum Baſis, und inverſa laterum.

§. 731. Lehrſ. Wenn in einem gleichſchenklichten Dreyeck der Winkel am Scheitel, oder an der obern Spiße in zween gleiche getheilt, und von dem Theilungspunkt eine gerade Linie auf die Grundlinie gezogen wird, ſo wird

I. Der Sinus des halbirten Winkels die halbe Grundlinie durch die eine Seite dividirt,

II. Eine jede Seite die halbe Grundlinie durch den Sinus des halben Winkels dividirt; und

III. Die halbe Grundlinie das Product einer Seite in den Sinus des halben Winkels ſeyn, wenn der Sinus totus oder Radius = 1; wir wollen ihn aber mehrerer Deutlichkeit halben im Beweis = r ſetzen, den Winkel u, folglich den Sinus des halben Winkels Sin. $\frac{1}{2}$u nennen. Die Baſis heiſſe d, die Seite a; ſo iſt nach *Fig.* 88 β.

I. Satz. *Fig* 88. β.

$$\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}u = \frac{\tfrac{1}{2}b \cdot r}{a} = \frac{br}{2a}$$

Bew.

△ LMN iſt gleichſchenklicht nach der Vorausſetzung, folgl. da auch $o = n = \frac{1}{2}u$; nach der Vorausſetzung, ſo iſt,

$LP = PN = \frac{1}{2}LN = \frac{1}{2}b$. und bey P rechte Winkel, daher

$LM : LP = \text{ſin. tot.} : \text{ſin.}\ o$ das iſt in Buchſtaben

$a : \frac{1}{2}b = r : \text{ſin.}\ \frac{1}{2}u$ folglich

$\frac{\frac{1}{2}b \cdot r}{a} = \frac{br}{2a} = \text{ſin.}\ \frac{1}{2}u.$ u. wenn $r = 1$, ſo iſt $\frac{b}{2a} = \text{ſin.}\ \frac{1}{2}u$

II. Satz. $a = \frac{r \cdot \frac{1}{2}b}{\text{ſin}\ \frac{1}{2}u} = \frac{br}{2\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}u}$

Bew.

$\text{ſin.}\ o : LP = \text{ſin. tot.} : LM$ das iſt in Buchſtaben

$\text{ſin.}\ \frac{1}{2}u : \frac{1}{2}b = r : a = \frac{\frac{1}{2}b \cdot r}{\text{ſin.}\ \frac{1}{2}u} = \frac{br}{2\ \text{ſin.}\ \frac{1}{2}u}.$

III. Satz. $\frac{1}{2}b = \frac{a \cdot \text{ſin.}\ \frac{1}{2}u}{r}$

Bew.

$\text{ſin. tot.} : LM = \text{ſin.}\ o : LP$ das iſt in Buchſtaben

$r : a = \text{ſin.}\ \frac{1}{2}u : \frac{1}{2}b = \frac{\text{ſin.}\ \frac{1}{2}u \cdot a}{r}$

§. 732.

§. 732. Anm. Dieſe drey Formeln hat man ſich bekannt zu machen, wenn man in dem Rechnen ſchnell fortkommen will, ſie ſind, wenn der Radius = 1, nochmalen folgende: I. $\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u = \frac{b}{2a}$; II. $a = \frac{b}{2\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u}$; III. $\frac{1}{2}b = a\,.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u$. oder $b = 2a\,.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u$.

§. 733. Lehrſatz. Die Grundlinie in dem nemlichen Dreyeck iſt auch dem Product einer Seite in den Sinus des ganzen obern Winkels durch den Coſinus deſſelben halben Winkels dividirt.

Satz. *Fig.* 88. *β*.

$$b = \frac{a\,.\,\text{ſin.}\,u}{\cos.\,\frac{1}{2}u.}$$

Bew.

$MP = \cos.\,O$

$\cos.\,O = \cos.\,\frac{1}{2}u$

$MP = \cos.\,\frac{1}{2}u.$

$MP = \text{ſin.}\,N$ folglich

$\text{ſin.}\,N = \cos.\frac{1}{2}u.$ da nun

$LN : LM = \text{ſin.}O + n : \text{ſin.}\,N.$ das iſt ſubſtit.

$b : a = \text{ſin.}\,u : \cos.\,\frac{1}{2}u$ ſo iſt

$$\frac{a\,.\,\text{ſin.}\,u}{\cos.\,\frac{1}{2}u} = b.$$

§. 734. Zuſatz. Weil $b = 2a\,.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u$ nach §. 732. und nach dem unmittelbar vorhergehenden §. 733. $b = \frac{a\,.\,\text{ſin.}\,u}{\cos.\frac{1}{2}u}$, ſo gibt es folgende Rechnung:

$b = 2a\,.\,\text{ſin.}\,\frac{1}{2}u$

$b = \frac{a\,.\,\text{ſin.}\,u}{\cos.\,\frac{1}{2}u}$

2a

$$2a \cdot \sin.\tfrac{1}{2}u = \frac{a \cdot \sin. u}{\cos.\tfrac{1}{2}u}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \cdot \cos.\tfrac{1}{2}u$$

$$2a \cdot \sin.\tfrac{1}{2}u \cdot \cos.\tfrac{1}{2}u = a \cdot \sin. u.$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : a$$

$$2 \cdot \sin.\tfrac{1}{2}u \cdot \cos.\tfrac{1}{2}u = \sin. u.$$

§. 735. Lehrſ. Das Quadrat vom Sinus des halben Winkels iſt dem halben Product aus dem Sinus totus oder Radius in die Differenz des Radius und Coſinus, oder welches gleichviel iſt, aus dem halben Product aus dem Radius in den Sinus verſus oder Querſinus gleich. Dann man ziehe die Linie LQ auf MN perpendicular, ſo iſt LQ der Sinus des ganzen Winkels o + n, das iſt des Winkels u, wie wir ihn bisher genannt; man nenne LQ = p, ſo iſt p = ſin. ½u.

Der Coſinus von u, neml.

MQ heiſſe π; ſo iſt MQ = π und π = cos. u. LP der Sinus von o iſt der Sinus des halben Winkels u; er heiſſe q; ſo iſt LP = q, und q = ſin. ½u; dem zu Folge wird nach der *Fig.* 88. β. der obige Lehrſatz in den erklärten Buchſtaben der folgende ſeyn: Satz. *Fig.* 88. β.

$$q^2 = \frac{(r - \pi)r}{2}$$

Bew.

RM : MQ = LO : OQ
RM = LM weil o = n nach §. 533.

LM : MQ = LO : OQ oder invertendo
MQ : LM = OQ : LO und addendo
MQ+LM : LM = OQ+LO : LO
OQ + LO = LQ in der Figur

Nr. I.

Nr. I. $MQ + LM : LM = LQ : LO$ d. i. in Buchſtaben, wo für den Radius LM $= r$ geſezt wird,

$$r + \pi : r = p : \frac{rp}{r + \pi} = LO.$$

Es iſt ferner

$\triangle LPO \backsim \triangle LQN.$ weil P u. Q Rechte, u. der Winkel bey L gemeinſchaftl. iſt:

dahero $LQ : LN = LP : LO$ d. i. in Buchſtaben, weil

Nr. II. $LN = 2LP = 2q.$

$$p : 2q = q : \frac{2q^2}{p} = LO.$$

Nun iſt nach Nr. I. auch $\frac{rp}{r + \pi} = LO$ folglich

$$\frac{2q^2}{p} = \frac{rp}{r + \pi}$$

$.p$

$$2q^2 = \frac{rp^2}{r + \pi}$$

$:2$

$$q^2 = \frac{rp^2}{2(r + \pi)}$$

man multiplicire den Bruch beederſeits, nemlich den Zehler und Nenner mit $r - \pi$, ſo bleibt er unverändert nach §. 56.

$$q^2 = \frac{rp^2(r - \pi)}{2(r + \pi)(r - \pi)}$$

Es iſt aber

$(r + \pi)(r - \pi) = r^2 - \pi^2$ nach §. 147. folgl. ſubſtit.

$$q^2 = \frac{rp^2(r - \pi)}{2(r^2 - \pi^2)}$$

Es iſt aber nach §. 702. nemlich das Quadr. des Rad minus dem Quadr. des Coſ. = dem Quadr. des Sin. der p heißt.

$r^2 - \pi^2 = p^2$;

$$q^2 = \frac{rp^2(r - \pi)}{2 \cdot p2}$$

das iſt, wenn man mit p2 aufhebt

q²

$q^2 = \frac{r(r-\pi)}{2}$ welches der obige Lehrſatz iſt, und alſo zu erweiſen war.

§. 736. Zuſatz. Weil $r - \pi =$ ſin. verſus, nach §. 719. ſo iſt auch $q^2 = \frac{r.\,\text{ſin. vers.}}{2}$

§. 737. Lehrſatz. Wenn man zween ſolche Winkel wie u betrachtet, und beede halbiret, ſo iſt das Product aus der Summe der Sinuum dieſer halbirten Winkel in ihre Differenz, dem halben Product des Radii in die Differenz ihrer Coſinuum gleich. Dann es ſey der andere Winkel w, ſein Sinus heiſſe l, oder ſin. w = l, cos. w = λ und ſin $\frac{1}{2}$ w = t; ſo wird, wie oben §. 735. seyn $t^2 = \frac{r(r-\lambda)}{2}$; und der Lehrſatz in Buchſtaben folgendermaſſen ausgedruckt werden:

Satz. *Fig.* 88. β.

$$(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}u + \text{ſin.}\tfrac{1}{2}w)(\text{ſin.}\tfrac{1}{2}u - \text{ſin.}\tfrac{1}{2}w) = \frac{r(\cos.w - \cos.u)}{2}$$

Beweis.

Es iſt nach §. 735. $q^2 = \frac{r(r-\pi)}{2}$

alſo auf ſolche Weiſe $t^2 = \frac{r(r-\lambda)}{2}$ ſubtr.

folgl. $q^2 - t^2 = \frac{r(r-\pi)}{2} - \frac{r(r-\lambda)}{2}$. oder wirkl. die Producte durch die Multipl. hingeſezt,

$= (r^2 - r\pi) - (r^2 - r\lambda)$ d. i. nach §. 140.

$= \frac{r^2 - r\pi - r^2 + r\lambda}{2}$, u. was ſich aufhebt, nemlich $r^2 - r^2$ aufgehoben

$= \frac{r\lambda - r\pi}{2} = \frac{r(\lambda - \pi)}{2}$ u. in der Bedeut. der Buchſtaben λ u. π;

q²

$q^2 - t^2 = \frac{r(\cos.w - \cos.u)}{2}$ Es iſt ferner nach der Bedeutung der Buchſt. q u. t

$q^2 - t^2 = (\sin.\frac{1}{2}u)^2 - (\sin.\frac{1}{2}w)^2$ aber es iſt nach §. 147.

$(\sin.\frac{1}{2}u)^2 - (\sin.\frac{1}{2}w)^2 = (\sin.\frac{1}{2}u + \sin.\frac{1}{2}w).(\sin.\frac{1}{2}u - \sin.\frac{1}{2}w)$ folgl.

$$(\sin.\tfrac{1}{2}u + \sin.\tfrac{1}{2}w)(\sin.\tfrac{1}{2}u - \sin.\tfrac{1}{2}w) = \frac{r(\cos.w - \cos.u)}{2}$$

§. 738. Zuſ. Wenn der Winkel w kleiner iſt als u, wie er im Beweis angenommen wurde, ſo iſt ſein Coſinus gröſſer als der Coſ. des gröſſern Winkels, nach §. 703. dahero die Differenz der Coſinuum ſo zu verſtehen, daß der Coſinus des gröſſern vom Coſinus des kleinern abgezogen wird; ſonſt würde die Differenz und alſo auch das Product negativ. Es heißt dahero nicht $\frac{r(\cos.u - \cos.w)}{2}$ ſondern umgekehrt $r(\cos.w - \cos.u)$; wenn gleich der Winkel w kleiner als u iſt.

§. 739. Anm. Dieſe Lehrſätze ſind ungemein fruchtbar, ungeachtet ſie in den meiſten mathematiſchen Handbüchern, beſonders die nicht ganz neu ſind, vermißt werden; aber eben deßwegen hat man ſich deſto genauer mit ihnen bekanut zu machen.

Die Erfindung der Sinus von den Summen und Differenzen der Bogen, aus den gegebenen Sinuſſen, und andern trigonometriſchen Linien.

§. 740. Lehrſatz. Wenn die Sinus zweyer Bogen gegeben ſind, ſo kann man den Sinus ihres Unterſchieds finden; er iſt nemlich das Product aus dem Coſ. des einen in den Sinus der Summe, weniger dem Product vom Sinus des andern in den Coſinus

ſinus der Summe gleich, wenn der Radius eins iſt, oder wenn er = r, ſo wird dieſe Differenz durch den Radius dividirt. Es ſey in der *Fig. 95.* CA der Radius = r, die Bögen AB, BD, und ihre Summe AD, der Sinus von AB iſt BE, der von BD iſt DG, und der von AD iſt DF, nun ſeyen

BE = m und ſein cos. CE = μ
DG = d cos. GC = δ
DF = s cos. FC = σ ſo iſt in

Buchſtaben der obige Lehrſatz alſo ausgedruckt:

Satz. *Fig. 95.*

$$\frac{\mu s - m\sigma}{r} = d = DG.$$

Beweis.

nr. I. CE : EB = CF : FI das iſt in Buchſtaben

$\mu : m = \sigma : FI$; alſo $FI = \frac{m\sigma}{\mu}$

CE : CB = CF : CI

$\mu : r = \sigma : CI$, alſo $CI = \frac{r\sigma}{\mu}$

Es iſt ferner DI = DF — FI. d. i. in Buchſtaben

nr. II. $DI = s - \frac{m\sigma}{\mu}$ und unter einerley Benennung

$$DI = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu};$$ weiter iſt

nr. III. Δ DGI $\backsim$ Δ IFC weil G und F rechte, und bey I

folgl. Verticalwinkel,

CI : FC = DI : DG. d. i. nach den gefundenen Ausdrücken nr. I. u. II.

$\frac{r\sigma}{\mu} : \sigma = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} : \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \sigma : \frac{r\sigma}{\mu} = DG$ wenn man nun dieſen Ausdruk wirkl.

wirkl. multipl. u. dividirt, nach §. 156.
und wenn man richtig aufhebt, ſo iſt

$$DG = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \sigma . \frac{\mu}{r\sigma} = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \frac{\mu\sigma}{r\sigma} = \frac{\mu s - m\sigma}{\mu} . \frac{\mu}{r}$$

$$= \frac{\mu\mu s - \mu m\sigma}{\mu r} = \frac{\mu s - m\sigma}{r} = d = DG, \text{ wie oben.}$$

§. 741. Zuſatz. Wenn der Radius $= 1$, ſo iſt die Differenz $d = \mu s - m\sigma$.

§. 742. Lehrſatz. Aus den Sinuſſen zweyer Bogen kann man auch den Sinus der Summe dieſer Bogen finden. Er iſt nemlich, wenn die Buchſtaben bleiben wie vorhin,

Satz. *Fig.* 95.

$$\frac{\mu d + \delta m}{r} = s = DF.$$

Bew.

CF : CI = DG : DI und in Buchſtaben und gefundenen Ausdruck §. 740.

$$\sigma : \frac{r\sigma}{\mu} = d : \frac{r\sigma d}{\mu\sigma} = \frac{rd}{\mu} \text{ alſo } DI = \frac{rd}{\mu}$$

CF : FI = DG : GI
CF : FI = CE : EB

CE : EB = DG : GI

$$\mu : m = d : \frac{dm}{\mu} \text{ alſo } GI = \frac{dm}{\mu}$$

ferner

CI = CG — GI. das iſt

$$CI = \delta - \frac{dm}{\mu} = \frac{\mu\delta - md}{\mu}, \text{ alſo } CI = \frac{\mu\delta - md}{\mu}$$

CB : BE = CI : IF

$$r : m = \frac{\mu\delta - md}{\mu} : \frac{m\mu\delta - mmd}{\mu r} \text{ alſo } IF = \frac{m\mu\delta - mmd}{\mu r}.$$

DF = DI + IF oder nach den gefundenen Ausdrücken

$DF = \frac{rd}{\mu} + \frac{\mu m\delta - mmd}{r\mu}$ und unter einerley Benennung,

$DF = \frac{rrd\mu + \mu\mu m\delta - \mu mmd}{r\mu\mu}$ und mit μ oben u. unten aufgeh.

$DF = \frac{rrd + \mu m\delta - mmd}{r\mu}$ und ſchicklicher ausgedruckt

$DF = \frac{(rr - mm)d + \mu m\delta}{r\mu}$ es iſt aber

$rr - mm = \mu\mu$ nach §. 700. dieſes ſubſtit. gibt

$DF = \frac{\mu\mu d + \mu m\delta}{r\mu}$ und durch μ oben und unten aufgehoben, gibt

$DF = \frac{\mu d + m\delta}{r} = s.$ welches der oben zu erweiſende Lehrſatz war.

§. 743. Zuſatz. Iſt $r = 1$, ſo iſt $s = DF = \mu d + m\delta$.

§. 744. Zuſatz. Wenn man den Lehrſatz nach der Bedeutung der Buchſtaben ausdruckt, und die zween Bogen x und y nennt, ſo iſt ſin. $(x + y) = (\cos. x . \sin. y + \sin. x . \cos. y)$.

§. 745. Zuſatz. Wenn $x = y$, ſo iſt ſin. $(x + y) = \sin. 2x = (\cos. x . \sin. x + \sin. x . \cos. x) = 2(\sin. x . \cos. x)$.

§. 746. Lehrſatz. Der Coſinus von der Summe zweyer Bogen, iſt gleich dem Product der beeden Coſinuum, weniger dem Product der beeden Sinuum der einzeln Bögen. Dann man ziehe *Fig.* 94. welche wie die 95 iſt, noch aus dem Punkt G,

G, die Linie GK mit FA parallel, und fälle aus G die Perpendicularlinie GH auf AC herab, ſo iſt der Satz bald erwieſen.

Satz. *Fig.* 94.

$(\cos. x . \cos. y) - (\sin. x . \sin. y) = \cos. x + y.$

Beweis.

nr. I. CB : CE = CG : CH. das iſt im Wehrt dieſer Linien
$1 : \cos. x = \cos. y : CH$ alſo $CH = (\cos. x . \cos. y)$
weil ferner △DGK ∽ △IGK ∽ △ICF ∽ △BCE, §. 532.
ſo iſt CB : BE = DG : GK. d. i im Wehrt der Linien
$1 : \sin. x = \sin. y : GK$ alſo $GK = (\sin. x . \sin. y.)$
weiter iſt $\cos. (x+y) = CF = CH - FH = CH - GK.$
aber $CH - GK = (\cos. x . \cos. y) - (\sin. x . \sin. y.)$

$\cos. (x+y) = (\cos. x . \cos y) - (\sin. x . \sin. y)$

§. 747. Zuſatz. Wenn $x = y$, ſo iſt $\cos. 2x = (\cos. x)^2 - (\sin. y)^2$

§. 748. Zuſatz. Ferner iſt kraft des unmittelbaren Gegenſatzes $\cos. (x - y) = (\cos. x . \cos. y) + (\sin. x . \sin. y)$. wie auch aus §. 740. erhellet.

§. 749. Zuſatz. Wenn $x = y$, ſo iſt $\cos. (x - x) = \cos. 0 = (\cos. x)^2 + (\sin. x)^2 = 1.$ nach §. 720. dahero auch aus dieſer Folge die Richtigkeit des obigen Zuſatzes §. 748. erhellet.

§. 750. Zuſatz. Weil der $\tang. x = \frac{\sin. x}{\cos. x}$ ſo iſt auch $\tang. (x+y) = \frac{\sin. (x+y)}{\cos (x+y)}$ folglich, wenn man obige Wehrte ſubſtituirt $\tang. (x+y) = \frac{(\sin. x . \cos. y) + (\cos. x . \sin. y)}{(\cos. x . \cos. y) - (\sin. x . \sin. y)}$

§. 751. **Lehrſatz.** Der Coſinus des Bogen x, mit ſeinem durch $\sqrt{-1}$ multiplicirten Sinus, zur Dignität n erhoben, und durch den Radius in der Dignität n dividirt, iſt der durch den Radius dividirten Summe des Coſ. vom nfachen Bogen, und des mit $\sqrt{-1}$ multiplicirten Sinus dieſes nfachen Bogens gleich.

Beweis.

$$\frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})}{r}\,\frac{(\cos. x - \sin. x . \sqrt{-1})}{r} = 1, \text{ nach § 723.}$$

Man ſetze für den zweyten Factor, $(\cos. y + \sin. y \sqrt{-1})$ ſo iſt

$$\frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})(\cos. y + \sin. y \sqrt{-1})}{rr} =$$ wenn man wirkl. multipl.

$$= \frac{(\cos. x.\cos. y - \sin. x.\sin. y)}{rr} + \frac{(\cos. x.\sin y + \sin. x.\cos. y)\sqrt{-1}}{rr}$$ aber

$$\frac{\cos. x.\cos. y - \sin. x.\sin y}{r} = \cos.(x+y) \text{ nach § 746. und}$$

$$(\cos. x.\sin. y + \sin. x.\cos. y) = \sin.(x+y) \text{ nach §. 744.}$$

folglich

$$\frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})(\cos. y + \sin. y \sqrt{-1})}{rr}$$

$$= \frac{\cos.(x+y) + (\sin. x + y)\sqrt{-1}}{r}.$$

es ſey x = y; ſo iſt

$$\frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})}{rr}$$

$$= \frac{\cos. 2x + \sin. 2x \sqrt{-1}}{r}$$ das iſt

$$\frac{(\cos. x + \sin. x \sqrt{-1})^2}{rr} = \frac{\cos. 2x + \sin. 2x \sqrt{-1}}{r}$$ und

(cos.

$$\frac{(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})^3}{rrr} = \frac{\cos. 3x + \sin. 3x\sqrt{-1}}{r};$$ u. allgemein

$$\frac{(\cos. x + \sin. x\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos. nx + \sin. nx\sqrt{-1}}{r}.$$

§. 752. Zuſatz. Weil die Rechnung bey negativen Zeichen eben dieſe Regeln befolgt, ſo wird aus gleichem Grund $(\cos. x - \sin. x\sqrt{-1})(\cos. y - \sin. y\sqrt{-1}) = \cos.(y+x) - \sin.(y+x)\sqrt{-1}$ alſo iſt $\frac{(\cos x \pm \sin x\sqrt{-1})^2}{r^2} = \frac{\cos. 2x \pm \sin. 2x\sqrt{-1}}{r}$.

u. allgemein $\frac{(\cos. x \pm \sin. x\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos. nx \pm \sin. nx\sqrt{-1}}{r}$

eine allgemeine und fruchtbare Formel, wo der Exponent n, nach der Vorausſetzung, eine ganze Zahl iſt.

§. 753. Zuſatz. Wenn alſo z einen Bogen bedeutet, ſo kann der Sinus von dem nfachen Bogen oder ſin. nz bald gefunden werden. Dann es iſt

$$\frac{(\cos. z + \sin. z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos. nz + \sin. nz\sqrt{-1}}{r}$$

$$\frac{(\cos. z - \sin. z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{\cos. nz - \sin. nz\sqrt{-1}}{r}$$ ſubtrah.

$$\frac{(\cos. z + \sin. z\sqrt{-1})^n - (\cos. z - \sin. z\sqrt{-1})^n}{r^n} = \frac{2\sin. nz\sqrt{-1}}{r} \quad . r$$

$$\frac{(\cos. z + \sin. z\sqrt{-1})^n - (\cos. z - \sin. z\sqrt{-1})^n}{r^{n-1}} = 2\sin. nz\sqrt{-1}$$ nach §. 175 $: 2\sqrt{-1}$

$$\frac{(\cos. z + \sin. z\sqrt{-1})^n - (\cos. z - \sin. z\sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}\sqrt{-1}} = \sin. nz.$$

§. 754. Zuſatz. Eben ſo wird, wenn man was oben ſubtrahirt war, addirt, und die Summe durch r beederſeits multiplicirt, und mit 2 dividirt, der $\cos.\, nz = \frac{(\cos\, z + \sin. z \sqrt{-1})^n + (\cos. z - \sin. z \sqrt{-1})^n}{2r^{n-1}}$ gefunden; woraus ſich kraft des binomiſchen Lehrſatzes der ſin. und cos. nz durch eine unendliche Reyhe, und wenn er durch eine ganze Zahl beſtimmt wird, in endlichen Ausdrücken finden läßt. Wir werden davon in dem vierten Hauptſtück noch was melden.

Die Erfindung der Seiten und Winkel eines Dreyecks aus drey gegebenen Stücken, eine Seite mit darunter gerechnet.

§. 755. Lehrſatz. In einem jeden ungleichſeitigen Dreyeck läßt ſich aus zwo Seiten mit dem eingeſchloſſenen Winkel die dritte Seite durch Rechnung beſtimmen. Dann es ſey *Fig.* 87. im Dreyeck ABC, AB und AC nebſt dem Winkel A gegeben, man ſuche BC; um die Erfindung allgemein und wegen dem folgenden deſto fruchtbarer zu machen, wollen wir hie nicht die längſt bekannte Auflöſung allein anbringen, ſondern durch die Buchſtabenrechnung aus der Natur der trigonometriſchen Linien die Sache erweiſen. Es ſeye

$AB = a$, $\sin A = p$; $\cos. A = \pi$
$AC = b$ $\sin. B = m$ $\cos. B = \mu$
$BC = c$

Satz.

Saß. *Fig.* 87.

$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\pi}$.

Beweis.

$BCA = 180° - (A + B)$ §. 464.
$\text{ſin. } BCA = \text{ſin. } BCK$ §. 688.
$\text{ſin. } BCK = \text{ſin. } (A + B)$

$\text{ſin. } BCA = \text{ſin. } (A + B)$
$\text{ſin. } (A + B) = m\pi + \mu p$, nach §. 742.
nr. I. wenn man die hier vorkommende Buchſtaben ſubſtit.

$\text{ſin. } BCA$ oder $\text{ſin } C = m\pi + \mu p$. Es iſt ferner
$BC : \text{ſin. } A = AB : \text{ſin. } C$ nach §. 726. u. in Buchſt.
$c : p = a : \frac{ap}{c} = \text{ſin. } C$. aber nach nr. I.

$m\pi + \mu p = \text{ſin. } C$

nr. II. $\frac{ap}{c} = m\pi + \mu p$.

weiter iſt
$BC : \text{ſin. } A = AC : \text{ſin. } B$ §. 726. oder in Buchſtaben
nr. III. $c : p = b : \frac{bp}{c} = \text{ſin. } B = m$.

Nun iſt $(\cos. B)^2 = \mu^2 = 1 - (\text{ſin. } B)^2$ §. 700.
u. im Wehrt von ſin. BC
$= 1 - \frac{b^2p^2}{c^2}$ und unter einerley Benennung gebracht
$= \frac{c^2 - b^2p^2}{c^2}$ alſo

nr. IV. $\cos. B = \mu = \frac{\sqrt{(c^2 - b^2p^2)}}{c}$

Wenn man nun ſubſtituirt, ſo iſt, weil
nach nr. I. $\text{ſin. } C = m\pi + \mu p = \frac{bp\pi}{c} + \frac{p\sqrt{c^2 - b^2p^2}}{c}$
nach nr. III. IV.
aber

aber $m\pi + \mu p = \frac{ap}{c}$ nach nr. II.

folglich

$$\frac{bp\pi}{c} + \frac{p\sqrt{c^2 - b^2p^2}}{c} = \frac{ap}{c}$$

$\cdot c$

$$bp\pi + p\sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = ap$$

$:p$

$$b\pi + \sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = a$$

$$b\pi = b\pi$$ ſubtr.

$\sqrt{(c^2 - b^2p^2)} = a - b\pi$ und quadrirt

$$c^2 - b^2p^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2\pi^2$$

$$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2\pi^2$$

$\pi^2 = 1 - p^2$ §. 700.

$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2(1 - p^2)$ d. i.

$$c^2 - p^2b^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2 - p^2b^2$$

$p^2b^2 = p^2b^2$ add.

$c^2 = a^2 - 2ab\pi + b^2$ folglich

$$c = \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab\pi)}$$

§. 756. Zuſatz. Aus drey gegebenen Seiten werden die Winkel beſtimmt. Dann es ſey alles wie vorhin; ſo gibt es folgende Rechnung:

$a^2 + b^2 - 2ab\pi = c^2$ und $2ab\pi$ herüber geſezt

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab\pi$$

$:2ab$

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \pi$ und beederſeits 1 addirt

$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + 1 = \frac{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab}{2ab} = 1 + \pi$ Es iſt aber

a²

$$a^2+2ab+b^2-c^2 = \frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab} = 1+\pi$$

und eben ſo wenn man ſubtr. π von 1,

$$2ab-a^2-b^2+c = \frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab} = 1-\pi$$

und aus dem beederſeitigen Product die Quadratwurzel $\frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(c-a+b)(c+a-b)}}{2ab} = \sqrt{(1-\pi^2} = p;$

Dann $1-\pi^2 = p^2$ nach §. 700. da man nun p^2 folglich auch p den Sinus eines Winkels aus den drey Seiten gefunden, ſo hat man den Winkel, und kann die übrige Winkel leicht finden.

§. 757. **Lehrſatz.** Aus einer Seiten und zween Winkel, oder aus zwo Seiten und einem Winkel, der aber nicht von ihnen eingeſchloſſen iſt, laſſen ſich nach §. 726. leicht die übrige Stücke beſtimmen. Dann es ſey *Fig.* 90. AC, A und B gegeben; ſo verhält ſich

nr. I. $\sin B : AC = \sin. A : BC = \frac{AC \cdot \sin. A}{\sin. B.}$

Wenn ferner *Fig.* 91. A und C, nebſt AC gegeben ſind, ſo iſt auch aus A und C der Winkel B gegeben, nemlich $= 180^\circ - (A+C)$ nach §. 464. folglich

nr. II. $\left\{\begin{matrix} \sin. 180. - (A+C) : AC = \\ \sin. B : AC = \end{matrix}\right. \left\{\begin{matrix} \sin. C : AB \\ \sin. A : BC. \end{matrix}\right.$

§. 758. **Zuſatz.** Weil der ſin. C, oder ſin. A, oder ſin. B auch dem Sinus des Nebenwinkels gleich, folglich der Sinus eines ſtumpfen und ſpizigen Winkels ſeyn kann §. 688. ſo muß man wiſſen, ob der geſuchte Winkel ſpitzig oder ſtumpf iſt; das iſt, ob das ungleichſeitige Dreyeck ſtumpfwinklicht oder ſpizwinklicht iſt; ſonſt wäre die Aufgab unbeſtimmt.

§. 759. **Lehrſatz.** In einem rechtwinklichten Dreyeck kann man aus den zwo Seiten nebſt dem eingeſchloſſenen rechten Winkel die übrige Winkel und Seiten finden. Dann man ziehe *Fig.* 89. aus C mit dem Radius CA den Bogen AD, ſo iſt AB die Tangente von C. folglich

CA : AB = ſin. tot. tang. C. wenn man C gefunden, ſo findet man die dritte Seite nach dem obigen Lehrſatz nr. I.

§. 760. **Lehrſatz.** Aus zwo Seiten und dem eingeſchloſſenen Winkel eines ungleichſeitigen ſtumpf- oder ſpizwinklichten Dreyecks kann man die übrige Winkel und Seiten noch anders als §. 755. finden.

Dann es ſey *Fig.* 92. BC, BF nebſt dem Winkel CBF oder c gegeben, ſo wird unter den geſuchten Winkeln o+r der gröſſere und s der kleinere ſeyn: oder umgekehrt, weil das Dreyeck ungleichſeitig, folglich kein Winkel dem andern gleich iſt: es wird alſo nach § 318. die halbe Summe plus die halbe Differenz dieſer beeden geſuchten Winkel der groſſen Winkel ſeyn. Man ſuche alſo die halbe Differenz; welches geſchieht, wenn man aus B mit dem Radius BC einen halben Cirkel beſchreibt, die Sehne CE zieht, und auf F die Seite DF mit CE parallel, welche durch die von A durch C gehende Linie AD geſchnitten und beſtimmt wird, ſo iſt CD die Tangente der halben Differenz, welche gefunden wird, weil

AF : EF = AD : CD; und die drey erſte Glieder bekannt ſind

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} m = (o+r)+s. \\ m = o+n \end{array}\right\}\ \text{§. 470.}$$

$$(o+r)+s = o+n$$

$$o = n \quad \text{nach §. 439.}$$

$$(o+r)+s = 2n$$

$$:2$$

$$\frac{(o+r)+s}{2} = n$$

$$n = s+p$$

$$\frac{(o+r)+s}{2} = s+p. \quad \text{die halbe Summe der Winkel}$$

$$s = s \quad \text{der kleine geſuchte Winkel}$$

$$\frac{(o+s)+s}{2} - s = p \text{ und } CD = \text{tang. } p.$$

AF : EF = AD : CD das iſt, weil AB = BC = und AD
tang. s + p = tang. ſemi ſummæ der geſuchte Winkel

BF + BC : BF, — BC = tang. (s + p) : tang. p.

Das iſt in Worten, die Summe der zween gegebenen Seiten zu ihrer Differenz, wie die Tangente der halben Summe der geſuchten Winkel zur Tangente der halben Differenz; addirt man nun dieſe gefundene halbe Differenz zur halben Summe, ſo hat man den groſſen Winkel, und ſofort nach §. 758. die dritte Seite.

§. 761. **Lehrſatz.** Aus drey Seiten eines ungleichſeitigen Dreyecks laſſen ſich die drey Winkel finden.

Es ſeyen *Fig.* 93. im Dreyeck ACB die Seiten AC, CB, AB gegeben, man beſchreibe aus dem Punkt C mit der kleinſten Seite CB, als dem Radius, einen Cirkel HBDF; man verlängere AC bis an die Peripherie des Cirkels H; ſo iſt AH = AC + CB, und AF = AC — CB, weil CF = CB = CH = Radius; ferner iſt nach §. 537. AB : AH = AF : AD; das iſt

AB : AC + CB = AC — CB : AD.

Hat man AD gefunden, ſo hat man auch DB = AB — AD; man fälle von C den Perpendikel CG auf DB, ſo iſt DG = GB nach §. 552. folglich GB = $\frac{1}{2}$ DB. Man hat alſo im Dreyeck CBG, die Seite CB, BG und den rechten Winkel bey G; woraus man GCB und B findet nach §. 757. Eben ſo hat man im △ ACG die Seiten AC, AG = AD + DG, und den rechten Winkel bey G, woraus man ACG und A findet nach §. 757. folglich werden durch dieſe Reduction alle Winkel gefunden.

Anwendung der trigonometriſchen Lehrſätze auf die Polygone.

§. 762. **Lehrſätze.** Die Seite eines regulairen Vielecks, läßt ſich aus dem Winkel am Mittelpunkt durch Rechnung trigonometriſch beſtimmen. Sie iſt nemlich *Fig.* 67. $\frac{2AC \cdot \sin. \frac{1}{2} ACB}{r}$; oder wenn AC = a, ACB = v, und AB = b; ſo iſt b = $\frac{2a \cdot \sin. \frac{1}{2} v}{r}$.

Bew.

Bew.

Man theile AB durch den Perpendikel CG in zween gleiche Theile, ſo iſt AG = GA, und bey G rechte Winkel, △. ACG = BCG; folglich der Winkel bey C in zween gleiche Theile getheilt; dahero

$$r : AC = \sin. \tfrac{1}{2} ACB : AG. \text{ d. i. in Buchſtaben}$$

$$r : a = \sin. \tfrac{1}{2} v : \frac{a . \sin. \frac{1}{2} v}{r} = AG.$$

$$\frac{2a . \sin. \frac{1}{2} v}{r} = 2AG.$$

$$2AG = AB$$

$$\frac{2a . \sin. \frac{1}{2} v}{r} = AB = b.$$

§. 763. Zuſatz. Aus dem Ausdruck für b, läßt ſich a oder der Radius des Polygons finden; dann weil $\frac{2a . \sin. \frac{1}{2} v}{r} = b$ ſo iſt

$$2a . \sin. \tfrac{1}{2} v = rb$$

$$: 2 \sin. \tfrac{1}{2} v.$$

$$a = \frac{rb}{2 \sin. \frac{1}{2} v.}$$

Das Product des Sinus totus in die Seite des Polygons dividirt durch den doppelten Sinus des halben Centriwinkels iſt der Radius des Polygons.

§. 764. Lehrſatz. Eines jeden regulairen Vielecks Fläche läßt ſich trigonometriſch berechnen, und iſt, wenn die Anzahl der Centriwinkel n iſt,

$$\frac{n . r . \sin. v}{2}.$$

Beweis.

Es bleibe alles wie vorhin, und das Perpendikel CG heiſſe e; ſo iſt

nr. I.

nr. I. ſin. tot. : AC = ſin. CAG : CG. aber
ſin. CAG = cos. ACG.

ſin. tot. : AC = cos. ACG : CG d. i. in Buchſt.

$$r : a = \cos.\tfrac{1}{2}v : CG = \frac{a.\cos.\tfrac{1}{2}v}{r} = e.$$

nr. II. $\Delta\, ACB = \frac{AB.CG}{2}$ nach §. 516.

das iſt, in Buchſtaben $= \frac{be}{2}$

und im Wehrt von e nach nr. I. $= \frac{ba.\cos.\tfrac{1}{2}v}{2r}$

u. im Wehrt von b nach §. 762. $= \frac{2a.\sin.\tfrac{1}{2}v.a.\cos.\tfrac{1}{2}v}{2.rr}$
aufgehoben was ſich aufh. läßt
und ſchicklicher ausgedruckt $= \frac{a^2 \sin.\tfrac{1}{2}v.\cos.\tfrac{1}{2}v}{rr}$

Es iſt aber $\frac{2\sin.\tfrac{1}{2}v.\cos.\tfrac{1}{2}v}{r} = \sin. v$ nach §. 734.

folgl. ſubſtit. $\frac{a^2 \sin. v}{2r} = \frac{be}{2}$ iſt nun r = a, ſo iſt

$\frac{r.\sin. v}{2} = \frac{be.}{2}$ und die ganze Fläche

des Polygons $\frac{nr.\sin. v}{2} = \frac{nbe.}{2}$

§. 765. Zuſatz. Es ſeye ein anders Vieleck von N Seiten; und deſſen Centriwinkel = V, ſo iſt ſeine Fläche $= \frac{N.r.\sin.V.}{2}$ man heiſſe die Fläche Q, und die vorige q; ſo iſt

$$Q : q = \frac{Nr \sin. V}{2} : \frac{nr \sin. v}{2} \text{ das iſt}$$

$$Q : q = N.\sin. V : n.\sin. v. \quad :\frac{r}{2}$$

§. 766.

§. 766. Zuſatz. Wenn $V = \frac{1}{2}v$; ſo iſt nach §. 734. $\sin. v = \frac{2 \sin. V . \cos. V}{r}$; folglich in dieſem Fall

$$q : Q = \frac{n \cdot 2 \sin. V \cdot \cos. V}{r} : N . \sin. V.$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; . \sin. V$$

$$q : Q = \frac{2n \cdot \cos. V}{r} : N$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \; r$$

$$q : Q = 2n . \cos. V : r . N.$$ aber in dieſem Fall

$$2n = N.$$ nach §. 567.

$$q : Q = \cos. V : r.$$

Die Flächen zweyer Vielecke, davon das zweyte noch ſo viel Seiten als das erſte hat, verhalten ſich wie der Coſ. vom Centriwinkel des Vielecks von mehreren Seiten zum Radius.

§. 767. Anm. Man ſiehet hieraus, daß man die Polygone durch Hülfe der Trigonometrie viel genauer berechnen kann, als durch die Geometrie; wir haben dahero die Lehre davon in der Geometrie aus dieſem Grunde deſto kürzer abhandeln dörfen.

Die Berechnung der Sinus und der Logarithme, nebſt dem Gebrauch der Tafeln.

§. 768. Lehrſatz. Unter allen in den Tafeln berechneten trigonometriſchen Linien ſind nicht mehr als drey, welche ſich genau durch Rechnung finden laſſen, nemlich der Sinus totus, der Sinus von 30°, und die Tangente von 45°; die übrige alle ſind nur beynahe wahr. Dann der Sinus totus iſt der Radius, welcher 10000 Milliontheile, als ſo viele Einheiten enthält; der Sinus vor 30° iſt der

der halbe Radius; folglich die Helfte von den angenommenen Einheiten; und die Tangente von 45° iſt dem Radius gleich. Der erſte Satz iſt klar, die zween leztere laſſen ſich erweiſen.

I. Satz. *Fig.* 88. *β*.

ſin. 30° = $\frac{1}{2}$r.

Bew.

Es ſey LMN = 60° ſo iſt △ LMN gleichſeitig.
LMP = PMN = 30°. u. auch die △△ gl.

folglich LP = PN = $\frac{1}{2}$LN = $\frac{1}{2}$LM = $\frac{1}{2}$r.
aber LP = ſin. 30°

ſin. 30° = $\frac{1}{2}$r.

II. Satz. *Fig.* 89.

tang. 45° = r.

Bew.

Es ſey BCA = 45° ſo iſt BA = tang. 45°
alſo A = 90° folglich auch
CBA = 45° dahero
△ CBA gleichſchenklich; und
CA = AB das iſt
r = tang. 45°.

§. 769. Zuſatz. Weil man die übrige Sinus nicht genau finden kann, ſo hat man den Radius in ſo viel millionen gleiche Theile getheilt und die übrige Sinus, die alle kleiner nach §. 693. als Brüche von ihm angeſehen, bey denen der Fehler nicht einmal ein Milliontheilgen beträgt, wenn man die obige Eintheilung annimmt; und diß iſt ein auch bey ziemlich groſſen Cirkeln kaum merklicher Fehler.

§. 770. Anm. Damit man ſehe, wie man die Sinus und Coſ. aus einem einigen Sinus finde, wollen wir die obige Formel §. 753 zu Grunde legen, als welche nach dem binomiſchen Lehrſatz: $\text{ſin.}\, nz = \frac{n}{1}.(\cos. z)^{n-1}\, \text{ſin.}\, z - \frac{n.\, n-1.\, n-2}{1.\, 2.\, 3} (\cos. z)^{n-3}\, \text{ſin.}\, z^3 + \frac{n.\, n-1.\, n-2.\, n-3.\, n-4}{1.\, 2.\, 3.\, 4.\, 5} (\cos. z)^{n-5}\, \text{ſin.}\, z^5 - \ldots) : r^{n-1}$, hingegen $\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n.\, n-1}{1.\, 2} (\text{coc.}\, z)^{n-2} (\text{ſin.}\, z)^2 + \frac{n.\, n-1.\, n-2.\, n-3}{1.\, 2.\, 3.\, 4} (\cos. z)^{n-4} (\text{ſin}\, z)^4 - \ldots) r^{n-1}$; woraus ſich folgende Rechnung ergibt, wenn $\text{ſin.}\, z = s$, $\cos. z = c$.

$\text{ſin.}\, z = s$	$\cos. z = c$
$\text{ſin.}\, 2z = 2cs : r$	$\cos. 2z = (cc - ss) : r$
$\text{ſin.}\, 3z = (3ccs - s^3(: rr$	$\cos. 3z = (c^3 - 3css) : r^2$
$\text{ſin.}\, 4z = (4c^3 s - 4cs^3) : r^3$	$\cos. 4z = (c^4 - 6ccss + s^4) : r^3$
$\text{ſin}\, 5z = (5c^4 s - 10ccs^3 + s^5) : r^4$	$\cos. 5z = (c^5 - 10c^3 ss + 5cs^4) : r^4$
$\text{ſin.}\, 6z = 6c^5 s - 20c^3 s^3 + 6cs^5) : r^5$	u. ſ. w.

Wodurch begreiflich wird, wie die Sinus und andere trigonometriſche Linien berechnet werden können.

§. 771. Anm. Weil *Fig.* 88. β. die Sehne $LN = 2LP$, $= 2\,\text{ſin.}\, \frac{1}{2}u$; ſo kann man die Sehnen aller Winkel von zwey zu zwey Graden oder Minuten für einen gegebenen Radius finden; wodurch der ſogenannte geradelinigte Transporteur entſteht, auf welchen man gemeiniglich die Sehnen nur von 5 zu 5 Graden trägt, und die dazwiſchen fallende wie bey dem verjüngten Maasſtab beynahe zu beſtimmen ſucht. Diß gehört aber zur practiſchen Trigonometrie.

§. 772. **Lehrſatz.** Unter allen Logarithmen ſind die Logarithmen von dem Sinus totus, dem Sinus von 30° und der Tangente von 45° nebſt den Logarithmen der Zahlen 1, 10, 100, 1000, 10000; ſo weit ſie berechnet ſind, in den Tafeln genau, die übrige alle aber nur beynahe wahr. Von den erſten drey Logarithmen erhellet der Beweis aus §. 768. dann der Logarithme des Sinus totus und der Tangente

gante von 45 ſind einerley; und der Logarithmus des Sin. 30 iſt der Logarithme des halben Radius. Von den folgenden aber ergibt ſich der Beweis aus der in den Tafeln angenommenen Progreßion, 1, 10, 100, 100, u. ſ. w. und den Logarithmen 0, 1, 2, 3 u. ſ. w. mit den angehängten Nullen wegen den Decimalfractionen.

§. 773. Zuſatz. Wie man die dazwiſchen fallende Logarithmen finde, haben wir allgemein §. 309. erkläret, und können uns darauf berufen.

§. 774. Zuſatz. Der Logarithme des Sin. 0 wird unrichtig in den Tabellen = 0 geſezt. Dann wenn dieſer Logarithme null wäre, ſo müßte der Sinus von 0 Grad = 1 ſeyn; nach §. 301. Er iſt aber nicht 1, ſonſt wäre 0° = 90°, welches widerſinniſch iſt. Folglich wird dieſer Logarithme in den Tafeln unrichtig angegeben.

§. 775. Anm. Was den Gebrauch der Tafeln betrift, ſo ſtehen alle Bogen, welche zuſammen 90° betragen, beyſammen, z. E. ſie fangen an auf der erſten Columne 0°, und gerade gegen über in der andern Columne 89° 60′, das gibt zuſammen 90°. Und mit 45° hören ſie auf; nemlich auf der einen Seite 44° 60′ auf der andern 45°. 0′ weil 44° 60′ + 45° 0′ gerade 90° betragen. Alſo machen durchgehends zwey gegenüber ſtehende Bogen in Graden zuſammen 90°; dieſe Ordnung, daß die Bogen unter 45° und ihre Complemente oder Ergänzungen zu 90° beyſammen ſtehen, hat viele Bequemlichkeit; dann der Sinus des gegenüber ſtehenden Bogens iſt der Coſinus des erſten, und umgekehrt, und die dabey ſtehende Logarithme ſind alſo wechſelsweiſe die Logarithme der Sinus und der Coſinus. Eben das gilt von Tangenten und Cotangenten. Nach den logarithmiſchen Tafeln der Sinus und der Tangenten folgen die Logarithmen der in natürlicher Ordnung fortgehenden Zahlzeichen, die man braucht, wenn man eine gerade Linie in Zahlen gegeben, in die Rechnung bringt: bey dieſen Logarithmen kann man den Vortheil gebrauchen, daß man, wenn eine Linie geſucht wird, und man ſie anfänglich in Schuhen gefunden hätte, es bliebe aber noch etwas übrig, und der Logarithme correſpondirte der gefundenen Zahl nicht genau, dieſen nemlichen Logarithmen unter der un-

mittelbar folgenden Characteriſtik, die das Zehenfache der vorigen iſt, aufſuche; da dann die correſpondirende Zahl der natürlichen Zahlzeichen geometriſche Zolle geben wird, weil ein geometriſcher Schuh mit 10 multiplicirt, ſo viel geometriſche Zolle gibt; correſpondirt die Zahl noch nicht genau, ſo ſucht man ſie in der folgenden Characteriſtik, und bekommt Linien. In dieſem Fall aber iſt es gut, wenn man Tafeln hat, wo die Logarithme für die natürliche Zahlen bis auf Millionen berechnet ſind, damit man deſtomehr Characteriſtike bekomme; wie in der Trigonometria Britannica. Unerachtet diß mehr in die practiſche Rechnungen gehört, ſo wollen wir doch ein Exempel geben. Es ſey *Fig.* 90. die Linie AC gegeben in Schuhen, und zwar = 18' der Winkel A ſey 30°, und B ſey 80°. Man ſuche BC, ſo iſt

$$\text{ſin.}B : AC = \text{ſin.}A : BC \text{ oder im Wehrt}$$
$$\text{ſin.}30^\circ : 18' = \text{ſin.}80^\circ : BC = \frac{18'.\text{ſin }80^\circ}{\text{ſin.}30}$$

Wenn man nun dieſes logarithmiſch berechnet, ſo erinnert man ſich, daß durch die Logarithme die Multiplication in eine Addition, und die Diviſion in eine Subtraction verwandelt werden. Dem zu Folge addirt man de Logarithmen von 18' und 80° zuſammen, und ſubtrahirt von der Summe den Log. von 30°. Man ſucht ſie alſo in den Tafeln auf, und zwar den erſten in den Tafeln der Logarithmen der natürlichen Zahlzeichen, die andere in den Tafeln der Sinuum. u. ſ. w.

Log. 16	=	1, 2041200
Log. ſin. 80°	=	9, 9933515
Summe	=	11, 1.9.7.4.715
Log. ſin. 30°	=	9, 6989700
Log. BC	=	1, 4985015

oder die Differenz

Dieſen Logarithmen ſchlägt man in den Tafeln der natürlichen Zahlzeichen auf, weil BC eine Seite des geradelinigten Dreyecks iſt; welchen am nächſten correſpondirt, 31, das iſt 31'; um aber die Sache genauer zu wiſſen, ſo ſucht man dieſen Logarithmen unter der Characteriſtik 2, da dann am nächſten correſpondirt 315, das ſind Zolle, alſo 31' 5''; und um die Sache noch genauer zu haben, ſo ſuche man ihn auch unter der Characteriſtik 3, deme 3152''' am nächſten kommen; alſo habe ich noch 2''', folglich iſt BC = 31' 5'' 2'''. Wenn man weitere Characteriſtike hat, ſo kann man in Zehentheilgen einer Linie u. ſ. w. es noch genauer finden. Diß Exempel wird inzwiſchen hinlänglich ſeyn, eine Anleitung zum Gebrauch der Tafeln zu geben, bis wir in der practiſchen Geometrie das weitere vortragen werden.

Zwey-

Zweytes Capitel,
Von der ſphäriſchen Trigonometrie.

§. 776.
Erklärung.

Die ſphäriſche Trigonometrie lehret, aus drey gegebenen Stücken eines ſpäriſchen Dreyecks die drey andere durch Rechnung zu finden; die drey Stücke mögen Seiten oder Winkel, oder theils Seiten theils Winkel ſeyn.

§. 777. Zuſatz. Der Grund, warum in der ſphäriſchen Trigonometrie dieſe Erklärung gegeben wird, beruhet darauf, daß die ſphäriſche Dreyecke lauter Bögen größter Cirkel ſind; folglich würde ein jeder Parallelkreiß mit der Grundſeite eines ſphäriſchen Dreyecks, zwar ein anderes ähnliches Dreyeck beſtimmen, aber das hieſſe kein ſphäriſches Dreyeck von der Art, wie ſie allein in der Aſtronomie betrachtet werden.

§. 778. Anm. Auſſer dem, was wir in der allgemeinen Geſchichte der Trigonometrie §. 678. folgg. vorgetragen, melden wir noch, daß die ſphäriſche Trigonometrie von Hrn Freyh. von Wolf in ſeinen Elementis ſehr ausführlich und vollſtändig, und weit genauer als einige andere Wiſſenſchaften in dieſem Werk abgehandelt worden. Wie er dann auch eine kurze Regel, die noch allgemeiner iſt als die alte Neperiſche, und nur für rechtwinklichte Dreyecke taugliche Regel war, zu Auflöſung aller ſphäriſchen Dreyecke gefunden, und in gedachten Elementis demonſtrirt hat. Unter den neuern hat beſonders Herr Prof. Kies in einer academiſchen Diſſertation 1758 dieſe Lehre ſo ausführlich als gründlich vorgetragen.

Allgemeine Betrachtung der ſphäriſchen Dreyecke.

§. 779. Erklär. Wenn drey größte Cirkel einander ſchneiden, ſo entſtehen durch die Durchſchnittspunkte Bögen, welche die Seiten des ſphäriſchen Dreyecks ſind, und die Durchſchnittspunkte beſtimmen ſeine Winkel. Die Cirkel aber können nach §. 661. einander ſchneiden, daß jede Seite kleiner als 180° wird, von ſolchen Dreyecken iſt hier die Rede. Nemlich ein ſphäriſches Dreyeck, wie es hier betrachtet wird, beſtehet erſtlich aus lauter Bogen größter Cirkel; zweytens aus ſolchen Bogen, deren jeder kleiner als 180 oder ein halber Cirkel iſt.

§. 780. Zuſatz. Dahero gibt es in Ruckſicht auf die Sinus und Tangenten der Seiten nicht weitere Fälle der Zweydeutigkeit, als zween; da nemlich Sinus und Tangente zweyerley Bögen correſpondiren können; ſie würden aber mehrern correſpondiren, wenn man Seiten annähme, die auch gröſſer als 180° ſeyn könnten.

§. 781. Erklär. Ein ſphäriſches Dreyeck iſt entweder rechtwinklicht oder ſchiefwinklicht; rechtwinklicht heißt es, wenn es einen oder auch mehrere rechte Winkel hat, nach §. 674. ſchiefwinklicht, wenn alle drey ſchief ſind, und keiner davon ein rechter iſt.

§. 782. Erklär. In einem rechtwinklichten Dreyeck, wo ein rechter Winkel iſt, heiſſen die Seiten, welche der rechte Winkel einſchleußt, die zween Perpendikel, oder die eine iſt der Perpendikel,

und die andere die Grundlinie; die Seite, die dem rechten Winkel entgegen ſteht, heißt die Hypothenuſe.

§. 783. Lehrſatz. Wenn man von den Durchſchnittspunkten der Bögen eines ſphäriſchen Dreyecks gerade Linien oder Radios nach dem Mittelpunkt der Kugel ziehet, ſo ſind die Seiten des ſphäriſchen Dreyecks die Maaßen der Winkel an dem Mittelpunkt der Kugel. *Fig.* 96. iſt das Dreyeck PAB gegeben, man ſuche den Mittelpunkt der Kugel K, und ziehe die Linien PK, BK, AK, ſo entſtehen ſchon die Winkel PKB = PB, PKA = PA, BKA = BA. Nach geometriſchen Gründen §. 476.

§. 784. Lehrſatz. Wenn man von P auf den Durchſchnitt der zwo Flächen, nemlich auf die Linie KB die Linie PN perpendicular ziehet, und eben ſo PM auf KA perpendicular, ſo iſt, wenn man M und N durch die Linie MN vereinigt, der Winkel PNM der Neigungswinkel beeder Ebenen, und dem ſphäriſchen Winkel B oder PBA gleich. Dann daß er der Neigungswinkel ſey, erhellt aus §. 598. welchen Lehrſatz wir beſonders zu merken empfohlen, auch deutlich erwieſen haben; daß er aber dem Winkel B gleich, erhellt daher, weil die Fläche PKB ſich in B gegen die Fläche KBA eben ſo neiget, wie ſie ſich in N neiget; oder weil durch die ganze Linie KB der Neigungswinkel unverrückt bleibt; die Neigung aber dieſer zwo Flächen iſt der ſphäriſche Winkel B.

§. 785. Zuſatz. Eben ſo iſt PMN dem Winkel A, und NPM dem Winkel P gleich.

§. 786. Anm. Wenn man von Pappendeckel eine ſolche Kugel-Pyramide wie KPAB zuſammen leimet, und in die Oeffnung ein hineinpaſſendes rechtwinklichtes Dreyeck wie PMN hinein ſchiebt, ſo wird der obige Lehrſatz ſo palpabel als der §. 598. den wir auf eine ähnliche Art erläutert haben.

§. 787. Zuſatz. Man kann die gerade Linien PN und PM als die Sinus der Bögen PB und PA anſehen; dann PN ſteht auf AB, und PM auf KA perpendicular; aber KA und KB ſind die Radii der Kugel; folglich iſt nach der Erklärung §. 685. PN = ſin. PB, und PM = ſin. PA.

Betrachtung und Auflöſung der rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecke.

§. 788. Lehrſatz. Wenn der Sinus totus = r, ſo iſt nach *Fig.* 96.

r : ſin. PB = ſin. B : ſin. PA.

Bew.

PN : PM = r : ſin. PNM §. 726.
PNM = B.

PN : PM = r : ſin. B.
PN : PM = ſin. BP : ſin. PA: §. 787.

r : ſin. B = ſin. BP : ſin. PA
r : ſin. BP = ſin. B : ſin. PA.

§. 789. Lehrſatz. Unter den vorigen Umſtänden iſt wiederum, wenn t die Tangente bedeutet

r : ſin. BA = t. B : t. AP.

Bew.

MP : MN = tang. N : r nach §. 759.
N = B nach §. 784.

MP

MP : MN = tang. B : r
KM : MP = r : tang. PA. nach §. 759.

KM : MN = tang. B : tang. PA. §. 278. nr. III.
KM : MN = r : ſin. BA

r : ſin. BA = tang. B : tang. PA.

§. 790. Lehrſatz. Wie man *Fig.* 97. BP bis N und BA bis M verlängert, daß BN und BM Quadranten oder 90° werden, eben ſo verlängere man PA bis D, daß DA = 90, und ziehe von D durch N und M den Bogen DM, ſo ſind bey M und N rechte Winkel, und D iſt der Pol von BAM; folglich

PN Complementum von BP
AM Complementum von AB
PD Complementum von PA;
ferner NM das Maas des Winkels B,
ND Complementum NM

also

ND Complem. des Maaßes von B.

Eben das gilt von den Tangenten und Cotangenten, wie es aus §. 699. erhellet.

§. 791. Lehrſatz. Zween ſphäriſche Verticalwinkel ſind einander gleich.

Satz. *Fig.* 97.
BPA = DPN
Bew.

BPA + BPD = 180°
BPD + DPN = 180°

BPA + BPD = BPD + DPN
BPD = BPD ſubtr.

BPA = DPN. §. 792.

§. 792. Lehrſatz. r : cos. PA = cos. BA : cos. BP.

Bew.

r : ſin. DP = ſin. D : ſin. PN

ſin. DP = cos. PA; ſin. D = cos. BA; ſin. PN = cos. BP.

r : cos. PA = cos. BA : cos. BP.

§. 793. Lehrſ. r : cos. PA = ſin. P : cos. B.

Bew.

r : ſin. DP = ſin. P : ſin. DN.

ſin. DP = cos. PA; ſin. DN = cos. B.

r : cos. PA = ſin. P : cos. B.

§. 794. Lehrſ. r : cos. B = cot. BA : cot. BP.

Bew.

r : ſin. DN = tang. D : tang. PN. §. 789.

ſin. DN = cos B.

r : cos. B = tang. D : tang. PN.

tang. D = cot. BA, t. PN = cot. BP.

r : cos. B = cot. BA : cot. BP.

§. 795. Lehrſ. r : cos. BP = tang. P : cot. B.

Bew.

r : ſin. PN = tang. P : tang. DN §. 789.

ſin. PN = cos. BP

r : cos. BP = tang. P : tang. DN

tang. DN = cot. B

r : cos. BP = tang. P : cot. B.

§. 796. Lehrſ. r : ſin. BA = cot. AP : cot. B.

Bew.

Bew.

r : ſin. BA = tang. B : tang. AP §. 789.

tang. B : tang. AP = cot. AP : cot. B

r : ſin. BA = cot. AP : cot. B.

§. 797. Lehrſ. r : cos. B = tang. BP : t. BA.

Bew.

r : cos. B = cot. BA : cot. BP

cot. BA : cot. BP = t. BP : t. BA §. 720.

r : cos. B = tang. BP : tang. BA.

§. 798. Lehrſ. r : cos. BP = t. B : cot. P.

Bew.

r : cos. BP = t. P : cot. B

t. P : cot. B = t. B : cot. P.

r : cos. BP = tang. B : cot. P.

§. 799. Lehrſ. r : cot. BP = t. BA : cos. B.

Bew.

r : t. BP = cos. B : t. BA

$t. BP = \frac{r^2}{cot. BP}$ nach §. 720. ſubſtituirt gibt

$r : \frac{r^2}{cot. BP} = cos. B : t. BA$

———— . cot. BP

$r : cot. BP : r^2 = cos. B : t. BA.$

———— : r

cot. BP : r = cos. B : t. BA und invertendo

r : cot. BP = t. BA : cos. B.

§. 800. Zuſatz. Eben ſo iſt r : cot. B = t. AP : ſin. AB, weil $cot. AP = \frac{r^2}{t. AP}$ §. 720. und durch dieſe Subſtitution die Proportion aus §. 769. folget.

§. 801. Zuſatz. Auf gleiche Weiſe iſt auch $r : \text{cot. } P = \text{cot. } B : \text{cos. } BP$; weil $\text{tang. } B = \frac{r^2}{\text{cot. } B}$ und die Proportion aus §. 798. durch die Subſtitution daſelbſt folgt.

§ 802. Anm. Dieſes ſind alle Fälle, die bey rechtwinklichten ſphäriſchen Dreyecken vorkommen; Es ſind in allem zwölf Proportionen, davon die 6 erſte die Hauptproportionen ſind, woraus ſich alle Fragen auflöſen laſſen; und die 6 leztere Proportionen ſind nur Folgen und ſchicklichere Ausdrücke. Um die Proportionen ſogleich zu überſehen, wollen wir ſie herſetzen:

I. $r : \text{ſin. } BP = \text{ſin. } B : \text{ſin. } PA.$
II. $r : \text{ſin. } BA = \text{t. } B : \text{t. } AP.$
III. $r : \text{cos. } PA = \text{cos. } BA : \text{cos. } BP.$
IV. $r : \text{cos. } PA = \text{ſin. } P : \text{cos. } B.$
V. $r : \text{cos. } B = \text{cot. } BA : \text{cot. } BP.$
VI. $r : \text{cos. } BP = \text{t. } P : \text{cot. } B.$

Die daraus flieſſende ſechs folgende ſind

1. $r : \text{ſin. } BA = \text{cot. } AP : \text{cot. } B.$
2. $r : \text{cos. } B = \text{t. } BP : \text{t. } BA.$
3. $r : \text{cos. } BP = \text{t. } B : \text{cot } P.$
4. $r : \text{cos. } BP = \text{t. } BA : \text{cos. } B.$
5. $r : \text{cot. } B = \text{t. } AP : \text{ſin. } AB.$
6. $r : \text{cot. } P = \text{cot. } B : \text{cos. } BP.$

Allein die erſte ſechs ſind die Fundamentalproportionen, die man ſowohl hier, als bey den ſchiefwinklichten Dreyecken zu wiſſen nöthig hat, wenn man gründlich die Sache lernen will.

Betrachtung der Fälle, in welchen Winkel und Seiten gröſſer oder kleiner als 90 Grade werden.

§. 803. Lehrſ. Sind in einem ſphäriſchen Dreyeck einige Seiten kleiner, einige gröſſer als 90° oder ein Quadrant, ſo ſind zwar alle Sinus poſitiv, aber die Coſinus und die Tangenten der gröſſern Bogen negativ. Dann daß die Sinus alle poſitiv

ſitiv ſeyen, iſt aus §. 695. verglichen mit §. 689. klar; weil nemlich jede Seite des ſphäriſchen Dreyecks < 180°, und alle Sinus unter 180 poſitiv; daß aber die Coſinus der Bogen über 90° negativ werden, erhellet aus §. 704. weil der Coſinus von 90° = 0, folglich die Coſinus von gröſſern Bögen das Zeichen minus haben. Eben das gilt von den Tangenten, §. 720. weil die Tangente von 90° = ∞, folglich von da aus der Uebergang ins negative geſchiehet.

§. 804. **Lehrſ.** Nennet man ein Paar Winkel und Bogen, davon jeder weniger als 90°, oder jeder mehr als 90° hält, gleichartig, (homogeneos) ein anders Paar, davon der eine mehr der andere weniger als 90° hält, ungleichartig, (heterogeneos) ſo wird ein ſchiefer Winkel und das dem gegenüber ſtehenden Perpendikel, das iſt, die Seite die den rechten Winkel macht, allemal gleichartig ſeyn. Diß folgt aus §. 802. nr. II. das iſt, aus der Proportion r : ſin. BA = t B : t. AP. Dann ſin. BA iſt allemal poſitiv, BA mag gröſſer oder kleiner als 90° ſeyn; §. 695. dahero wie t. B, ſo iſt auch t. AP. Iſt t. B negativ, ſo iſt auch t. AP negativ; das iſt, wenn B > 90°, ſo iſt auch AP > 90°.

§. 805. **Lehrſatz.** Wenn beede Perpendikel BA, PA gleichartig ſind, ſo iſt die Hypothenuſe < 90°; nach §. 802. nr. III. dann r. cos. BP kann nicht negativ ſeyn, wenn cos. BA . cos. PA poſitiv ſind; diß Product aber iſt allemal poſitiv, wenn beede Perpendikel BA und PA gleichartig ſind, das iſt, wenn beede + oder beede — haben. Folglich muß auch r. cos. BP poſitiv ſeyn. r iſt allzeit poſitiv;

ſitiv; alſo muß auch cos. BP poſitiv ſeyn. Iſt aber diß, ſo muß BP < 90° ſeyn; dann nur dieſe Coſinus ſind poſitiv.

§. 806. Zuſatz. Wenn alſo die Perpendikel ungleichartig ſind, ſo iſt die Hypothenuſe PB > 90.

§. 807. Zuſatz. Iſt die Hypothenuſe < 90°, ſo ſind die Perpendikel gleichartig, iſt ſie gróſſer, ſo ſind ſie ungleichartig.

§. 808. Lehrſ. Die Hypothenuſe iſt kleiner als 90° wenn ein Winkel mit der anliegenden Seite gleichartig iſt. Diß fólgt aus §. 802. nr. V. wo r : cos. B = cot. BA : cot. BP. Iſt nun B und BA gleichartig, ſo iſt cos. B ⨯ cot. BA ein poſitives Product; folglich iſt es auch r ⨯ cot. BP; r iſt immer poſitiv; alſo muß auch cot. BP poſitiv ſeyn, oder das Zeichen + haben, ſonſt wúrde durch die Multiplication ein negatives Product herauskommen. Iſt aber cot. BP poſitiv, ſo iſt BP < 90°; dann dieſ cot. úber 90° ſind negativ, und nur die unter 90° poſitiv.

§. 809. Zuſatz. Sind alſo die zwo Glieder, nemlich B und BA, ungleichartig, ſo iſt die Hypothenuſe gróſſer als 90°; weil alsdann beederſeits ein negatives Product herauskommt.

§. 810 Lehrſ. Ein Winkel iſt ſpitzig, wenn der andere mit der Hypothenuſe gleichartig iſt. Der Beweis folgt aus §. 802. nr. VI. wo r : cos. BP = t. P : cot. B. Dann wann cos. BP ⨯ t. P ein poſitives Product iſt, ſo iſt es auch r ⨯ cot. B; folgl. muß cot. B poſitiv ſeyn; iſt aber dieſes, ſo iſt B < 90° nach §. 720.

§. 811.

§. 811. Zuſatz. Der Winkel B iſt alſo ſtumpf oder > 90°, wenn die Hypothenuſe und der andere Winkel ungleichartig ſind.

§. 812. Anm. Es ſind einige Fälle, aber nur wenige aus-genommen, wo ſich aus den Zeichen die Beſchaffenheit der Bo-gen nicht beſtimmen läßt, z. E. wenn lauter Sinus vorkommen, u. ſ. w. wo man, wie in der ebenen Geometrie, einem ſagen muß, ob die Winkel ſtumpf oder ſpitzig ſeyen.

Betrachtung der ſchiefen Dreyecke.

§. 813. Erklär. Ein jedes ſchiefes Dreyeck läßt ſich in zwey rechtwinklichte verwandeln, wenn man von einem nach Belieben angenommenen Win-kel deſſelben auf die entgegengeſezte Seite, die man allenfalls verlängern darf, einen Perpendikel herab-fällt, wie *Fig.* 99. 100. der Perpendikel PA aus dem ſchiefwinklichten Dreyeck zwey rechtwinklichte macht.

§. 814. Zuſatz. Schiefwinklichte Dreyecke laſſen ſich alſo auf rechtwinklichte reduciren, und nach den vorigen Lehrſätzen auflöſen, wenn man noch zwey Stücke in jedem rechtwinklichten Dreyeck auſſer dem rechten Winkel als gegeben erhält.

§. 815. Zuſatz. Man erhält dieſe zwey Stü-ke allemal, wenn neben zwo Seiten ein Winkel ge-geben iſt; zween Fälle ſind ausgenommen, wenn entweder drey Seiten oder drey Winkel gegeben ſind, welche Fälle wir beſonders betrachten werden.

§. 816. Zuſatz. Wenn in einem ſchiefwink-lichten Dreyeck einer Seite ein Quadrant iſt, ſo läßt er ſich, wenn man die andere Seite in einen Quadranten verlängert, ohne weitere Reduction, wie die rechtwinklichte Dreyecke auflöſen.

§. 817.

§. 817. Lehrſatz. Es ſeyen gegeben *Fig.* 99. 100. die Winkel B, D, und die Seite DP, man kann daraus die Seite BP und die übrige Stücke finden.

Satz. *Fig.* 99. 100.

ſin. B : ſin. D = ſin. DP : ſin. BP.

Bew.

Man fälle den Perpendikel PA auf BD herab, ſo iſt

r : ſin. B = ſin. BP : ſin. PA } §. 802. nr. I.
r : ſin. D = ſin. DP : ſin. PA }

ſin. B : ſin. D = ſin. DP : ſin. BP nach §. 278.

§. 818. Lehrſ. t. B : t. D = ſin. DA : ſin. BA.

Bew.

r : tang. B = ſin. BA : t. PA } §. 802. nr. II.
r : tang. D = ſin. DA : t. PA. }

tang. B : tang. D = ſin. DA : ſin. BA. §. 278.

§. 819. Lehrſ. cos. BP : cos BA = cos. DP : cos. DA.

Bew.

cos. PA : r = cos. BP : cos. BA } §. 802. nr. III.
cos. PA : r = cos. DP : cos. DA. }

cos. BP : cos. BA = cos. DP : cos. DA.

§. 820. Lehrſ. ſin. BPA : cos. B = ſin. DPA : cos. PDA.

Bew.

r : cos. PA = ſin. BPA : cos. B } §. 802. nr. IV.
r : cos. PA = ſin. DPA : cos. PDA }

ſin. BPA : cos. B = ſin. DPA : cos. PDA.

§. 821. Lehrſ. cos. BPA : cos. DPA = tang. DP : tang. BP.

Bew.

r : tang. BP = cos. BPA : t. PA } §. 802. nr. 2.
r : teng. DP = cos. DPA : t. PA }

tang. DP : t. BP = cos BPA : cos. DPA §. 278.
cos. BPA : cos. DPA = t. DP : t. BP.

§. 822. Zuſatz. Wie man nun bey den rechtwinklichten Dreyecken gröſtentheils finden kann, welche Winkel und Seiten gröſſer oder kleiner als 90°, das iſt, ſtumpf oder ſpitzig ſeyen, ſo kann man es auch hier durch die Reduction finden; die ausführliche Beſtimmung der Fälle ſelbſt aber würde hier zu weitläuftig ſeyn. Uebrigens merken wir noch an, daß die Coſinus und Tangenten von den innern Winkeln der reducirten rechtwinklichten Dreyecke zu verſtehen ſeyen; ſonſt würde man aus den Zeichen nichts beſtimmtes ſchlieſſen können.

Betrachtung und Auflöſung der ſchiefen Dreyecke, in welchen drey Seiten oder drey Winkel gegeben ſind.

§. 823. Lehrſ. Wenn man *Fig.* 98. in dem ſphäriſchen ſchiefen Dreyeck, wo die Seiten PB, PA, AB gegeben ſind, die Figur nach §. 783. zurichtet, die Sinus PQ, PN ziehet, auf die Ebene KAB einen Perpendikel PM herab läßt, von M nach N die Linie MN ziehet, ſo iſt MN auf KB den Durchſchnitt der beeden Ebenen KPB, KBA perpendicular, wie aus §. 598. deutlich erhellet; auch aus

Char-

Chartenpapier, wie wir im angeführten Lehrſatz zeigten, leicht gewieſen werden kann; ziehet man von N nach Q die Linie NQ, ſo kann man in dem ebenen Dreyeck NQK die Seite NQ aus dem Winkel NKQ und beeden Seiten NK, KQ nach §. 755. finden, ſie iſt nemlich $\surd(KN^2 + KQ^2 + 2KN \times KQ.\cos.NKQ)$; welches aus der §. 755. gefundenen Formel $\surd(a^2 + b^2 - 2ab\pi)$ klar genug iſt, wenn man für die Buchſtaben die hier vorkommende Seiten ſetzet. Ziehet man noch die Linie QM, ſo wird ſich auch dieſe finden laſſen, denn es wird der Winkel PMQ ein Rechter ſeyn, weil PM auf die ganze Ebene KAB perpendicular ſtehet, folglich alle gerade Linien durch M in dieſer Ebene mit PM rechte Winkel machen. §. 598. Demnach iſt PQ im rechtwinklichten Dreyeck PMQ die Hypothenuſe, und $PQ^2 = PM^2 + QM^2$, folglich $QM^2 = PQ^2 - PM^2$. Dieſes vorausgeſezt, wird ſich der Winkel B oder PBA durch Rechnung finden laſſen, wenn man, um kürzer ſich ausdrucken zu können, den ſchon gemeldten Linien ihre Namen von kleinern Buchſtaben gibt. Es ſeye

der Radius KP = 1.
der ſin. PB = PN = m.
cos. PB = KN = μ.
ſin. PA = PQ = p.
cos. PA = KQ = π.

Endlich heiſſen die in der Figur durch Linien nicht ausgedruckte Sinus und Coſ. von AB, f und φ, nemlich ſin. NKQ = ſin. AB = f; cos AB = φ: ſo iſt nach dem ſchon genannten Lehrſatz §. 755. wenn man für die Linien Buchſtaben ſezt:

nr. I.

nr. I. $NQ = \sqrt{(\mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\varphi.)}$

oder $NQ^2 = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\varphi.$

weil ferner:

$QN:KQ = \sin.NKQ : \sin.KNQ$ §. 726.

$\sin.NKQ = \sin.AB.$

$QN:KQ = \sin AB : \sin.KNQ$ in Buchſt.

$QN : \pi = f : \frac{\pi f}{QN} = \sin.KNQ.$

aber $\sin.KNQ = \cos.MNQ$; weil $MNK = 90°$ 598

folgl. $\frac{\pi f}{QN} = \cos.MNQ$ folgl. iſt im ΔQNM

aus den Seiten QN, NM, und dem cos. MNQ

nach §. 726. wie nr. I. NQ^2, alſo auch hier

nr. II. $QM^2 = QN^2 + NM^2 - \frac{2\pi f.NM.QN}{QN}$ oder aufgehoben mit QN

$QM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f.NM$

Es iſt ferner, wenn ſin. B, oder ſin. PBA = X

und der ſin. tot. = 1 geſezt wird,

$PN : 1 = PM : \sin.PNM$

$PNM = PBA = B$ §. 784.

$PN : 1 = PM : \sin.B.$ das iſt in Buchſtaben

$m : 1 = PM : \sin.B = \frac{PM}{m}$ alſo

$\sin.B = \frac{PM}{m}$

$.m$

$m.\sin B = PM$

$\sin.B = x$ nach der Vorausſezung

nr. III. $mx = PM.$ Da nun ferner

$NM^2 = PN^2 - PM^2$ ſo iſt in Buchſtaben und Ausdruck n. III.

$NM^2 = m^2 - m^2x^2 = m^2(1 - x^2)$ folgl.

$NM = m\sqrt{(1 - x^2)}$

weil ferner

$QM^2 = PQ^2 - PM^2$ weil $PMQ = 90°$;

$QM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f . NM$ nach nr. II ſo iſt

$PQ^2 - PM^2 = QN^2 + NM^2 - 2\pi f . NM$.

nr. IV. d. i. in Buchſt. u. Ausdr. nach nr. III.

$p^2 - m^2x^2 = QN^2 + m^2 - m^2x^2 - 2\pi fm\sqrt{(1-x^2)}$

$m^2x^2 = m^2x^2$ add.

$p^2 = QN^2 + m^2 - 2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)}$

$2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)} = 2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)}$ add.

$2\pi fm\sqrt{(1 - x^2)} + p^2 = QN^2 + m^2$

$p^2 = p^2$ ſubtr.

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} = QN^2 + m^2 - p^2$

$QN^2 = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\varphi$ nr. I. ſubſtit.

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} = \mu\mu + \pi\pi - 2\pi\mu\varphi + m^2 - p^2$

$m^2 - p^2 + \mu\mu = m^2 - p^2 + \mu\mu$ ſubtr.

$2\pi fm\sqrt{(1-x^2)} - (m^2 - p^2 + \mu\mu) = \pi\pi - 2\pi\mu\varphi$.

$:\pi$

$2fm\sqrt{(1-x^2)} - \left(\frac{m^2 - p^2 + \mu\mu}{\pi}\right) = \pi - 2\mu\varphi$.

$:2fm$

$\sqrt{(1 - x^2)} - \left(\frac{m^2 - p^2 + \mu\mu}{2\pi fm}\right) = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2fm}$

folgl. herübergeſezt

$\sqrt{(1-x^2)}$

$$\surd(1-x^2) = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2fm} + \left(\frac{m^2 - p^2 + \mu\mu}{2\pi fm}\right)$$ aber

$$m^2 + \mu^2 = 1$$ nach §. 700.

folgl. ſubſtit.

nr. V. $$\surd(1-x^2) = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2fm} + \frac{1 - p^2}{2\pi fm}$$

$$1-p^2 = \pi^2$$ §. 700. folgl.

$$\surd(1-x^2) = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2fm} + \frac{\pi^2}{2\pi fm}$$ und π gegen π aufgehoben,

$$\surd(1-x^2) = \frac{\pi - 2\mu\varphi}{2fm} + \frac{\pi}{2fm}$$ u. wenn man wirkl. add. $\pi + \pi$, weil die Benennung einerley

$$\surd(1-x^2) = \frac{2\pi - 2\mu\varphi}{2fm}$$ und durch 2 aufgehoben

$$\surd(1-x^2) = \frac{\pi - \mu\varphi}{fm}.$$

Es ſey ferner $y = \sin. \frac{1}{2}B$, oder $\sin. \frac{1}{2}PBA$

Es iſt aber wenn $r = 1$,

$$y^2 = \frac{1 - \cos. x}{2}$$ nach §. 735. aber

$$\cos. x = \surd(1 - x^2)$$ nach §. 700.

folgl. $$y^2 = \frac{1 - \surd(1 - x^2)}{2}$$

nr. VI. $$y^2 = \frac{1 - \surd(1 - x^2)}{2}$$

$$\surd 1 - x^2 = \frac{\pi - \mu\varphi}{fm}$$ nach nr. V.

$$y^2 = \frac{1}{2} - \frac{(\pi - \mu\varphi)}{fm} = \frac{fm - (\pi - \mu\varphi)}{2fm}$$ das iſt

$$y^2 = \frac{fm - \pi + \mu\varphi}{2fm} \quad \text{aber}$$

$$fm + \mu\varphi = \cos.\ (BP - AB) \ \text{§. 748.}$$

$$y^2 = \frac{\cos.\ (BP - AB) - \pi}{2fm}$$

$$\pi = \cos.\ AP$$

$$y^2 = \frac{\cos.\ (BP - AB) - \cos.\ AP}{2fm} \quad \text{aber nach §. 737.}$$

$$\frac{\cos.\ (BP - AB) - \cos.\ AP}{2} =$$

$$(\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2} AP - \text{ſ.}\ \tfrac{1}{2}(BP - AB)(\text{ſ.}\ \tfrac{1}{2} AP + \text{ſ}\ \tfrac{1}{2}\ BP - AB)$$

$$\text{alſo}\ y^2 = \frac{(\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2} AP - \text{ſ.}\ \tfrac{1}{2}(BP - AB)(\text{ſ.}\ \tfrac{1}{2} AP + (BP - AB)}{fm}$$

$$\text{aber}\quad fm = \text{ſin.}\ BP.\ \text{ſin.}\ BA)$$

$$\text{fgl.}\ y^2 = \frac{(\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2} AP - \text{ſ.}\ \tfrac{1}{2}(BP - AB)(\text{ſ.}\ \tfrac{1}{2} AP + \text{ſ.}\ \tfrac{1}{2}(BP - AB.}{\text{ſin.}\ BP.\ \text{ſin.}\ BA.}$$

nr. VII.

Woraus die Proportion folget, wenn man den Radium, den man eins geſezt, nach ſeiner Dimenſion ergánzet:

$$\text{ſin.}\ BP.\ \text{ſin.}\ BA : r^2 = \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}[AP + (BP - AD)].\ \text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}[AP - (BP - AB)] : (\text{ſin}\ \tfrac{1}{2}B)^2$$

weil $y^2 = (\text{ſin.}\ \tfrac{1}{2}B)^2$, woraus B gefunden wird.

§. 824. Anm. Wir haben dieſe Rechnung, die man für Kenner ungleich kürzer vortragen kann, mit Fleiß weitläuftig, und von Satz zu Satz ausgeſuchet, weil Anfänger neben der Uebung zugleich eine Gelegenheit darinn bekommen, die ganze trigonometrie dabey auf einmal zu wiederholen.

§. 825. Zuſatz. Iſt der Ausdruck $\pi - \mu\varphi$ negativ, ſo iſt der Winkel B gróſſer als 90°, und kleiner, wenn $\pi - \mu\varphi$ eine poſitive Gróſſe in der Rechnung wird.

§. 826.

§. 826. Zuſatz. Wenn in einem ſchiefen ſphäriſchen Dreyeck die drey Winkel gegeben ſind, ſo kann man es in ein anders verwandeln, in welchem die Seiten den Winkeln des erſten in einerley Ordnung und Lage correſpondiren und gleich ſind; wie man aus der Natur der ſphäriſchen Dreyecke begreift, ohne daß man die weitläuftige Rechnung nöthig hätte. Durch dieſe Verwandlung alſo hat man den vorigen Lehrſatz wieder; da man die Seiten, die nun nach der Verwandlung Winkel worden ſind, nach der vorigen Verhältniß findet.

§. 827. Anm. Diß iſt das wichtigſte, das von der ſphäriſchen Trigonometrie zu wiſſen nöthig iſt. Auſſer dem Baron Neper hat der Baron Wolf eine eigene Regel erfunden, welche noch allgemeiner iſt als die Neperiſche, weil ſie ſich nicht nur auf rechtwinklichte, ſondern auch auf ſchiefwinklichte Dreyecke erſtreckt. Er hat ſie in ſeinen lateiniſchen Elem. Trig. ſphær. §. 100 108. 134. demonſtrirt, und auch der Vorrede zu ſeinen logarithmiſchen Tafeln einverleibt: ſie iſt folgende für rechtwinklichte Dreyecke; wenn man ſie logarithmiſch ausdruckt: Sinus totus cum coſinu partis mediæ æquatur ſinibus ſejunctarum & cotangentibus conjunctarum. Wo man wiſſen muß, was der mittlere und was die beede abgeſonderte Theile ſind. Man betrachtet nemlich im rechtwinklichten Dreyeck nur fünf Stücke, der rechte Winkel wird gar nicht geachtet; die fünf Stücke ſind die drey Seiten und zween Winkel auſſer dem rechten. Nun ſind allemal zwey Stücke gegeben, das dritte ſucht man; von welchen dreyen eines in der Mitte, die übrige zwey entweder unmittelbar daran liegend, oder durch zwey andere abgeſondert ſind. In einem Fall heiſſen dieſe zween Theile partes conjunctæ, im andern ſejunctæ. z. E. *Fig.* 97. Es iſt gegeben BP, BA, man ſucht B, ſo iſt B pars media; BP, BA ſind conjunctæ; P und PA ſind ſejunctæ Der rechte Winkel bey A wird für nichts geachtet. Die Regel für die ſchiefe Dreyecke, nachdem man den Perpendikel gefällt hat, iſt folgende: Pars media in primo triangulo cum extrema in ſecundo æqualis eſt parti mediæ in ſecundo cum extrema in primo. z. E. Im Dreyeck BPO *Fig.* 100. iſt gegeben BP, BD, und der Winkel B; ſo ſucht man nach gefälltem Perpendikel PA die Seite BA, und daraus AD; Man nimmt PA im Perpendikel als extremam partem in beeden Drey-

ecken an, ſo ſind B A und AD mediæ, und B und D conjunctæ extremæ. Allein aus dieſer Regel muß man doch für jeden Fall die beſondere Proportion erſt herſuchen; dahero andere für beſſer halten, eine kurze Tafel aller Fälle bey Handen zu haben, weil man doch bey ſolchen Rechnungen die Sinus-Tafeln haben muß, und es alſo nicht darauf ankommt, ob man eine Tabell weiter oder weniger hat. Man kann ſie aus §. 802. leicht ordnen.

Drittes Hauptſtück,
Von der practiſchen Geometrie.

§. 828.

Erklärung.

Die practiſche Geometrie iſt die Anwendung der bisher vorgetragenen ſowohl geometriſchen als trigonometriſchen Lehrſätze auf die Ausmeſſung der wirklichen Ausdehnung, wie ſie vornemlich auf der Oberfläche des Erdbodens vorhanden iſt, durch Beyhülfe gewiſſer dazu dienlicher Inſtrumente.

§. 829. Zuſatz. Sie unterſcheidet ſich alſo von der Euclideiſchen Geometrie dadurch, daß man ſo viel Inſtrumente hier gebrauchen darf, als man will, da hingegen Euclides nicht mehr als den Zirkel und das Lineal zu den geometriſchen Auflöſungen und Beweiſen erlaubt hat.

§. 830. Zuſatz. Eigentlich iſt die practiſche Geometrie eine Anwendung auf alles, was ſich ausmeſſen läßt; oder die ganze angewandte Mathematik. Man könnte ſie auch in die himmliſche oder oberirrdiſche, in die irrdiſche, und in die unterirrdiſche eintheilen. Die erſte heißt die Aſtronomie, und iſt eine eigene Wiſſenſchaft der angewandten Mathematik; die zweyte, in ſofern ſie ſich blos auf

die Oberfläche des Erdbodens bezieht, heißt die Feldmeßkunſt; und die dritte die Markſcheidekunſt (Lat. geometria ſubterranea) welche leztere man billig und mit eben ſo groſſem Recht, als die angewandte Mathematik, vortragen ſollte. Wir werden etwas davon ſagen, wenn wir zuvor die Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft erzehlt haben werden.

Geſchichte der practiſchen Geometrie.

§. 831. Wir haben in der Geſchichte des erſten Hauptſtücks ſchon gezeigt, daß die practiſche, aber anfänglich ſehr ungekünſtelte Geometrie, der theoretiſchen den Urſprung gegeben habe; es wird alſo vergönnt, das daſelbſt geſagte, in Ruckſicht auf die älteſte Zeiten, vorauszuſetzen, und nur dasjenige, was die Geſchichte der hiezu dienlichen Inſtrumente betrift, hier zu ergänzen.

§. 832 Die vornehmſte Inſtrumente auſſer dem Cirkel und Lineal, ſind der Transporteur, das Aſtrolabium, das Parallellineal, der Winkelhacken, der verjüngte Maasſtab, das Meßtiſchlein, der geradelinigte Transporteur, der Proportionalzirkel, nebſt einigen andern Gattungen von Zirkeln, und die zur unterirrdiſchen Geometrie gehörige Inſtrumente.

§. 833. Transporteur, Aſtrolabium und Winkelhacken ſind ſehr alte Inſtrumente, wie dann das Ptolemäiſche Aſtrolabium ſchon berühmt war: welches beſonders zu Ausmeſſung des Himmels beſtimmt war. Hingegen ſind die folgende Inſtrumente ungleich neuer. Die älteſte Nachricht vom verjüngten Maasſtab findet man bey dem Tycho von Brahe, welcher L. I. Epiſtolarum Aſtronom. p. 60. ſchreibt, er habe die Verfertigung dieſes Maasſtabs zu Leipzig, wo er ſtudirt, im 17 Jahr ſeines Alters (1553) von dem damaligen Prof. der Mathematik Joh. Hommeln geler-

gelernet; wie ſolches auch Hr Prof. Käſtner anmerkt mathem. Anfangsgr. T. I. p. 232. Die Erfindung des Meßtiſchleins eignet Daniel Schwenter dem Prätorius zu, der vor ihm Prof. der Mathematik zu Altdorf war. in Geom. Pract. T. III. p. 637. Der geradelinigte Transporteur hat ſein Daſeyn den trigonometriſchen Erfindungen zu danken; Herr Prof. Eberhard zu Halle hat Verbeſſerungen dazu angegeben, in der Beſchreibung einer neuen Meßtafel. 1753. Der Proportional-Cirkel iſt eine Erfindung von dem ſchon genannten Joſt Byrge, der bey dem Landgrafen Wilhelm zu Heſſen-Caſſel Mechanicus war. Levin. Hulſius gibt zuerſt davon Nachricht, und eignet dem gedachten Byrge dieſe Erfindung zu, in dem Tractat von mechaniſchen Inſtrumenten 1603. Byrge hat den Proportional-Cirkel in Geſtalt eines gewöhnlichen Cirkels zuerſt gemacht, dahero er auch dieſen Nahmen bekam; einige Jahr hernach hat Galiläus ihn verbeſſert, und anſtatt der Cirkelfüſſe zwey Linealien ſubſtituirt, und doch die Benennung des Proportional-Cirkels beybehalten; daher kam es, daß einige die Erfindung dieſes nützlichen Inſtruments dem Galiläus zuſchrieben; aber der erſte Erfinder war der ſchon gemeldte Byrge, wie wir erwieſen; Galiläus hingegen hat die obige Verbeſſerungen angebracht, mit welchen man noch jezo die Proportional Cirkel verfertiget; ſie dienen faſt alle arithmetiſche und geometriſche Aufgaben mechaniſch aufzulöſen. Auſſer dieſen Cirkeln hat man auch noch dreyfüßige Cirkel, Taſter-Cirkel, wodurch man den Diameter einer Kugel abmißt; u.ſ.w. von allen dieſen Inſtrumenten wird ausführlich gehandelt in Leupolds Theatro Arithmet. Geometrico.

§. 834. Wir wollen noch was von der unterirrdiſchen Geometrie oder Markſcheidekunſt ſagen. Dieſe Wiſſenſchaft blieb bis aufs Jahr 1574. ein Geheimniß. In welchem Jahr Eraßmus Rheinbold, ein Doctor der Arzneywiſſenſchaft zu Saalfeld, einen kurzen und gründlichen Unterricht vom Markſcheiden herausgab, damit, wie er in der Vorrede ſchreibt, hundert und noch mehr Gewerke nicht einem einzigen Markſcheider allein ohne einigen Beweis, hinfüro glauben, ſondern auch vor ſich ſelbſt die Wahrheit erfahren und die Probe anſtellen können, ob die Gänge und Klüften richtig entſcheiden ſeyen. Dieſes Werk wurde zu Frankfurt im Jahr 1616. wieder aufgelegt; blieb aber doch ſo unbekannt, daß im Jahr 1686 Nic. Voigtel bey der Ausgabe ſeiner Markſcheidekunſt vermeynte, er ſey der erſte, der hievon was geſchrieben habe; welches auch andere Mathematikverſtändige damals glaubten, weil die Rheinboldiſche Bemühungen faſt ganz in die Vergeſſenheit gekommen; inzwiſchen iſt das Voigteliſche Werk dem Rheinboldiſchen billig vorzuziehen. Im gegenwärtigen Jahrhundert hat Hr Prof. Weidler zu Wittenberg 1726 Inſtitutiones Geometriæ ſubterraneæ in 4to nach mathema-

tiſcher Lehrart herausgegeben; womit auch Beyers Markſcheidekunſt verglichen werden kann. Vor wenig Jahren hat Herr Rector Maler zu Carlsruh dieſe Lehre, ſo viel davon in ein Handbuch gehört, in ſeiner Einleitung zur practiſchen Geometrie vorgetragen. Wir werden am Beſchluß was davon melden.

§. 835. Anm. Herr von Segner lieſſe die practiſche Geometrie in ſeinen Anfangsgründen ganz weg, weil man, um ſie richtig zu verſtehen, die Mechanik, Hydroſtatik, Optik, u. ſ. w. vorausſetzen müſſe; Herr Prof. Käſtner hingegen trägt ſie mitten in der Elementargeometrie vor; welches zwar, wie er ſelbſt ſchreibt, wider die mathematiſche Methode geſchiehet; allein um die Ungedult der Anfänger, welche ſogleich nach der Anwendung fragen, zu ſtillen, und ihnen zu zeigen, daß ſie noch mehr Theorie lernen müſſen, trug er ſie ſo bald vor. Ich gehe den mittlern Weg; und wollte ſie weder ganz weglaſſen noch zu bald lehren; darum ſteht ſie zwiſchen der Trigonometrie und höhern Geometrie; unerachtet ſie übrigens noch ſpäter ſtehen ſollte, ſo muß man den Lernenden hier was zu Gefallen thun; damit, wenn ſie fragen, wozu diß oder jenes nutz ſeye, einigermaſſen geantwortet werde.

Die Vergleichung der vornehmſten Maaße.

§. 836. Willk. Satz. Wann man das geometriſche Maas mit andern vergleichen will, ſo nimmt man den Pariſer Schuh (Pied du Roi) zum allgemeinen Maasſtab an, weil der Pariſer Fuß unter den ſonſt gewöhnlichen und bekannten der gröſte iſt.

§ 837. Zuſatz. Wenn man den Pariſer Fuß in 12″ und dieſe in 12 Linien, und noch jede Linie in 10 Theile theilet, ſo hält der Pariſer Fuß 1 . 12 . 12 . 10, das iſt 1440 ſolche Theile; und dieſe Theilung iſt wirklich eingeführt.

§. 838. Anm. In der practiſchen Geometrie hat man vornemlich den Pariſer, den Rheinländiſchen und den Londner Fuß zu bemerken; den erſten als den gröſten und allgemeinen Maasſtab; den zweyten, weil er nicht nur in ganz Deutſchland, ſondern auch in Dännemark eingeführt iſt; den Londner, weil er in mathematiſchen, beſonders aſtronomiſchen Rechnungen von engliſchen Scribenten gebraucht, wegen welcher Urſache man auch den

den Pariſer noch auſſer den ſchon angeführten Gründen zu wiſſen nöthig hat. Wir wollen noch überdas auch den Würtembergiſchen oder Stuttgartiſchen im ganzen Herzogthum eingeführten Schuh dazu in Betrachtung ziehen.

§. 839. **Lehrſatz.** Eine jede gegebene Länge läßt ſich in blos geometriſchen Längenmaaßen ausdrucken, in welchen zehen Linien einen Zoll, zehen Zoll einen Schuh, zehen Schuh eine Ruthe machen. Dann wenn x das Decimalmaas und y das Duodecimalmaas bedeutet, ſo iſt $10x = 12y$, oder zehen Decimalzoll machen zwölf Duodecimalzoll. Diß vorausgeſezt, gibt es folgende Rechnung:

$$\frac{10x = 12y}{\quad} :$$

$x = \frac{12}{10}y = 1, 2 \ldots y.$ nach den Decimal-
oder umgekehrt: rechn. §. 80. 81.

$$\frac{12y = 12x}{\quad} : 12$$

$y = \frac{10}{12}x = \frac{5}{6}x = 0, 8333 \ldots$ nach §. cit.

§. 840. **Zuſatz.** Ein Duodecimalzoll gibt alſo $\frac{5}{6}$ Decimalzoll; folglich kann man nach der Regel Detri jedes gegebene Maas reduciren; z. E. 7 Duodecimalzoll ſind $7 \cdot \frac{5}{6}$ Decimalzoll $= \frac{35}{6} = 5, 833 \ldots$ §. 81.

§. 841. **Erklär.** Nach den willkührlich angenommenen Längen der Schuhe findet man, daß, wenn der Pariſer 1440 gleiche Theile in ſich halte,

der Rheinländiſche 1391
der Londniſche 1350
der Stuttgartiſche 1268
der Nürnberger 1347. ſolcher Theile halte.

§. 842. **Lehrſatz.** Aus der gegebenen Verhältniß der Schuhe läßt ſich eine in Schuhen oder Zollen gegebene Länge auf eine andere reduciren von andern

andern gegebenen Schuhen oder Zollen. Dann es bedeute p die Pariſiſche, r Rheinländiſche, w Würtemb. Schuh, ſo iſt, wenn eine im Pariſer Maas gegebene Länge n heißt, und ſolche Länge im geſuchten Rheinländiſchen x genannt wird, $np = xr$, folglich $x = \frac{np}{r}$, das iſt logarithmiſch $lx = ln + l(\frac{p}{r})$.

§ 843. Anm Weil die meiſte Reductionen auf der Verwandlung des Pariſer Fuſſes in den Rheinländiſchen beruhen, ſo iſt es gut, um nicht immer zu viel ſchreiben zu dörfen, den $l.(\frac{p}{r})$ auf einmal zu ſuchen, er iſt nemlich $lp - lr = l. 14400 - l. 13913 = 0,0149418$.

§. 844. Anm. Weil der Pariſer Fuß gröſſer als der Rheinländiſche iſt, und ſechs Pariſer Fuß eine Toiſe machen, ſo machen 2 Toiſen auch mehr als 12′ Rheinl. oder eine Rheinländiſche Ruthe; und 180° Toiſen ſind um vierthalb Ruthen gröſſer als 90 Rheinl. Ruthen. Der Beweis davon iſt folgender:

$$6p = xr \quad §. 842.$$
$$: r$$
$$6.\frac{p}{r} = x. \quad \text{folglich}$$
$$l.6 + l.\left(\frac{p}{r}\right) = l.x. \quad \text{Nun iſt nach den Tabellen}$$
$$l.6 = 0,7781512$$
$$l.\left(\frac{p}{r}\right) 0,0149418$$
$$lx = 0,7930930$$

welchem in den Tafeln 6,2050 am nächſten kommt; wo man bey dem Aufſchlagen die Regel, die §. 775. vorkommt, zu bemerken hat; man ſchlägt nemlich unter den Characteriſtiken 1, 2, 3, u. ſ. w. den Logarithmen auf, bis man ihn für Decimalbrüche ſo genau findet als es ſeyn kann. Folglich ſind 6 Pariſer Schuh oder eine Toiſe um $\frac{205}{1000}$ Tauſendtheile eines Rheinl. Schuhes gröſſer als eine Rheinl. halbe Ruthe, oder 2 Toiſ. $= 2.6,205 = 12,410 = 12, \frac{41}{100}$ Rheinl. Schuh. Diß mit 90 multipl. gibt $12.90 + \frac{41.90}{100} = 90$ Rheinl. Ruthen $+ \frac{3690}{100} = \frac{396}{10} = 36' \frac{9}{10} = 3^0\ 9'$ Rheinl.

§. 845. Anm. Bey groſſen Rechnungen kommen alſo merkliche Fehler heraus, wenn man eine Toiſe für eine halbe Rheinl. Ruthe hält; z. E. in der Militar-Baukunſt; wo die franzöſiſche Ingenieur, mit Vauban, 180 Toiſen für die Seite des Polygons annehmen, und Sturm 2 Toiſen auf eine Rheinl. Ruthe rechnet, in ſ. veritable Vauban, p. 101. folglich die Polygonſeite um 3 Ruthen zu klein macht.

§. 846. Zuſatz. Man kann nicht nur zwey, ſondern verſchiedene Maaße nach der Kettenregel mit einander vergleichen. z. E. Man ſuche die Verhältniß des Würtemb. Fuſſes zum Zelliſchen, wenn der Zeller zum Rheinl. iſt wie 48 : 51.

$$z : r = 48 : 51.$$
$$r : p = 1391 ; 1440.$$
$$p : w = 1440 : 1268.$$

$$z : w = 48 . 1391 . 1440 : 51 . 1440 : 1268.$$

oder kürzer $= 48 . 1391 : 51 . 1268.$

weil man beederſeits mit 1448 dividiren kann, folglich auch oben $r : w = 1391 : 1268$ ſetzen darf. Wenn man die Logarithmen hier wieder braucht, ſo wird die Rechnung, beſonders bey mehrern Factoribus, kürzer.

§. 847. Anm. Weitere Vergleichungen, beſonders in Ruckſicht auf das Würtemb. Maas nach allen Gegenſtänden, die eines Maaßes fähig ſind, findet man in dem Anhang zum kurzen doch gründl. Bericht vom Feldbau 1763. nr. 5. unter dem Titel: Vergleichung des Würtembergiſchen Maaßes und Gewichtes mit andern. S. 52. Von welchem Aufſatz Herr Prof. Sprenger in dem Herzogl. Würtemb. Cloſter Maulbronn der Verfaſſer iſt.

Die Meſſung und Verjüngung der Linien und Figuren.

§. 848. Erklär. Auf dem Felde bedient man ſich der Stäbe oder Pfähle, welche in der gegebenen

Weite

Weite perpendicular abgeſteckt, und auf dem Felde eben das ſind, was auf dem Papier die Punkte, und die Meßketten oder Schnüre, welche von einem Stab zum andern reichen; die Schnüre aber müſſen wohl zubereitet werden, damit ſie durch die Verſchiedenheit der Witterung keine Aenderung ihrer Länge leyden; weil aber dieſes nicht wohl verhütet werden kann, ſo bedient man ſich der Meßketten lieber. Einen Winkel auf dem Felde zu meſſen, hat man das Aſtrolabium oder Scheibeninſtrument, das mit einem Fuß verſehen iſt, nöthig. Die Inſtrumente ſelbſt laſſen ſich beſſer zeigen als weitläuftig beſchreiben, welches um ſo weniger nöthig iſt, als ſie bekannt genug ſind. Das Meßtiſchlein iſt ein viereckigt Brett, darüber weiß Papier geſpannt iſt, es ſteht auf einem beweglichen Fuß, und kann mit Diopteren verſehen werden.

§. 849. Lehrſatz. Eine Weite, das iſt, eine Länge auf dem Felde, läßt ſich meſſen, 1) wenn man von einem Endpunkt zum andern gehen kann, nach §. 408. 2) wenn man zu beeden Endpunkten von einem dritten Stand kommen kann, nach §. 425. 3) wenn man nur zu einem Endpunkt nicht aber zum andern kommen kann, nach §. 527. 4) wenn man die Endpunkte nur ſiehet, aber zu keinem kommen kann, nach §. 425. 527.

§. 850. Erläuter. Wir wollen die Fälle kürzlich erläutern.

I. Fall. Wenn man von einem Endpunkt zum andern gerade meſſen kann, ſo iſt es natürlich, daß man die Meßſtange nur ſo oft anſchlagen darf, bis man den andern Punkt erreicht; folglich läßt ſich die Weite geometriſch meſſen.

II. Fall. Wenn man zwar nicht von einem Endpunkt zum andern gerade zu meſſen, aber doch von einem dritten Stand, wie

wie C *Fig.* 19. zu beeden Endpunkten A und D kommen kann Dann in dieſem Fall, wenn AD die geſuchte Linie, darf man nur CA, und CD meſſen, und jene Weite nach CB, dieſe nach CE in gerader Linie mit AC und DC zurücktragen, ſo iſt EB = AD; nach §. 425. Sollte eine Hinderniß im Felde ſeyn, daß man CE nicht ſo weit zurücktragen könnte, ſo darf man die Helfte oder den dritten Theil u. ſ. w. beederſeits zurücktragen, da dann die EB der ſovielte Theil von AD ſeyn wird als BC von CD, nach §. 527.

III. Fall. Wenn man nur zu einem Punkt kommen kann, ſo mißt man den Winkel, wo man an den Endpunkt kommen kann; z. E. *Fig.* 60. den Winkel CAB, wenn man vom Standpunkt C nach A kommen kann, wie vorausgeſezt wird, und macht in einer beliebigen Weite von C, z. E. in der Weite CD, den Winkel CDE = CAB; ſo iſt CD : DE = CA : AB; alſo läßt ſich AB finden, weil CD, DE, CA gegeben ſind, oder ſich unmittelbar meſſen laſſen. Dieſes iſt unter verſchiedenen andern Methoden die zuverläſigſte, weil man den Standpunkt nicht ändern darf.

IV. Fall. Wenn man zu keinem Endpunkt kommen, ſondern ſie nur ſehen kann, ſo könnte man *Fig.* 19. die Linie AC nach dem III. Fall, und CD nach eben dem III. Fall ſuchen, aus dieſen beeden aber läßt nach dem II. Fall die geſuchte AD ſich finden. Aber dieſes Geſchäfte iſt zu weitläuftig, daß es heutzutag diejenige Feldmeſſer, die nur ein wenig die Geometrie verſtehen, nicht gebrauchen. Wir wollen daher dieſe Aufgab nach verſchiedenen Weiſen kürzer und mit mehrerer Genauigkeit aufzulöſen ſuchen.

§. 851. Lehrſatz. Eine Weite, zu deren keinem Endpunkten man kommen kann, läßt ſich aus einem einigen Stand durch das Meßtiſchlein, ohne daß er dörfte verrückt werden, finden.

Beweis. Es ſey *Fig.* 80. β. die Weite AE zu meſſen, die man nur ſiehet, ohne daß man zu A noch E kommen könnte. Man ſetze das Meßtiſchlein Baed in B, nehme BD zur Standlinie, die man meſſen kann, und ſuche zuerſt BA, welches geſchiehet, wenn man in C und D Stäbe in gerader Linie mit A einſchlägt, ſo daß D den Stab C, und C den Punkt A decket; man ziehe auf dem Meßtiſchlein von B gegen A eine unbeſtimmte Linie, z. E. Ba, und gegen C und D die Linien Bc, Bd, ſo iſt

$\triangle BCD \backsim \triangle Bcd$ §. 526. folglich

der Winkel $Bcd = BCD$ und dahero §. 532.

den

der Winkel Bca = BCA. weil ferner
der Winkel cBa = CBA ſo iſt §. 532.

△Bac ∽ △BAC. und dahero
bc : ba = BC : BA. alſo BA gefunden.

Ferner ſuche man mit unverrücktem Meßtiſchlein aus eben dem Punkt die Weite AE. Zu welchem Ende man nur zwiſchen die Punkte E und D einen Stab F in gerader Linie einſtecken muß, daß D den Stab F, und F den unzugänglichen Punkt E decket; hernach zieht man von B gegen F die Linie Bf ſo, daß fd parallel FD wird, folglich auch fe parallel FE, und de parallel DE. So iſt Ba : ae = BA : AE. und alſo AE gefunden, aus eben dem Grunde der ähnlichen Dreyecke wie oben.

§. 852. Anm. Bey dieſer Auflöſung, welche mit dem Meßtiſchlein die bequemſte und richtigſte iſt, weil es nicht verrückt oder hin und hergetragen werden darf, muß man doch ſich lange auf dem Feld verweilen, bis die Stäbe B, D, D und C, D und F eingeſchlagen ſind, dahero, wo man nicht ſo viel Zeit hat, die trigonometriſche Auflöſung die kürzeſte iſt; davon wir jetzo reden werden.

§. 853. **Lehrſ.** Eine Weite, zu deren keinem Endpunkt man kommen kann, läßt ſich trigonometriſch durch eine einige Standlinie und etliche an der Standlinie gemeſſene Winkel finden.

Bew. I. Fall bey einer Höhe:

Es ſey *Fig.* 102. CD eine unzugängliche Höhe, man meſſe die Standlinie AB, die Winkel CAD und B; ſo iſt alles vorbey, und man kann die Rechnung zu Haus genau finden. Denn wenn CAD gemeſſen iſt, ſo iſt auch ſein Nebenwinkel CAB gegeben; iſt CAB gegeben, und B gemeſſen, ſo weiß man auch den Winkel ACB nach §. 468. Dann er iſt 180° — (CAB + B) folgl. trigonometriſch nach §. 757.

ſin. ACB : AB = ſin. B : CA. alſo hat man die Seite CA gefunden; und weil die Höhe perpendicular ſteht, ſo iſt bey D ein rechter Winkel; dahero man weiter ſagt:

ſin.

ſin. tot. AC : = ſin. CAD : CD. alſo weiß man die Höhe CD; alles diß wird durch Logarithmen berechnet, und ſo genau gefunden, als es nur immer durch Inſtrumente möglich.

II. Fall bey einer unzugänglichen Weite auf dem Felde. Man ſolle *Fig.* 103. die Weite DE meſſen, von welcher man durch einen Fluß abgeſchnitten wird. Man mißt die Standlinie von A nach B, wo in A, C, B Stäbe eingeſtecket ſind, man mißt ferner die Winkel DAC, DCA, ECB, EBC, ſo hat man auch die Winkel bey D und E nach §. 468. und den Winkel DCE §. 445.

folglich iſt ſin. ADC : AC = ſin. A : DC

und ſin. CEB : CB = ſin. B : CE.

Man hat alſo die Seiten DC und CE gefunden, und weil man den Winkel DCE weiß, ſo wird in der Auflöſung nach §. 757. zuerſt einer von den Winkeln DEC oder EDC geſucht; hernach aus dieſem Winkel die Seiten DE, weil

ſin. DEC : DC = ſin. DCE : DE. welches logarithmiſch ſich finden läßt.

§. 854. Anm. Wenn *Fig.* 103. DAC ein rechter Winkel werden kann, ſo iſt die Auflöſung noch leichter; weil es aber im Felde nicht allemal angeht, groſſe Linien zu ziehen, oder ſie da zu ziehen, wo man ſie am bequemſten rechnen kann, ſo haben wir die Auflöſung lieber allgemein machen wollen.

§. 855. Erklär. Man ſagt, die Linien werden verjüngt, wenn man das gröſſere Maas unter ein proportionirliches kleineres bringt; z. E. eine Weite von 90° im Felde, ſoll aufs Papier nach dem verjüngten Maasſtab gebracht werden; man nimmt einen Maasſtab an, auf welchem die Ruthe kaum einen Zoll beträgt, und die Schuhe, Zolle, Linien nach Proportion ebenfalls kleiner gemacht werden. Der verjüngte Maasſtab *Fig.* 106. *a.* läßt ſich nach den Proportionsregeln §. 527. f. leicht zeichnen und gebrauchen. Wie ſich dann auch jede Linie nach §. cit. proportionirlich einer andern gemäß theilen läßt.

Die Meſſung und Verjüngung der Flächen, oder das Aufnehmen einer Gegend.

§. 856. Lehrſatz. Eine Fläche, in welche man hineingehen kann, wird ausgemeſſen, wenn man nach ihrer Länge *Fig.* 101. die Linie AE, und wo Ecke ſind, die Parallellinien Bb, Cc, Ff, Gg, Hh, Ii u. ſ. w. ziehet; die Summe aller Trapezien nebſt den zwey Dreyecken ABb, und IEi, die man aus I1 und EC, Bb und A1 findet, wird der Inhalt der ganzen Fläche ſeyn. Diß iſt eine der leichteſten Manieren.

§. 857. Zuſatz. Eine Fläche, in die man hineingehen kann, wird auch ausgemeſſen, wenn man alle ihre Seiten und Diagonallinien mißt; in welchem Fall man, wie auch oben, kein anderes Werkzeug als Stäbe und Meßketten gebraucht; und man kann ſie hernach auch verjüngen, weil durch die Diagonalen Dreyecke entſtehen; wie *Fig.* 105. wo CA : AB = Ca :.ab; ferner CB : BD = Cb : bd u. ſ. w.

§. 858. Zuſatz. Kann man in die Fläche hineingehen, ſo wird ſie auch gemeſſen und verjüngt, wenn man nach Belieben in der Fläche einen Punkt wie C *Fig.* 104. annimmt, und die Linien CD, CE, CF, u. ſ. w. und hernach die Parallelen de, ef, fg u. ſ. w. in der Diſtanz, wie man die verjüngte Figur haben will, ziehet; ſo iſt abdefg die verjüngte Figur ABDEFG; dann CD : DE = Cd : de; CE : EF = Ce : ef; CF : FG = Cf : fg u. ſ. w.

§. 859.

§. 859. Zuſatz. Wenn man in die Fläche nicht hineinkommen, ſondern nur um ſie herumgehen kann, ſo mißt man alle Seiten und Winkel; aus welchen ſich die Figur beſtimmen und verjüngen läßt.

§. 860. Zuſatz. Wenn man in die Figur weder hineinkommen, noch um dieſelbe herumgehen kann, ſondern ſie und ihre Winkel nur aus zwey Ständen von ferne überſehen kann, ſo mißt man nach §. 851. die Seiten, als Weiten die man ſiehet, aber zu denen man nicht kommen kann, und ihre Lagen gegeneinander nach §. cit. da man dann die ganze Figur bekommt und ſie in Grund legen kann.

§. 861. Anm. Auf dieſe Art werden ganze Gegenden aufgenommen und in den Grund gelegt; man begreift aber von ſelbſt, daß man beſonders bey groſſen und mehrere Meilen breiten und langen Gegenden die optiſche Wiſſenſchaften, das Waſſerwägen, die geographiſche Linien, die in der mathematiſchen Geographie vorkommen, zugleich verſtehen müſſe, wenn es an der Genauigkeit, eine groſſe Gegend richtig aufzunehmen, nicht fehlen ſolle. Jedoch bey kleinern Gegenden, die kaum eine Meile betragen, hat man die hier genannte Wiſſenſchaften der angewandten Mathematik nicht ſo nöthig.

Etwas von der Markſcheidekunſt.

§. 862. Erklär. Die Markſcheidekunſt oder die unterirrdiſche Geometrie iſt die Wiſſenſchaft, die unter der Erden gemachte Gänge, die man Grubengebäude nennet, auszumeſſen und zu zeichnen, oder in den Riß zu bringen.

§. 863. Zuſatz. Wer alſo die Geometrie verſteht, der wird die Markſcheidekunſt bald lernen, wenn er nur die Sprache der Bergleute ſich bekannt macht, und mit denen zum unterirrdiſchen Meſſen

tauglichen Inſtrumenten, die in der Hauptſache von den übrigen Inſtrumenten der practiſchen Geometrie nicht viel unterſchieden ſind, umzugehen weiß.

§ 864. Anm. Wir wollen die Bergmannsſprache kürzlich erklären, damit man hernach von dem geſagten deſto beſſer überzeugt werde. Das Längenmaas heißt ein Lachter, das gemeiniglich 6 Schuh hält, wie ein Klafter. Ein Schuh hält 10 Zoll, und ein Zoll 10 Gran; folglich läßt ſich ein Lachter in Gran geben. Im Flächenmaas hat man die Namen Fundgrube, Wehr, Lehn; eine Fundgrube hält drey Wehr, ein Wehr zwey Lehne, ein Lehn iſt 7 Lachter lang und breit. Für die Nahmen horizontal, perpendicular und ſchief ſind in den Bergwerken ganz andere eingeführt; wenn man ein rechtwinklichtes Dreyeck betrachtet, bey welchem alle drey Nahmen, horizontal, vertical und ſchief vorkommen, ſo heißt die horizontale Grundlinie die Sohle, die perpendicular oder aufrecht ſtehende Seite die Seiger-Teufe, und die ſchiefe Hypothenuſe die Fläche, worauf man in die Grube auf- und abſteigt. Die gegrabene Gänge heiſſen Gruben oder Grubengebäude; ſind ſie perpendicular oder unter einem Winkel, der mit dem Horizont 80 — 90° macht, ſo heißt man ſie einen Schacht; gehen ſie mehr horizontal, ſo heiſſen ſie Stollen. Ein Gang, der mit dem Horizont einen Winkel von 60 — 80° macht, heißt ein ſtehender Gang, ein flacher, der einen Winkel von 20 — 60°, und ein ſchwebender Gang, der einen Winkel zwiſchen dem Horizont und 20° macht. Was in die Höhe geht, ſind ſteigende, was in die Tiefe, fallende Gänge, Steigen und Fallen heißt die Dohnlege, die Meſſung heißt ein Zug, unter der Erden ein Grubenzug, oberhalb der Erden ein Tagzug. Bringt man das gemeſſene überhaupt aufs Papier, ſo heißt es zulegen, vom Papier aufs Feld, zugeben. Vermeſſen iſt den Ort auf der Oberfläche der Erde beſtimmen, wie weit man graben dörfe. Orthungen ſind diejenige Punkte der Gruben, wo ein Winkel iſt, oder die Gruben ſich wenden, da man alſo nicht gerad fortmeſſen kann, ſondern eine neue Linie zieht; Orthungen am Anfang und Ende der Gruben heiſſen ganze Orthungen; und wenn ſie oben auf der Erde perpendicular angezeigt werden, ſo ſagt man: die Orthung werde an Tag ausgebracht. Die Pfähle womit dieſes geſchiehet, heiſſen Ortpfähle; und die Steine Lochſteine. Ein Perpendikel von einem Punkt über der Erde in die Grube heißt die Lochſteine in die Grube fällen. Ein Durchſchlag iſt ein von einem Punkt zu einer Grube gemachter Zugang. Reſolviren heißt aus zwey Stücken des rechtwinklichten Dreyecks, z. E. aus der Fläche (hypothenuſe) und einen Winkel auſſer dem Rechten die übrige Stücke finden, z. E. die Seigerteufe und Sohle.

§. 865.

§. 865. Anm. Die Inſtrumente, die man zum Markſcheiden braucht, ſind die Gradbogen oder die Waſſerwaage, die wie ein Transporteur mit einem Bleywurf ausſiehet; der Häng- oder Grubencompaß, welcher wie ein anderer Compaß beſchaffen iſt, nur daß die Peripherie in 24 gleiche Theile getheilt iſt, die man nach den Stunden des Tages, Stunden nennt; die 12te gegen Mittag wird bezeichnet mit Merid. und die 12te gegen Mitternacht mit Septentr. auf die Abendſeite kommen die Morgenſtunden; und auf die Morgenſeite die Abendſtunden, wie bey Sonnenuhren. Nach dieſen Stunden oder Weltgegenden heiſſen die zwiſchen 9 und 12 fallende Gänge, flache, die zwiſchen 12 und 3, ſtehende, zwiſchen 3 und 6, Morgen- und zwiſchen 6 und 9, Spatgänge. Auſſer dieſen Inſtrumenten hat man noch die Stundenſcheibe und Stundentransporteur, welche wie die Peripherie des Compaſſes eingetheilt ſind, und das Zuleginſtrument zum Zeichnen und Verjüngen der Grubengebäude nöthig. Man lernt ſie beſſer durch das wirkliche Anſchauen als durch Zeichnung kennen und gebrauchen. Uebrigens ſiehet man aus dieſer kurzen Nachricht, daß die geometriſche Wiſſenſchaften einem Markſcheider unentbehrlich ſeyen, und daß er in ſeiner Kunſt deſto weiter es bringen werde, je mehr er ſich mit der Geometrie und Trigonometrie bekannt gemacht hat.

Viertes Hauptſtück,
Von der höhern Geometrie.

§. 896.

Erklärung.

Unter der höhern Geometrie verſtehen wir ſowohl die Wiſſenſchaft, alle übrige krumme Linien auſſer dem Cirkel zu beſtimmen, und durch eine Art Gleichungen auszudrucken, auch wo es ſeyn kann, auszumeſſen, als auch die Rechnung des Unendlichen, die, wie im Erfolg deutlich erhellen wird, nicht nur in Ruckſicht auf ihre Anwendung, ſondern auch ſelbſt auf ihre Erfindung einen weit gröſſern Antheil an der Geometrie als an der Arithmetik hat, folglich unter dem allgemeinen Nahmen der höhern Geometrie mit begriffen werden kann. Welches wir deßwegen anmerken, weil ſonſten dieſer Theil der höhern Geometrie die Analyſis des Unendlichen genannt und unter dieſem Titel vorgetragen wird. Wir wollen, wie in den bisherigen Hauptſtücken, zuerſt die Geſchichte der höhern Geometrie vortragen.

Geſchichte der höhern Geometrie.

§. 867. Bey der Geſchichte der höhern Geometrie darfen wir in der Zeitordnung nicht über den Apollonius uns hinaus wagen. Dann obſchon noch verſchiedene vorher ſich mit Betrachtung der krummen Linien auſſer dem Cirkel beſchäftiget haben, ſo ſind theils ihre Arbeiten ſämtlich verlohren gegangen, theils kann man ihre Erfindung mit keiner völligen Gewißheit beſtimmen.

§. 868. Anm. Was nun den Apollonius betrift, ſo iſt er zu Pergen, einer Stadt in Pamphilien, gebohren, zur Zeit des Königs Ptolemäus Evergetes, ungefehr 247 Jahr vor Chriſti Geburt; Er war gegen 40 Jahr jünger als Archimedes, von dem wir auch ſogleich was reden werden. Cardanus gibt ihm die ſiebende Stelle unter den ſubtilſten Köpfen, die jemals die Welt geſehen hätte. Er legte ſich mit allem Fleiſſe unter den Nachfolgern des Euclides zu Alexandrien auf die mathematiſche Wiſſenſchaften, und brachte es darinnen ſo weit, daß er acht Bücher von den coniſchen Sectionen oder Kegelſchnitten herausgab, worinnen er zuerſt zeigte, daß man aus einem jeden Conus oder Kegel alle drey Sectionen ſchneiden könne, da man vorher glaubte, zu einer Parabel müſſe man einen rechtwinklichten, zur Ellipſe einen ſpizwinklichten, und zur Hyperbel einen ſtumpfwinklichten Kegel haben. Auſſer dieſer Erfindung hat Apollonius alles in ſeinen acht Büchern zuſammen getragen, was Ariſtäus, Eudoxus, Menechmus, Euclides, Conon, auch zum Theil Archimedes und andere vor ihm von Kegelſchnitten gelehrt haben.

§. 869. Anm. Die acht Bücher des Apollonius ſind nicht immer bis auf unſere Zeiten ganz vorhanden geweſen. Im vorigen Jahrhundert hatte man nur die vier erſte, welche urſprünglich griechiſch noch übrig ſind; nachgehends hat Jac. Golius noch drey arabiſch überſezte Bücher des Apollonius aus dem Orient erhalten, und ſolche lateiniſch herausgegeben. Das achte ſchäzte man für verlohren; bis endlich Thom. Halley in der bodlejaniſchen Bibliothek ein arabiſches Mſcpt. davon fand, welches er 1706. lateiniſch herausgab. Halley ſchreibt in der Vorrede, Edm. Bernardi habe das Werk zu überſetzen angefangen, wäre aber darüber verlegen; endlich hat Halley, unerachtet er kein arabiſch verſtunde, aus der Bernardiſchen angefangenen Ueberſetzung den Reſt vollends dechifriret. Man hat auch noch andere Ueberſetzungen. Und auf dieſe Weiſe hat man nun den Apollonius

ganz, aber nur die vier erſte Bücher in der Originalſprache. Uebrigens iſt diß Werk ſo allgemein und abſtrakt geſchrieben, daß Keppler in Introd. Comm. de Stella martis ſchreibt: Quotusquisque mathematicorum eſt, qui tolerat laborem perlegendi Apollonii Pergæi conica? daß dieſes übrigens die wahre Arbeit des Apollonius ſeye, erhellet aus dem Pappus von Alexandrien, welcher ungefehr gegen das Ende des vierten Jahrhunderts nach Chriſti Geburt ſeine Collectanea Mathematica herausgegeben, und von dieſer Apolloniſchen Arbeit ausführlich geſchrieben hat. Die beſte Commentatores über den Apollonius unter den Alten waren der Eutocius, der unter dem Kayſer Juſtinianus ſich einen Nahmen machte, und hernach die Hypatia, die Tochter des Theons, welche dem Suidas zu Folge ſich mit eben dieſer Arbeit beſchäftigte; nachgehends wurden im Jahr 900 nach Chriſti Geburt die Werke des Apollonius in das Arabiſche überſezt, und von dieſer Zeit an kamen ſie unter den Chriſten in eine ziemliche Vergeſſenheit, bis im 14 und folgenden Jahrhunderten mit andern Wiſſenſchaften auch die mathematiſche wieder hergeſtellt wurden.

§. 870. Anm. Auſſer den Kegelſchnitten haben die Alten noch einige andere Linien betrachtet, dergleichen die Spirallinie des Archimedes, die Quadratrix des Dinoſtratis u. ſ. w. Man hat aber die Betrachtung der aus coniſchen Schnitten entſtehenden krummen Linien immer vorgezogen, und wegen ihrer Nuzbarkeit ſich vornemlich damit beſchäftiget.

§. 871. Anm. Wir haben ſchon gemeldet, daß die Wiſſenſchaften im ſechsten Jahrhundert unter den Chriſten ſehr abnahmen, und bald darauf ihren Zug zu den Arabern genommen, welche die philoſophiſche und mathematiſche Werke der alten Griechen überſetzen lieſſen, und mit Nutzen gebrauchten. Als endlich die Araber, nach der Vereinigung mit den Türken, den Geſchmak an Wiſſenſchaften wieder verlohren, gieng ein neues Licht in den Abendländern unter den Chriſten auf, und die Mathematik bekam auch eine neue Geſtalt; doch gieng es etwas langſamer, und man wird nicht wohl ſchicklicher als mit dem vorigen Jahrhundert den Anfang machen können, wenn man die Geburtszeit der neuern mathematiſchen Wiſſenſchaften beſtimmen will. Was in Ruckſicht auf die Buchſtabenrechnung von Cardanus, Vieta und nach ihm vom Carteſius geleiſtet worden, haben wir im II. Hauptſtück der arithm. Wiſſenſch. gemeldet. Wir wollen alſo nur von der Rechnung des Unendlichen noch reden.

§. 872. Wann wir bey Unterſuchung der neuen Geſchichte der Analyſis des Unendlichen den Iſaac Barrov, einen gleich groſſen Theologen und Mathe-

thematicum, unter welchem Newton den Grund zu ſeinen erhabenen Studien geleget hat, vor allen andern zuerſt nennen, ſo werden wir am wenigſten irren. Er hat das Triangulum Characteriſticum, wie es die Leibnizianer nennen, aus Betrachtung der Subtangente unſtrittig erfunden, und was die Deutſche dy und dx nennen, e und a genannt; die Figur, wie ſie in den Schriften der Analyſten noch jezo zu Grund gelegt wird, und die Erklärung davon ſteht in Barrows Lectionibus opticis, die ein Newton ſowohl als ein Leibniz leſen konnte. Nun iſt das freylich noch nicht die ganze Rechnung des Unendlichen; aber einem Newton oder Leibniz durfte man nur einen Fingerzeig geben, ſo konnten ſie weiter ſchlieſſen; dahero es gar wohl begreiflich iſt, daß Newton und Leibniz jeder vor ſich aus des Barrow Schriften oder Unterricht ſo viel Licht bekommen, daß ſie die Rechnung des Unendlichen oder die ſo gemeinnützige und erhabene Analyſis nach ihren erſten Gründen erfunden haben; da dann der ganze Streit, wem die Ehre der Erfindung gebühre, auf einmal entſchieden wäre. Dann daß mehrere Gelehrte einerley Satz erfinden, gibt es genug Exempel. Den wichtigen Satz von den Differentialien vermiſchter Functionen, die wir an ſeinem Ort erklären werden, haben in neuern Zeiten Herr Euler und Herr Clairaut jeder für ſich erfunden.

§. 873. Die erſte Erfinder der neuern Analyſis waren alſo Barrow, der den Grund gelegt, Newton und Leibniz, die darauf zuerſt gebauet haben. Ich ſage der neuern Analyſis; dann es ſcheint, ſie ſeye nur wieder erfunden worden, als eine den Alten bekannte und nachgehends verlohrne Kunſt. Dann Archimedes hat die Parabel quadriren können, wie man ſie durch die Integralrechnung quadriren kann. Es iſt dahero faſt zu vermu-

then, er habe die Analyſin mit andern gewußt, aber geheim gehalten, und die dadurch erfundene Sätze ſynthetiſch vorgetragen. Doch es iſt eine Muthmaſſung; dann er kann die Quadratur der Parabel auch ohne Analyſis des Unendlichen durch andere Rechnung erfunden haben. Wir kommen auf die neuere Geſchichte wieder zurück. Iſaac Barrow wurde 1630 zu London gebohren, er ſtudierte zu Cambridge, gieng 1655 auf Reyſen, zu deren Beſtreitung er ſeine Bücher verkaufte, beſahe Frankreich, Italien, die Levante, Conſtantinopel, und kam 1659 über Venedig, Deutſchland und Holland wieder nach Haus. Er wurde hierauf Prediger, und erhielte bald hernach die Profeſſion der griechiſchen Sprache zu Cambridge; 1662 wurde er Prof. der Geometrie, und das folgende Jahr Mitglied der Königlichen Societät der Wiſſenſchaften; 1670 wurde er Doctor und Prof. der Theol. und überlieſſe die mathematiſche Profeſſion ſeinem groſſen Schüler, dem Newton. 1675 wurde er Canzler, und ſtarb 1677 zu London, als er dahin reißte, die Paßionspredigten, als Caplan Carl des II. welche Stelle er dabey hatte, zu halten. Seine Schriften ſind eine Ausgab des Euclides; Euclidis Elem. XV. breviter demonſtrata, ferner Lectiones opticæ 18. in Scholis publicis Cantabrigiæ habitæ; wo eben die erſte Gründe zur Analyſis vorkommen. u. ſ. w. Seine theologiſche Werke hat Tillotſon in drey Folianten zuſammen herausgegeben, und ſein Leben dabey ausführlich beſchrieben. Iſaac Newton verdient ein gleich groſſes Angedenken. Er wurde 1642 in der Provinz Lincoln gebohren. Zu Cambridge ſtudierte und lehrte er bis aufs Jahr 1688; da er zum Parlamentsglied nach London von Seiten der Univerſität gewählt wurde. 1699 wurde er Obermünzmeiſter zu London, und zugleich 1703. Preſident der Societät der Wiſſenſchaften. Dieſe Bedienung behielte er bis an ſein Ende, das den 20. Merz 1728 erfolgte; da er 84 Jahr alt war. Man begrub ihn in der Abtey Weſtmünſter, wo ihm auf öffentliche Koſten ein prächtiges Grabmaal gebaut wurde; die Innſchrift zeugt von ſeinen Verdienſten, Einſicht, Gottesfurcht und ganzem Character; ſie iſt die folgende: Iſaacus Newtonus, Eques Auratus, qui animi vi prope divina Planetarum motus, figuras, cometarum ſemitas, oceanique æſtus, ſua matheſi facem præferente, primus demonſtravit, Radiorum lucis diſſimilitudines, colorumque inde naſcentium proprietates, quas nemo ante ſuſpicatus erat, perveſtigavit. Naturæ, Antiquitatis, S. Scripturæ, Sedulus, ſagax, fidus Interpres, Dei O. M. Majeſtatem aperuit, Evangelii ſimplicitatem moribus expreſſit! ſibi gratulentur mortales tale tantumque extitiſſe humani generis decus. Nat. 25. Dec. 1642.

denat.

denat. 20. Mart. 1728. Gottfr. Wilh. Leibniz wurde 4 Jahr nach dem Newton zu Leipzig 1646 gebohren; ſtudierte mit groſſem Fleiß, und wurde zu Altdorf Doctor in der Rechtsgelehrſamkeit, bald darauf Churmaynziſcher Rath und Hofmeiſter der jungen Herrn von Boineburg, die er nach Paris, Holland und Engelland, und von da aus nach Hannover führte, wo er Herzogl. Rath und Bibliothekarius wurde; einige Zeit hernach bekam er Befehl, die Hiſtorie des Hauſes Braunſchweig zu ſchreiben, zu welchem Ende er verſchiedene Reyſen durch Teutſchland und Italien machte; 1700 wurde er Mitglied der Academ. zu Paris, Preſident der Acad. zu Berlin, ferner ruſſiſcher geh. Rath mit einem Gehalt von 1000 Ducaten, unter dem Czaar Peter, endlich Reichshofrath zu Wien und Baron, auch königl. engl. geh. Rath und Hiſtoriographus; er ſtarb 1716 den 14 Nov. Man ſagt, der Verdruß über das wider ihn ausgefallene Urtheil, die Erfindung der Differentialrechnung betreffend, habe viel zu ſeinem Tod beygetragen. Aus dieſer Geſchichte ſieht man, daß Leibniz nicht nur ein Mathematicus, ſondern ein gleich groſſer Philoſoph und Hiſtoricus, überhaupt einer der gröſten Geiſter des vorigen Jahrhunderts geweſen ſeye.

§. 874. Anm. So wichtig auch die Erfindungen eines Newton und Leibnizen waren, ſo würden ſie doch nicht ſo gemeinnützig geworden ſeyn, wenn ſich nicht zu gutem Glücke um dieſe Zeit gleich groſſe Kenner gefunden hätten, welche das angefangene Gebäude erweitern und bis auf den höchſten Gipfel vollführen konnten. Das waren die berühmten Bernoulli und der Marquis d'Hopital; was die Herrn Bernoulli betrift, ſo ſind die erſte Jac. und Joh. Bernoulli, zween Brüder, deren erſter 1654. der leztere aber 1667. zu Baſel gebohren wurde. Erſterer wurde Prof. der Mathematik zu Baſel, und der jüngere folgte ihm in der Profeſſion nach ſeinem 1705. erfolgten Tod. Dieſer brachte es ungleich weiter als ſein frühe verſtorbener Herr Bruder, mit welchem er gemeinſchaftlich den Differentialcalcul auflößte, wie ihn Herr von Leibniz in den Actis Erud. 1684. bekannt machte. Allein Joh. Bernoulli dachte noch weiter, und kam in ſeinen Schriften auf die Integralrechnung und deren Erweiterung, ferner auf den Exponentialcalculum und auf die logarithmiſche Differentialien: wodurch die Rechnung des Unendlichen ungemein verſchönert und nüzlicher wurde. Dieſer Joh. Bernoulli iſt ein Vater von drey eben ſo gelehrten Herrn Söhnen, dem Hrn Nicolaus, dem Hrn Daniel und Hrn Joh. Bernoulli. Der erſte, der eine neue Art, die Geſtalt der unendlichen Reyhe zu finden, bekannt machte, und in die Fußſtapfen ſeines groſſen Herrn Vaters trate, ſtarb zu Petersburg frühzeitig im Jahr 1726. da er kaum 31 Jahr alt war; der andere iſt der noch jezo lebende berühmte Dan. Bernoulli, der zu Baſel die

Ma-

Mathematik und Naturlehre mit ſeinem Herrn Bruder lehret. Der berühmte Herr Vater ſtarb 1748. den 1. Jenner in einem hohen und verdienſtvollen Alter. Wilhelm Franz Anton, Marquis von Hopital ſtiftete eine genaue Freundſchaft mit dieſem Herrn Bernoulli, und machte ſich durch ſeine Analyſe des infiniment petits 1696. berühmt; er ſtarb 1704. in einem Alter von 44 Jahren.

§. 875. In dem gegenwärtigen Jahrhundert hat man die höhere Geometrie faſt auf den höchſten Gipfel gebracht, nachdeme unter den Deutſchen Hr Prof. Leonh. Euler zu Berlin, und der ſchon genannte Herr Dan. Bernoulli zu Baſel, auch der verſtorbene Herr Gabriel Cramer in Genev, der ſich durch die Linien von doppelter Krümmung (à double courbure) einen Nahmen machte, unter den Engländern ein Maclaurin in ſeinem Treatiſe of Fluxions, unter den Franzoſen Herr Clairaut und Herr D'Alembert, doch jener vorzüglich, in der reinen Mathematik, die wichtigſte Erfindungen gemacht haben, wovon wir im folgenden reden werden.

§. 876. Anm. Die mathematiſche Handbücher, die in Deutſchland, beſonders in gegenwärtigem Jahrhundert, herausgekommen, verdienen hier noch eine Stelle; das erſte iſt das Wolfiſche, nemlich die lat. Elemente, auch die deutſche Anfangsgründe, in welchen von der höhern Geometrie ſo viel ſtehet, als man zu Anfang dieſes Jahrhunderts wußte; ſie haben ſich ein halbes Jahrhundert erhalten; die Hauſeniſche Schriften ſind noch beſſer, wurden aber nicht ſo gemein als die Wolfiſche. In Zeit von zehen Jahren ſind aber drey ſehr gute Handbücher zum Vorſchein gekommen, durch welche das Wolfiſche verdrungen zu werden ſcheint, wenn anders die Lehrer, auch auf Academien, die neuere Entdeckungen der Analyſis ſich bekannt machen, und kein allzu groſſes Vorurtheil für dasjenige haben, was und wie ſie die Sache ehemals gelernt haben, da man nur das zu denſelbigen Zeiten recht gute Wolfiſche Handbuch erklärte. Dieſe neue Handbücher ſind das Segneriſche, von welchem die Verfaſſer der Göttingiſchen gel. Anzeige 1758. p. 138. ſchreiben: „Der Nutzen dieſes Werks fällt deſto deutlicher in die Augen, da man in Deutſchland zur Analyſis kein anderes Lehrbuch als das Wolfiſche hat brauchen können, das in der That zu der Zeit, da es herauskam, vor 50 Jahren, von der damaligen Vollkommenheit der Wiſſenſchaften weniger entfernet war, als von der jezigen, aber doch ſeitdem

faſt

faſt die Aſymptote der analytiſchen Einſicht der meiſten deutſchen Profeſſorn der Mathematik geblieben.„ Das andere iſt das Carſteniſche, das unter dem Titel: Matheſis Theoretica elementaris atque ſublimior 1760. zu Roſtock herauskam, und ein Auszug aus der Euleriſchen introd. in Analyſ. finit. und Infinitorum iſt. Das dritte iſt das Käſtneriſche vom Jahr 1759 — 61. welches unſeres Erachtens das beſte iſt, weil es das beſte aus allen ſowohl deutſchen als engliſchen und franzöſiſchen neuen Schriftſtellern der Mathematik in ſich enthält, und auf eine überzeugende Art, wiewohlen nicht für Anfänger, ſondern nur für geübte Leſer, vorträgt.

Allgemeine Begriffe von algebraiſchen und höhern Functionen.

§. 877. **Erklär.** Wenn der Wehrt einer veränderlichen Gröſſe, das iſt einer ſolchen, die gröſſer oder kleiner werden kann, durch eine andere ebenfalls veränderliche Gröſſe mit Zuziehung beſtändiger Gröſſen ſo beſtimmt wird, daß, man mag für die veränderliche Gröſſen ſetzen, was man will, die Beſtimmung allemal ſich anwenden läßt, ſo ſagt man, eine Gröſſe ſeye eine Function von der andern.

§. 878. **Erläuterung.** Wir wollen die Sache mit Exempeln deutlich machen. Wann $y = \frac{bx}{a}$, ſo iſt y eine Function von x, und x eine Function von y; b und a ſollen beſtändige Gröſſen ſeyn, die immer einerley Wehrt haben, y und x mag ſeyn und werden was es will. Ferner der Wehrt von y ſolle nicht verändert werden, ohne daß auch der Wehrt von x verändert werde, woferne die Gleichung bleiben ſolle; welches man in dem Exempel leicht ſiehet, denn wenn $\frac{a}{b}$ unveränderlich iſt, und y gröſſer wird, ſo muß auch x gröſſer werden, geſezt daß in allen möglichen Fällen $y = \frac{bx}{a}$. Dieſe Gröſſen y und x, die Functionen von einander ſind, heißt man deßwegen veränderliche Gröſſen, weil man alle mögliche Gröſſen und Zahlen, ganze und gebro-

brochene, poſitive und negative, rationale und irrationale, ja ſelbſt unmögliche Gröſſen (imaginarias quantitates) ſogar auch null davor ſetzen kann, um hernach zu ſehen, was aus der andern veränderlichen Gröſſe, deren Function ſie ist, bey dieſer Veränderung werde.

§. 879. **Erklär.** Die Functionen werden in algebraiſche und transſcendentiſche eingetheilt. Eine algebraiſche Function iſt, die ſich durch gerade Linien und ihre Verbindung untereinander ſo ausdrucken läßt, daß man ſie zulezt auf die Elementargeometrie reſolviren kann; wie den obigen Ausdruck, wo $y = \frac{ax}{b}$ eine gerade Linie iſt; oder wie bey dem Cirkel, wo $y^2 = ax - x^2$, welches die Gleichung für die Cirkel iſt. §. 535. Die algebraiſche Functionen ſind ferner entweder einförmig oder vielförmig (uniformes vel multiformes) jene haben nur einen Wehrt, wenn man für die veränderliche Gröſſe eine Zahl ſezt; dieſe haben mehrere; z. E. bey den quadratiſchen Gleichungen zwey, bey den cubiſchen drey, u. ſ. w. nach §. 331. ſie heiſſen daher zweyförmig, dreyförmig u. ſ. w. (biformes, triformes & functiones). Eine weitere Eintheilung iſt die Theilung der Functionen in gleichnahmige u. ungleichnahmige, (homogeneæ & heterogeneæ) jene haben gleiche Dimenſionen in den veränderlichen Gröſſen, z. E. $\alpha y = \beta z$, wo die Function gleichnahmig, und von einer Dimenſion iſt. Die heterogeneæ haben ungleiche Dimenſionen. Endlich werden dieſe algebraiſche Functionen noch in complexe und in uncomplexe (complexas & incomplexas) oder vermiſchte und unvermiſchte eingetheilt; bey dieſen iſt nur eine veränderliche Gröſſe, die einen Exponenten haben kann, was man für einen will, und in eine beſtändige Gröſſe multiplicirt iſt, z. E.

y =

$y = \frac{ax^{n+1}}{n+1}$ iſt eine incomplexe Function; alle andere heiſſen complexe Functionen. Diejenige Functionen, die ſich nicht algebraiſch ausdrucken laſſen, ſind transſcendentiſche Functionen, ſo ſind die Sinus und Bogen transſcendentiſche Functionen von einander.

§. 880. Zuſatz. Wenn P, Q, R einförmige Functionen von x ſind, ſo iſt der Ausdruck $y^2 + Py + Q = 0$ der allgemeine Ausdruck für alle zweyförmige Functionen für x, und der $y^3 + Py^2 + Qy + R = 0$ für alle dreyförmige, und der $y^n + Py^{n-1} + Qy^{n-2} + Ry^{n-3} — — — — = 0$ für alle vielförmige.

§. 881. Zuſatz. Weil ſich eine unbeſtimmte Linie geometriſch ziehen läßt, ſo laſſen ſich algebraiſche Functionen durch Linien ausdrucken. Dann man ziehe eine Linie von unbeſtimmter Länge, und nenne ſie x, es ſey z. E. *Fig.* 108. die Linie AH, man ſetze den Punkt A wo ſie anfahen ſolle; von A nach M ſolle ſie von andern Linien, wie MP, geſchnitten, das iſt, durch dieſe Linien ſollen gewiſſe Theile der unbeſtimmten Linien wie AF, AP abgeſchnitten werden, ſo wird allemal durch dieſen Schnitt ein gewiſſer Theil beſtimmt werden; welcher nach und nach alle mögliche Wehrte von x beſtimmt, dann wenn man die Linie in den Anfangspunkt A ſchneidet, ſo iſt x = 0, geht man ruckwarts gegen T, ſo iſt x negativ; poſitiv aber gegen H.

§. 882. Anm. Man ſiehet hieraus, wie der Nahme der Abſciſſen entſtanden; dann dieſe Linie AH heißt die Abſciſſenlinie, und eine jede darauf abgeſchnittene Linie eine Abſciſſe.

§. 883. Erkl. Die Linie, welche auf dieſe Weiſe abgeſchnitten wird, heißt die Abſciſſe, AP, AH, und die Linie, welche ſie ſchneidet, die Ordinate.

§. 884. Anm. Wenn *Fig.* 60. CA = a, AB = b, AD = x, DE = y geſezt wird; ſo iſt nach §. 527. $y = \frac{bx}{a} = DC$; ein allgemeiner Ausdruck aller Parallelen mit AB, zwiſchen den Schenkeln CA und CB, eben ſo *Fig.* 59. wenn AB = a, AD = x die Abſciſſe, und DE = y geſezt wird; ſo iſt, weil AD : DE = DE : DB = AB — AD; x : y = y : a — x, folgl. $ax - xx = y$ der algebraiſche Ausdruck für alle Cirkel.

§. 885. Zuſatz. Wenn eine homogeniſche Function von zwo veränderlichen Gröſſen gegeben iſt, und man ſezt für die eine veränderliche Gröſſe das Product der andern in eine dritte, die u heiſſen ſolle, ſo kann man die eine veränderliche Gröſſe hinwegſchaffen. Dann es ſeye

$$V = \frac{y+z}{y-z}$$ man ſetze für $y = uz$ ſo iſt

$$V = \frac{uz+z}{uz-z} = \frac{(u+1)z}{(u-1)z} = \frac{u+1}{u-1}$$

Wann alſo y und z mehr, z. E. n Dimenſionen hätten, ſo würde es auch angehen, wie man leicht es auf eine ähnliche Weiſe berechnen kann.

§. 886. Expl. Es ſey $V = \frac{y - \sqrt{y^2 - z^2}}{z}$, man

ſetze $y = uz$ ſo hat man

$$V = \frac{uz - \sqrt{(u^2-1)z^2}}{z} = \frac{uz - z\sqrt{(u^2-1)}}{z} = u - \sqrt{u^2-1}$$

Die

Die algebraiſche Linien, beſonders die Kegelſchnitte, oder die Parabel, Ellipſe und Hyperbel.

§. 887. **Erkl.** Ein Kegel *Fig.* 107. kann auf verſchiedene Weiſe von einer ebenen Fläche geſchnitten werden; 1) durch den Scheitel, in welchem Fall ein Dreyeck entſteht, 2) mit der Grundfläche parallel, da es einen Cirkel gibt, welcher auch entſteht durch die ſogenannte Sectionem ſubcontrariam bey einem ungleichſeitigen Kegel (cono ſcaleno), 3) durch einen parallelen Schnitt mit einer Seite DC, da eine Parabel herauskommt, 4) durch einen ſchiefen Schnitt von A gegen C, daß der Schnitt auf beeden Seiten durchgeht, woraus eine Ellipſe entſteht, und endlich 5) durch einen ſchiefen Schnitt, der ſich herabwärts immer weiter von des Kegels entgegengeſezter Seite DC entfernt, und wenn der Schnitt oberhalb verlängert würde, einen gleichen umgekehrten Kegel, der auf D ſtünde, eben ſo ſchneiden würde.

§. 888. Anm. Das Dreyeck und der Cirkel iſt in der Elementargeometrie betrachtet worden, man betrachtet alſo hier nur die drey leztere Schnitte.

§. 889. Anm. Die Urſache ihrer Benennung muß man aus der griechiſchen Sprache entlehnen, und die Wörter hernach mit den Definitionen dieſer krummen Linien vergleichen. Parabola heißt eine Gleichheit; und die erſte coniſche Section bekam deßwegen dieſen Nahmen, weil in derſelben das Product aus einer beſtändigen Linie AK in die Abſciſſe allemal dem Quadrat der Semiordinate gleich iſt; Ellipſis heißt ein Defect, ein Mangel; und die zweyte coniſche Section heißt deßwegen ſo, weil das Quadrat der Semiordinate etwas weniger als das obige Product iſt; Hyperbola heißt ein Ueberfluß, was gröſſer iſt; und die dritte coniſche Section heißt deßwegen ſo, weil das Quadrat ihrer Semiordinaten gröſſer iſt als das obige Product.

§. 890. Erklär. Die Linien, wo die Abſciſſen oder die Wehrte von x angenommen werden, heiſſen in allen algebraiſchen Linien die Abſciſſeulinien, und zwar die Axe, wenn die Ordinate perpendicular darauf ſteht, oder welches gleichviel iſt, wenn der Ordinatenwinkel ein rechter iſt wie *Fig.* 108. 109. 110. wo PM auf AP Lothrecht ſtehet. AP, AH ſind Abſciſſen, PM, PN ſind Ordinaten, (ordinatim applicatæ) A *Fig.* 108. iſt der Anfang der Abſciſſen, der Scheitel (Vertex). Ordinaten und Abſciſſen zuſammen heiſſen Coordinaten; und ſind Functionen voneinander; (die Alten haben die Sehnen der Kegelſchnitte Ordinatas und ihre Hälften Semiordinatas genannt). Der Buchſtabe x bedeutet insgemein die Abſciſſe, wenn nicht was anders dabey erinnert wird, und y die Ordinate. Der Parameter iſt die beſtändige Linie, welche a oder b genannt wird.

Die Parabel.

§. 891. Erkl. Wenn die Coordinaten rechtwinklicht ſind, ſo heißt diejenige krumme Linie, in welcher $ax = y^2$ die Parabel; a iſt der Parameter; alſo hier die dritte Proportionallinie zur Abſciſſe und Semiordinate; und y oder die Ordinate iſt die mittlere Proportionallinie zwiſchen dem Parameter und der Abſciſſe.

§. 892. Zuſatz. Weil bey rechtwinklichten Coordinaten in der Parabel $y^2 = ax$, ſo iſt $y = \pm\sqrt{ax}$, folglich gehören jeder Abſciſſe zwo entgegengeſezte gleiche Semiordinaten zu.

§. 893. Zuſatz. Iſt $x = 0$, ſo iſt auch $ax = 0$, folglich auch $y = 0$, dahero die Axe der Parabel im Anfang der Abſciſſen geſchnitten wird.

§. 894. Zuſatz. Iſt x negativ, ſo iſt auch ax negativ, weil a immer poſitiv, folglich $y^2 = - ax$, und $y = \sqrt{-ax}$, eine unmögliche Gröſſe; alſo gibt es keine Ordinaten für die verneinte Abſciſſen in der Parabel, und die Parabel hat nur zween unendliche Schenkel (Ramos) zu beeden Seiten der Axe, weil poſitiv $ax = y^2$ unendlich wachſen kann.

§. 895. Erkl. Der Brennpunkt iſt derjenige Punkt der Axe der krummen Linie, wo die Ordinate, oder nach der Sprache der Alten, die Semiordinate dem halben Parameter gleich iſt.

§. 896. Lehrſatz. Der Brennpunkt in der Parabel iſt um den vierten Theil des Parameters von dem Scheitelpunkt entfernt; das iſt, wenn dieſe Diſtanz x heiſſet. Satz. *Fig.* 108.

$$x = \tfrac{1}{4}a.$$

Bew.

$ax = y^2$ Erkl. der Parabel §. 891.

$y = \tfrac{1}{2}a$ Erkl. des Brennpunkts §. 895. ſubſt.

$ax = \tfrac{1}{4}a^2$

——— : a

$x = \tfrac{1}{4}a.$

§. 897. Zuſatz. Die Differenz zwiſchen der Abſciſſe AP und der Diſtanz vom Scheitelpunkt AF iſt alſo $= AP - AF = x - \tfrac{1}{4}a = PF$.

§. 898. Zuſatz. Eine jede gerade Linie vom Brennpunkt an die Krümmung der Parabel, wie die Linie FM, iſt der Abſciſſe AP und der Diſtanz des Brennpunkts vom Scheitel AF zuſammen gleich.

Satz. *Fig.* 108.

$FM = x + \frac{1}{4}a.$

Bew.

$PM^2 = ax$ nach der Erkl. der Parabel §. 891.

$PF^2 = x^2 - \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$ §. 897.

add.

$PM^2 + PF^2 = x^2 + \frac{1}{2}ax + \frac{1}{16}a^2$

. √ extr.

$\sqrt{PM^2 + PF^2} = x + \frac{1}{4}a.$ aber

$\sqrt{PM^2 + PF^2} = FM$ nach dem Pyth. Lehrſatz

$FM = x + \frac{1}{4}a.$

§. 899. Lehrſatz. Die Abſciſſen verhalten ſich wie die Quadrate der Semiordinaten.

Satz. *Fig.* 108.

$AF : AP = FN^2 : PM^2.$

Bew.

$AF . a = FN^2$ und $AP . a = PM^2$ §. 891. folgl.

$AF . a : AP . a = FN^2 : PM^2$

a:

$AF : AP = FN^2 : PM^2.$

§. 900. Zuſatz. Folglich $\sqrt{AF} : \sqrt{AP} = FN : PM$, oder die Ordinaten verhalten ſich wie die Quadratwurzeln der Abſciſſen.

Die Ellipſe.

§. 901. Erkl. Die Ellipſe iſt diejenige coniſche Section oder krumme Linie, in welcher das Quadrat der Ordinate dem Product des Parameters in die Abſciſſe, weniger dem Product aus dem Quadrat der Abſciſſe in den durch die groſſe Axe dividirten Parameter gleich iſt. Der Parameter heiſſe = b,

die

die gröſſere Axe *Fig.* 109. AB = a, ſo iſt $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ die Definition der Ellipſe, wenn man die Abſciſſen vom Scheitelpunkt A an rechnet.

§. 902. Zuſatz. Wenn y = 0, ſo iſt x = 0 oder x = a; dann unter der Bedingung daß $y^2 = 0$, iſt auch $bx - \frac{bx^2}{a} = 0$, folglich $abx = bx^2$, welches wahr iſt, wenn x = 0, aber auch wahr bleibt, wenn x = a; dann wenn man beederſeits mit bx dividirt, ſo iſt der Quotient a = x.

§. 903. Zuſatz. Folglich wird die Axe zweymal von der Ellipſe geſchnitten, und die Abſciſſenlinie gehet nicht unendlich fort.

§. 904. Zuſatz. Weil $y = \pm\sqrt{(bx - \frac{bx^2}{a})}$ ſo gehören zu jeder Abſciſſe zwo gleiche entgegengeſezte Semiordinaten.

§. 905. Erklär. Wenn die groſſe Axe AB in C in zween gleiche Theile getheilet wird, ſo heißt der Punkt C der Mittelpunkt und die Ordinate von C aus doppelt genommen die kleinere Axe = 2CD. *Fig.* 109. (axis conjugatus).

§. 906. Zuſatz. Weil die Abſciſſe $x = \frac{1}{2}a$, wenn y der halben kleinen Axe gleich iſt, ſo darf man in der Gleichung nur für x überall $\frac{1}{2}a$ ſetzen, ſo hat man die kleine Axe; dann in dieſem Fall $y^2 = \frac{1}{2}ba - \frac{1}{4}\frac{ba^2}{a} = \frac{1}{2}ba - \frac{1}{4}ba = \frac{1}{4}ba$; und $y = \frac{1}{2}\sqrt{ba}$. folglich $2y = \sqrt{ba}$.

§. 907. Zuſatz. Man nenne 2y die kleine

Axe = c, ſo iſt $c^2 = ab$; und $\frac{c^2}{a} = b$; auch nach §. 901. $y^2 = \frac{c^2x}{a} - \frac{c^2x^2}{a^2}$.

§. 908. Zuſatz. Wenn $c = a$, ſo iſt $y^2 = ax - x^2$, die Gleichung für den Cirkel; in welchem Fall $c = a = b$, das iſt, Parameter und beede Axen einander gleich ſind.

§. 909. Lehrſatz. Wenn die Abſciſſen von dem Mittelpunkt an gerechnet werden, und eine ſolche Abſciſſe wie PC von C an gerechnet wird geſezt $= u$, ſo iſt die Gleichung für die Ellipſe $\frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} = y^2$.

Bew.

CP = u nach der Vorausſetzung; folglich $x = AP = AC - CP = \frac{1}{2}a - u$. dahero nach §. 907. ſubſtit.

$$\frac{c^2}{a}.(\tfrac{1}{2}a - u) - \frac{c^2}{a^2}.(\tfrac{1}{2}a - u)^2 = \tfrac{1}{4}c^2 - \frac{c^2u^2}{a^2} = y^2.$$

§. 910. Zuſatz. Auf beeden Seiten von C, zur Rechten und zur Linken, geben gleiche u einerley y, folglich wird die Ellipſe in zwo gleiche Helften in C getheilt.

§. 911. Lehrſatz. Die Quadrate der Ordinaten verhalten ſich wie die Producte aus den Segmenten der Axe.

Saz. *Fig.* 109.

$$FG^2 : PM^2 = AF.FB : AP.PB.$$

Bew.

$$FG^2 = b(AF - \frac{AF^2}{a}) \text{ u. } PM^2 = b(PM - \frac{PM^2}{a})$$

nach §. 901. folgl.

folgl. $FG^2 : PM^2 = b.\left(AF - \frac{AF^2}{a}\right) : b\left(PA - \frac{PA^2}{a}\right)$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} : \frac{b}{a}$$

$$= AF\,.\,a - AF^2 : PA\,.\,a - PA^2$$

$$= AF\,(a - AF) : PA\,(a - PA)$$ d. i. in der Figur

$$FG^2 : PM^2 = AF\,.\,FB : PA\,.\,PB.$$

§. 912. Lehrſatz. Die Ellipſe hat zween vom Scheitel gleich weit entfernte entgegengeſezte Brennpunkte, welche durch die halbe Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate der beeden Axen beſtimmt werden.

Satz. *Fig.* 109.

$$CF = \pm \frac{\sqrt{(a^2 - c^2)}}{2}$$

Bew.

$\frac{1}{4}b^2 = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 CF^2}{a^2}$ nach §. 909. vergl. mit §. 895.

$\frac{1}{4}b^2 = \frac{c^4}{4a^2}$ nach §. 906. folglich

$\frac{c^4}{4a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^2 CF^2}{a^2}$ folgl. herüber geſezt

$$\frac{c^2 CF^2}{a^2} = \frac{1}{4}c^2 - \frac{c^4}{4a^2}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} : \frac{c^2}{a^2}$$

$CF^2 = \frac{1}{4}\frac{c^2 a^2}{c^2} - \frac{a^2 c^4}{4a^2 c^2}$ das iſt

$CF^2 = \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{4}c^2$ und dahero

$$CF = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2 - c^2)}$$

§. 913. Anm. Dieſes iſt die Weite der Brennpunkte vom Mittelpunkt, will man ihre Weite vom Scheitel wiſſen, ſo muß man noch $\frac{1}{2}a$ addiren.

§. 914. Lehrſatz. Die Summe zweyer Linien aus beeden Brennpunkten an einen und eben denſelben Punkt der Peripherie der Ellipſe gezogen, iſt der groſſen Axe gleich.

Satz. *Fig.* 109.

$$FM + fM = AB.$$

Bew.

es ſeye $FC = fC = e$. ſo iſt, weil

$$PC = AC - AP = \tfrac{1}{2}a - x;\ PF = Cf + PC = e + \tfrac{1}{2}a - x$$

und $PF = CF - PC = e - \frac{1}{2}a + x$, folglich

$$PF^2 = e^2 - ae + \tfrac{1}{4}a^2 + 2ex - ax + x^2$$
$$= (\tfrac{1}{2}a - e)^2 + 2ex - ax + x^2$$
$$PM^2 = ax - x^2 - 4e^2x + 4e^2x^2$$

nr. I. $PF^2 + PM^2 = FM^2 = (\frac{1}{2}a - e)^2 + 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a}$ folgl.

$$FM = \tfrac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$$

eben ſo iſt

nr. II. $Pf^2 = e^2 + ae + \frac{1}{4}a^2 - 2ex - ax + x^2$

$$= (\tfrac{1}{2}a + e)^2 - 2ex - ax + x^2$$
$$PM^2 = ax - x^2 - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$$

$PM^2 + Pf^2 = fM^2 = (\frac{1}{2}a + e)^2 - 2ex - \frac{4e^2x}{a} + \frac{4e^2x^2}{a^2}$ folgl.

$$fM = \tfrac{1}{2}a + e - \frac{2ex}{a}$$

aber

nr. I. $FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$

folgl. add.

$$FM + fM = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a = a = AB.$$

§. 915. Anm. Eben dieſer Beweis gilt von allen andern Linien; ſo iſt FE und fE zuſammen auch = a u. ſ. w.

§. 916. **Lehrſatz.** Eine jede Ellipſe läßt ſich mit der Parabel ſo vergleichen, daß man die Parabel eine Ellipſe nennen kann, deren Axe unendlich iſt. Das iſt, je gröſſer a wird, deſto geringer wird der Unterſchied der Quadrate der beederſeitigen Ordinaten. Dann es ſey *Fig.* 109. AN das Stük einer Parabel, AM einer Ellipſe, die gemeinſchaftliche Abſciſſe AP = x, die Semiordinate der erſtern PN = z, der andern PM = y; ſo iſt

I. in der Parabel $z^2 = bx$

II. in der Ellipſe $y^2 = bx - \frac{bx^2}{a}$ ſubtrahirt

$$z^2 - y^2 = \frac{bx^2}{a}$$ nun ſeye

$$a = \infty$$ ſo iſt

$$z^2 - y^2 = \frac{bx^2}{\infty}$$ aber

$$\frac{bx^2}{\infty} = 0$$ vel quavis data minor quantitas.

$$z^2 - y^2 = 0.$$

§. 917. Anm. Weil die Axe niemal wirklich unendlich wird, ſo ſagt man, der elliptiſche Bogen komme dem paraboliſchen immer näher, je gröſſer die Axe ſeye. Uebrigens hat man dieſen Lehrſatz in der Aſtronomie nöthig, wann von den Laufbahnen der Cometen die Rede iſt, die eine ſo eccentriſche Laufbahn haben, daß man ihre Ellipſe, darinn ſie ſich bewegen, ohne Fehler für eine paraboliſche Laufbahn annehmen kann.

Die Hyperbel.

§. 918. **Erklär.** Die Hyperbel iſt diejenige coniſche Section, in welcher $y^2 = by + \frac{bx^2}{a}$,

wenn die Buchſtaben das bedeuten, was ſie bey der Ellipſe beditten haben. Dann man darf nur für die Gleichung in der Ellipſe — a ſtatt + a ſetzen, ſo hat man die obige Gleichung der Hyperbel; und in ſofern kann man die Hyperbel als eine Ellipſe von einer negativen Axe anſehen.

§. 919. Zuſatz. Wenn $y = 0$, ſo iſt x entweder $= 0$ oder $= - a$, wie §. 902. bey der Ellipſe.

§. 920. Zuſatz. Wenn man die kleine Axe auch nach der Aehnlichkeit der Ellipſe ausdrucken wird, ſo heißt $\sqrt{-ab}$ eine unmögliche Gröſſe; folglich gibt es auf der Zwerchaxe, (ſo wird die Axe AB *Fig.* 110. axis transverſus, genannt,) keine Semiordinate.

§. 921. Zuſatz. Wenn die Abſciſſe negativ genommen gröſſer wird als die Zwerchaxe a, ſo gibt es auf der entgegengeſeztenSeite wieder Ordinaten; dann $y^2 = \frac{bx}{a}(a + x)$ gibt ein poſitives Quadrat, weil hier die beede Factores x und $a + x$ negativ ſind, folglich ihr Product poſitiv wird; dahero hat die Hyperbel vier unendliche entgegengeſezte Schenkel; weil x poſitiv und negativ unendlich wachſen kann.

§. 922. Erklär. Wenn man die Zwerchaxe AB in zween gleiche Theile theilet, ſo heißt C der Mittelpunkt der Hyperbel.

§. 923. Zuſatz. Bildet man ſich eine kleine Axe in der Hyperbel ein, die man wie bey der Ellipſe $= c$ ſetzet, ſo iſt nach §. 907. eine ähnliche Gleichung für die Hyperbel $y^2 = \frac{c^2x}{a} + \frac{c^2x^2}{a^2}$, da man nur ſtatt — ſetzet +.

§. 924.

§. 924. Zuſatz. Eben ſo; wenn die Abſciſſen von dem Mittelpunkt C an gerechnet werden, iſt nach §. 909. mit einer ähnlichen Veränderung $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

§. 925. Zuſatz. Auf gleiche Weiſe ſind kraft des Gegenſatzes §. 912. die Brennpunkten der Hyperbel $= \mp \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$, wenn man ſie von dem Mittelpunkt c an rechnet.

§. 926. Zuſatz. Endlich erhellet eben ſo aus §. 914. daß die Zwerchaxe immer der Differenz zwoer Linien aus den beeden Brennpunkten F und f, an einen Punkt der Hyperbel M gezogen, gleich ſeye, das iſt $fM - FM = a$.

§. 927. Erklär. Die Aſymptoten der Hyperbel ſind aus dem Mittelpunkt gezogene Linien, welche den Schenkeln der Hyperbeln ſich unendlich nähern, und doch niemalen mit ihnen zuſammen fallen, ſondern immer einen Zwiſchenraum laſſen.

Ihre geometriſche Erklärung iſt folgende: Man beſchreibt *Fig.* 110. mit der Ordinate PM, Pm durch den Scheitelpunkt der Hyperbel A die Parallele DE, ſo, daß DA = AE = der halben kleinen Axe werden; wodurch man die Punkte D und E beſtimmt erhält; aus dem Mittelpunkt C zieht man durch D und E die gerade Linien CDQ, CEQ ſo weit man will, ſo werden ſie die Aſymptoten ſeyn. Eben ſo können ſie auch auf die entgegengeſezte Seite continuirt werden.

§. 928. Lehrſatz. Die Aſymptoten fallen niemalen mit den Schenkeln der Hyperbel zuſammen, weil die Differenz der Quadrate von den beeden Ordinaten PM und PR eine beſtändige Gröſſe, nemlich der vierte Theil des Products aus dem Parameter in die Zwerchaxe, d. i des Quadrats der kleinen Axe, iſt, welches Product niemalen null werden kann.

Satz.

Satz. *Fig.* 110.

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}c^2.$$

Bew.

Weil C der Mittelpunkt iſt, ſo iſt $CA = \frac{1}{2}a$; $CP = CA + AP = \frac{1}{2}a + x$; und die halbe kleine Axe $DA = \frac{1}{2}\sqrt{ab} = \sqrt{\frac{1}{4}ab}$; folglich weil $CA : AD = CP : PR$ ſo iſt in kleinen Buchſt.

$$\frac{1}{2}a : \sqrt{\frac{1}{4}ab} = \frac{1}{2}a + x : PR \quad \text{alſo}$$

$$PR = \frac{\frac{1}{2}a\sqrt{\frac{1}{4}ab} + x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{\frac{1}{2}a} = \sqrt{\frac{1}{4}ab} + \frac{2x\sqrt{\frac{1}{4}ab}}{a}$$

wenn man wirklich dividirt; diß quadrirt gibt

$$PR^2 = \frac{1}{4}ab + bx + \frac{bx^2}{a}$$ es iſt aber nach §. 918.

$$PM^2 = bx + \frac{bx^2}{a}$$ ſubtrah.

$$PR^2 - PM^2 = \frac{1}{4}ab = \frac{1}{4}c^2.$$

§. 929. Anm. Der Nahme Aſymptote iſt aus dem Griechiſchen zu erklären; dem Wort nach iſt ſie eine Linie, die mit einer andern niemalen zuſammen fällt; der Bedeutung nach muß man noch hinzuſetzen: unerachtet ſie ſich derſelben unendlich nähert. Aus dieſer Aehnlichkeit hat Herr von Leibniz die endliche Geiſter Aſymptoten von GOtt genannt.

§. 930. Lehrſ. Wenn man *Fig.* 110. AI mit CD parallel ziehet, ſo iſt EI = CI = AI.

Satz. *Fig.* 110.

$$CI = EI = AI.$$

Bew.

nr. I. $EA : ED = AI : DC$ aber

$$EA : ED = \frac{1}{2} : 1$$

$AI : DC = \frac{1}{2} : 1$ folgl. $AI = \frac{1}{2}DC$. aber

$\frac{1}{2}DC = \frac{1}{2}CE$ daher

$AI = \frac{1}{2}CE$ nr. II.

nr. III.

nr. III. $EA : AD = EI : IC$ aber
$EA = AD$ folglich

$EI = IC = \frac{1}{2} CE$ nach der Figur
aber nr. II. $AI = \frac{1}{2} CE$ folglich

$EI = IC = AI.$

§. 931. Erklär. Das Quadrat von CI, das iſt CI^2, heißt die Potenz der Hyperbel.

§. 932. Lehrſatz. Die Potenz der Hyperbel iſt der ſechszehende Theil von der Summe der Quadrate der beeden Axen.

Saz. *Fig.* 110.

$$CI^2 = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

Bew.

$CE^2 = CA^2 + AE^2$ aber $CA = \frac{1}{2}a$, und $AE = \frac{1}{2}c$, folgl.
$CE^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2$ und $CE = \sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$
$CI = \frac{1}{2}CE = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2)}$ und quadrirt
$CI^2 = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}c^2) = \frac{a^2 + c^2}{16}$

§. 933. Lehrſ. Die Linien zwiſchen den Aſymptoten und Schenkeln der Hyperbel RM und rm ſind gleich.

Satz. *Fig.* 110.

$RM = rm.$

Bew.

nr. I. $CA : AD = CP : PR$

$\frac{AD \cdot CP}{CA} = PR.$

nr. II. $CA : AE = CP : Pr$
$AE = AD$

$CA : AD = CP : Pr$

$\frac{AD \cdot CP}{CA} = Pr.$

aber nr. II. $\frac{AD \cdot CP}{CA} = Pr$

$PR = Pr$
$PM = Pm$ ſubtr.

$PR - PM = Pr - Pm$ das iſt in der Figur
$RM = rm.$ §. 934.

§. 934. Lehrſatz. Wenn man QM parallel mit CD ziehet, ſo iſt CQ . QM der Potenz der Hyperbel gleich. Satz. *Fig.* 110.

$$CQ \cdot QM = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

Bew.

$\triangle RQM \backsim \triangle RCr$ folgl.

$CQ : Mr = QR : RM$ und weil $\triangle QRM \backsim \triangle CDE$

nr. I. $QR : RM = DC : ED$

$ED : DC = Mr : CQ$; es ſey $Pr = z$, ſo iſt

$Pr + PM = Mr = y + z$

ſo iſt in Buchſt. $c : \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2} = y + z : CQ$ weil $DC^2 = CA^2 + AE^2$ und $DC = \sqrt{(CA^2 + AE^2)} = \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2}$

$$\frac{(y+z).(\sqrt{a^2 + c^2})}{2c} = CQ.$$

nr. II. $RM = z - y$. nach nr. I. $= PR - PM$. aber

$z^2 - y^2 = \frac{1}{4}c^2$ nach §. 928.

$z^2 - y^2 = (z + y).(z - y)$

$(z + y)(z - y) = \frac{1}{4}c^2$

$: z + y$

$$z - y = \frac{c^2}{4(z + y)} = RM$$

nr. III. $ED : EC = RM : MQ$, d. i. weil $EC = CD$.

$$c : \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{a} = \frac{c^2}{4(z+y)} : MQ \text{ alſo}$$

$$MQ = \frac{c^2}{4(z+y)} \cdot \frac{\sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c} \text{ aber}$$

nr. I. $CQ = \frac{(y + z) . \sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c}$ diß mit einander multiplicirt, gibt

$$CQ . QM = \frac{(y+z) . \sqrt{(a^2 + c^2)}}{2c} . \frac{c^2}{4(z + y)} . \frac{\sqrt{(a^2+c^2)}}{2c}$$

$$= \frac{(a^2 + c^2)c^2}{16c^2} = \frac{a^2 + c^2}{16}$$

§. 935.

§. 935. Erklär. Wenn man CQ, QM als Coordinaten auf die Aſymptoten annimmt, und ſezt CQ = p, QM = q, ſo iſt $pq = \frac{a^2 + c^2}{16}$ die Gleichung der Hyperbel zwiſchen den Aſymptoten.

§. 936. Zuſatz. Iſt die Potenz der Hyperbel = 1, ſo iſt pq = 1, oder CQ . QM = 1.

§. 937. Wenn CA = AE, ſo iſt der Winkel ACE = AEC, und jeder 45°; weil bey A ein rechter iſt.

§. 938. Erklär. Die gleichſeitige Hyperbel iſt, deren beede Axen und Parameter einander gleich ſind.

§. 939. Zuſatz. In einer gleichſeitigen Hyperbel iſt der Aſymptotenwinkel DCE = 2ACE = 90°, oder ein rechter Winkel; ſie heißt dahero auch die rechtwinklichte Hyperbel.

§. 940. Zuſatz. Weil die allgemeine Erklärung der Hyperbel $y^2 = ax + \frac{bx^2}{a}$, ſo iſt für die gleichſeitige, wo a = b, die Gleichung $y^2 = ax + x^2$.

§. 941. Zuſatz. Wenn man die Abſciſſen vom Mittelpunkt an rechnet, und CP = u geſezt wird, ſo iſt AP = CP — AC, das iſt $x = u - \frac{1}{2}a$; folglich in der Fundamentalgleichung §. 923. der Wehrt von x ſubſtituirt, wo $y^2 = \frac{c^2}{a}x + \frac{c^2x^2}{a^2}$ aus der kleinern Axe, gibt $y^2 = \frac{c^2u^2}{a^2} - \frac{1}{4}c^2$.

§. 942. Zuſatz. Folglich gibt dieſe Gleichung für die gleichſeitige Hyperbel $y^2 = u^2 - \frac{1}{4}a^2$.

All.

Allgemeine Betrachtungen der coniſchen Sectionen und Linien der zweyten Ordnung.

§. 943. Lehrſatz. In einer jeden coniſchen Section iſt die gerade Linie aus dem Brennpunkt an einen beliebigen Punkt der Peripherie, der Diſtanz des Brennpunkts vom Scheitel und dem durch dieſe Diſtanz dividirten Product aus der Differenz des halben Parameters und der gedachten Diſtanz in die dem Punkt der Peripherie correſpondirende Abſciſſe gleich. Das iſt, wenn man mit dem Herrn Prof. Euler die Diſtanz AF = a, den halben Parameter = b nennet,

Satz. *Fig* 108. 109. 110.

$$FM = a + \frac{(b-a)}{a} AP.$$

Bew.

Nr. I. bey der Parabel.

Aus §. 898. iſt klar, daß FM = AP + AF = a + AP; da nun in der Parabel die Diſtanz a $= \frac{1}{2}b$ §. 896. wann man den gegenwärtigen Ausdruk mit dem daſelbſt gegebenen vergleicht, ſo iſt

$$\tfrac{1}{2}b + \frac{b - \frac{1}{2}b}{\frac{1}{2}b} AP = \tfrac{1}{2}b + AP = a + AP.$$

Da dann für die Parabel $\frac{b-a}{a} = 1$ wird.

Nr. II. Für die Ellipſe iſt nach §. 914. $FM = \frac{1}{2}a - e + \frac{2ex}{a}$, wo a die Zwerchaxe, e die Diſtanz des Brennpunkts vom Mittelpunkt C, nemlich CF bedeutet; folglich iſt $\frac{1}{2}a - e$ = AC — CF = AF = der Diſtanz des Brennpunkts vom Schei-

tel

tel = a nach dem Euleriſchen Ausdruck; folglich $\frac{2ex}{a} = (\frac{b-a}{a}).x.$ oder $\frac{2e}{a} = \frac{b-a}{a}$, daß nun dieſe Gleichung richtig erhellt aus der Figur: dann es ſey

$$\frac{2FC}{AB} = \frac{b-AF}{AF} = \frac{FN-AF}{AF} \text{ aber}$$

nr. I. $\frac{2FC}{AB} = \frac{AB-2AF}{AP}$, u. weil $FN^2 = 2FN.AF - \frac{2FN.AF^2}{AB}$ §. 901.

$$\text{folglich } FN = 2AF - \frac{2AF^2}{AB}$$

$$= \frac{2AF.AB - 2AF^2}{AB}$$

nr. II. ſo iſt $\frac{FN-AF}{AF} = \frac{2AF.AB-2AF^2-AF.AB}{AB.AF}$

$$= \frac{2AB-2AF-AB}{AB}$$

$$= \frac{AB-2AF}{AB}$$

aber dieſer Ausdruck iſt nr. I. $\frac{2FC}{AB}$, dahero $\frac{2e}{a} = \frac{b-a}{a}$.

III. Fall. Eben ſo wird der Beweis für die Hyperbel nur mit veränderten Zeichen vorgetragen, weil in der Hyperbel $FM = e - \frac{1}{2}a + \frac{2ex}{a}$.

§. 944. Anm. Dieſer Beweis kommt uns in der Aſtronomie zu ſtatten, wo man die Linien aus der Sonne an die Laufbahnen der Planeten und Cometen allgemein ausdruckt, wie ſolches Herr Prof. Euler in ſeiner nova Theoria Planetarum & Cometarum angeführt, und den Beweis p. 10. gedachter Schrift ſupponirt hat. Wir haben dahero dieſen allgemeinen Ausdruck für alle coniſche Sectionen um ſo weniger unerwieſen übergehen können, weil der Beweis ſich faßlich und kurz vortragen läßt.

§. 945. Erklär. Die Abſciſſen und Ordinaten können in einer coniſchen Section nach Belieben und unter einem beliebigen Winkel angenommen, folglich aus ihren Gleichungen noch allgemeiner ausgedrucket werden; dann es ſeye *Fig.* 111. AP $= x$, PM $= y$, und der Ordinatenwinkel APM $= \pi$; ſo iſt die allgemeinſte auf null reducirte Gleichung von dieſer zweyten Ordnung, welches die erſte der krummen Linien iſt, und wenn die griechiſche Buchſtaben beſtändige Gröſſen bedeuten, $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$.

§. 946. Zuſatz. Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon = 0$, und $\zeta = 1$, $\beta = -a$, ſo iſt $0 = -ax + y^2$, oder $\alpha x = y^2$ die Gleichung für die Apolloniſche Parabel.

§. 947. Lehrſatz. Aus der obigen Gleichung §. 945. entſteht für y durch Subſtitutionen folgende Gleichung $y = -\frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} + \sqrt{((\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + \varphi x + \varrho)} : 2\zeta$; und aus dieſer läßt ſich beurtheilen, ob eine gegebene Gleichung zu einer Parabel oder Ellipſe oder Hyperbel gehöre.

Bew.

nr. I. Aus der Gleichung §. 945. ergibt ſich leicht, wenn man nach § 327. ordnet

$$\zeta y^2 + \gamma y + \varepsilon xy = -\alpha - \beta x - \delta x^2$$

das iſt $\zeta y^2 + (\gamma + \varepsilon x)y =$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} : \zeta$$

$$y^2 + \frac{(\gamma + \varepsilon x)y}{\zeta} = -\frac{\alpha - \beta x - \delta x^2}{\zeta}$$ eine nur quadr. Gleich. add.

$$\frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{2\zeta} = \frac{(\varepsilon x + \gamma)^2}{2\zeta}$$ folgl. §. 321.

y +

$$y + \frac{\varepsilon x + \gamma}{2\zeta} = \frac{\sqrt{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 - \beta x - \alpha)}}{2\zeta}$$

wenn man nemlich die Wurzel extrah. und auf der andern Seite alles unter einerley Benennung bringt.

$$y = -\frac{(\varepsilon x + \gamma)}{2\zeta} + \frac{\sqrt{(\varepsilon x + \gamma)^2 - 4\zeta(\delta x^2 - \beta x - \alpha)}}{2\zeta}$$

oder die Gröſſe hinter dem Wurzelzeichen wirkl. multipl.

$$+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon xx + 2\varepsilon x\gamma + \gamma\gamma - 3\zeta\delta x^2 - 4\zeta\beta x - 4\zeta\alpha)}$$

und diß Product geordnet

$$+\sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + 2\varepsilon\gamma x + \gamma\gamma)}$$

nach §. 327.

$$-4\zeta\beta x - 4\zeta\alpha;$$

man nenne die lezten Coefficienten u. Factores ϕ, ϱ, ſo iſt

$$y = -(\varepsilon x + \gamma) + \sqrt{(\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2 + \phi x + \varrho)}$$

mit dem gemeinſchaftl. Diviſor 2ζ; welches das erſte zu beweiſen war.

nr. II. Man nenne die Gröſſen hinter dem Wurzelzeichen z, und ſeze $x = \infty$, ſo werden für x^2 alle niedrigere Potenzen verſchwinden, und alſo $z = (\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta)x^2$; dann x^2 iſt in dieſem Fall unendlichmal gröſſer als x, und noch weit mehr als ϕ, ϱ, u. ſ. w. welche nicht unendlich angenommen werden.

Wenn nun $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta > 0$, oder poſitiv iſt, ſo gibt es wie §. 920. für poſitive und negative unendliche Abſciſſen, die durch x ausgedruckt werden, Ordinaten; folglich hat die krumme Linie vier unendliche Schenkel, und iſt ein Hyperbel. Wenn aber $\varepsilon\varepsilon - 4\zeta\delta < 0$ oder negativ iſt, ſo gibt es keine Ordinaten für unendliche affirmative oder negative Abſciſſen, alſo iſt die krumme Linie eine Ellipſe nach §. 902. Wenn endlich $\varepsilon\varepsilon = 4\zeta\delta$,

ſo ſieht man ſchon, weil ſonſt nichts übrig bleibt, daß die krumme Linie eine Parabel iſt, die zween unendliche Schenkel hat.

§. 948. Anm. Dieſe Betrachtung hat Herr Prof. Käſtner mathem. Anfangsgr. III. Th. p. 235. angeſtellt; und es wird dem Leſer nicht unangenehm ſeyn, daß wir die ihm beliebte Kürze etwas ausführlicher gemacht, und ihn dadurch in den Stand geſezt haben, die Schlüſſe ſogleich zu überſchauen.

§. 949. Lehrſatz. Aus dem gegebenen Ordinatenwinkel und der Lage der Coordinaten gegeneinander läßt ſich ihre Gleichung allgemein finden. Es ſey *Fig.* 111. die Lage der Coordinaten CQ, QM, folglich auch C gegeben; man ſetze

BQ $= t$, QM $= u$; den Wink. APM $= \pi$, TCQ $= \gamma$

BQM $= \varkappa$, folglich CTQ $= 180 - C - Q$

$$= 180 - \gamma - \varkappa.$$

$$PMT = \mu = 180° - MPT - MTP$$

es iſt aber $MPT = 180° - \pi$

$$\mu = 180° - 180° + \pi - MTP.$$

$$MTP = \gamma + \varkappa$$

folgl. $\mu = \pi - \gamma - \varkappa.$

$\sin. T : PM = \sin. \mu : PT$, alſo $PT = \frac{PM \sin. \mu}{\sin. T}$

$$\sin. T : CQ = \sin. \varkappa : CT = \frac{CQ . \sin. \varkappa}{\sin. T}$$

$$\sin. T : PM = \sin. \pi : MT = \frac{PM . \sin. \pi}{\sin. T}$$

$$\sin. \varkappa : CT = \sin. \gamma : TQ = \frac{CT . \sin. \gamma}{\sin. \varkappa}$$

Wenn man nun die gefundene Wehrte ſubſtituirt, ſo laſſen ſich Gleichungen zwiſchen den neuen Abſciſſen u, t finden; wie man leicht auch in Ruckſicht auf andere krumme Linien begreift.

§. 950. Anm. Diß iſt das wichtigſte von den coniſchen Sectionen, das wir vorzutragen geſonnen waren; mehreres gehört nicht hieher, unerachtet man ganze Folianten davon geſchrieben hat. Diß eine wiederholen wir noch, daß man den Parameter in allen drey Sectionen aus den Figuren finden kann, wenn man die aus dem Brennpunkt gezogene rechtwinklichte Ordinate duplirt.

Von einigen andern, beſonders auch transſcendentiſchen Linien.

§. 951. Anm. Man wird ohne unſer Erinnern begreiffen, daß es auſſer den coniſchen Sectionen noch eine Menge von krummen Linien gebe, wovon einige mehr, die andere weniger brauchbar ſind. Hieher gehören die verſchiedene Quadratrices, die Ciſſois, die Conchois oder Muſchellinien, die Spirallinien, die Radlinie oder griechiſch Cyclois und Trochois, die Logiſtik u. ſ. w. unter dieſen verdienen die beede leztere, nemlich die Logiſtik und die Cyclois vornemlich unſere Aufmerkſamkeit; jene wegen den Logarithmen, dieſe wegen ihrem Nutzen in der Mechanik.

§. 952. Erklär. Wenn man *Fig.* 119. eine gerade Linie in ſo viel gleiche Theile theilet, als man will, und aus den Theilungspunkten A, O, P, N die Linien AB, OR, PM, NQ dergeſtalten ziehet, daß ſie zu einander eine continuirliche geometriſche Proportion haben, ſo heißt die krumme Linie BRMQ die Logiſtik oder die logarithmiſche Linie.

§. 953. Zuſatz. Wenn AP, AN die Abſciſſen ſind, ſo ſind AB, PM die Ordinaten, folglich ſind die Abſciſſen die Logarithmen der Ordinaten; iſt alſo eine Ordinate $= y$, die andere $= z$, ſo ſind die correſpondirende Abſciſſen ly, lz. nach §. 299.

§. 954. Zuſatz. AT oder die Abſciſſenlinie iſt alſo zugleich die Aſymptote der Logiſtik, weil PM niemal 0 wird, auſſer wenn AT unendlich groß iſt, indem alsdann $AB : PM = 1 : 0$.

§. 955. Erklär. Die Radlinie (Cyclois, Roulette) *Fig.* 112. entſteht, wenn ſich ein Rad

um ſeine Axe dergeſtalten herum bewegt, daß es ſich im Bewegen fortwälzt, und durch dieſe Fortwälzung die krumme Linie FPQ beſchreibet.

§. 956. Zuſatz. Demnach iſt der Bogen FLB der geraden Linie BQ gleich; und weil PL=y, FL = x geſezt wird, ſo iſt x = y die Gleichung für die Radlinie.

§. 957. Erklär. Linien von höhern Ordnungen, z. E. von der dritten, vierten, fünften Ordnung u. ſ. w. ſind ſolche algebraiſche Linien, in welchen die höchſte Potenz von x oder y, oder von beeden zugleich mehr als zwo Dimenſionen haben, oder wenn Producte von x, y vorhanden ſind, die mehr als zwo Dimenſionen ausmachen.

§. 958. Anm. So iſt die Ciſſois des Diocles; wo $ay = x^3 + xy^2$ eine Linie der dritten Ordnung. Sie läßt ſich auch aus *Fig.* 61. beſtimmen.

§. 959. Erklär. Transſcendentiſche Linien ſind ſolche Linien, in welchen ſich keine beſtimmte algebraiſche Gleichung geben läßt. Wenn z. E. zu einer Abſciſſe unendlich viel Ordinaten, oder umgekehrt zu einer Ordinate unendlich viel Abſciſſen, das iſt, mehr, als man angeben kann, gehören, ſo iſt, weil die Abſciſſen und Ordinaten x und y heiſſen, x eine transſcendentiſche Function von y, und y eine transſcendentiſche von x; zwiſchen welchen keine beſtimmte Gleichung ſtatt findet, indeme ſie unendlich viel Dimenſionen haben müßte, welches algebraiſch unmöglich iſt.

§. 960. Zuſatz. Eine transſcendentiſche Linie iſt alſo eine Linie von einer höhern Ordnung als irgend eine möglich iſt; und eine gerade Linie würde ſie in unendlich viel Punkten ſchneiden; welches auch umgekehrt folget.

§. 961.

§. 961. Anm. Die Archimedeiſche Schnecken- oder Spirallinie, die niemalen aufhört, und ins Unendliche im Schnecken fortbeſchrieben werden kann, iſt alſo eine transſcendentiſche Linie, dann eine gerade Linie würde ſie in unendlich viel Punkten ſchneiden.

§. 962. Zuſatz. Weil eine einzige Sehne unendlich vielen Bogen correſpondirt, *Fig.* 51. z. E. die Sehne AB dem Bogen ADB, ferner auf der andern Seite dem Bogen AB, wieder ADB + ADBA; und AB + ABDA, u. ſ. w. ins Unendliche die Peripherie vervielfältigt, ſo gibt es zwiſchen den Sehnen und dem Bogen keine algebraiſche Gleichung, und der Bogen iſt eine transſcendentiſche Function von der Sehne.

§. 963. Zuſatz. Eben ſo iſt der Bogen eine transſcendentiſche Function vom Sinus, Coſinus, der Tangente, Cotangente, Secante, Coſecante, u. ſ. w. nach §. 697. 706.

§. 964. Zuſatz. Weil jedem Sinus und jeder Sehne unendlich viele Ausſchnitte, (Sectores) und unendlich viele Abſchnitte (Segmenta circuli) zugehören, ſo gibt es auch zwiſchen dem Sector und der Sehne oder Sinus, und zwiſchen dem Segment und der Sehne oder Sinus keine algebraiſche Gleichung.

§. 965. Lehrſatz. Die unbeſtimmte Quadratur des Cirkels iſt ſchlechterdings unmöglich.

Bew.

Zur unbeſtimmten Quadratur des Cirkels hat man eine Gleichung 1) zwiſchen der Sehne, oder Sinus, oder Coſ. oder Tang. oder Cotang. oder Secante, oder Coſecante, oder Querſinus und dem Bogen nöthig; 2) zwiſchen dieſen Linien und dem Sector; 3) zwi-

ſchen dieſen Linien und dem Segment; kein viertes gibt es nicht. Aber in allen drey Fällen iſt keine algebraiſche Gleichung möglich; weil die zu den gemeldten Linien gehörige Bogen, Sectores und Segmente transſcendentiſche Functionen von ihnen ſind. Folglich iſt die unbeſtimmte Quadratur des Cirkels ſchlechterdings unmöglich.

§. 966. Anm. Daraus aber folgt noch nicht, daß zwiſchen einem gewiſſen beſtimmten Bogen, z. E. dem Bogen von 60° oder 45° u. ſ. w. und ſeinem Sinus oder Tangenten keine Vergleichung ſich finden laſſe; wiewohl man bisher noch keine gefunden hat, und vielleicht vergeblich ſucht. Weitere Erläuterung findet man in Herrn Prof. Eulers Analyſ. Infin. L. II. §. 540.

§. 967. Anm. Weil die Radlinie die unbeſtimmte Rectification des Cirkels vorausſezt, ſo iſt auch dieſe transſcendentiſch; und eine gerade Linie wie *Fig.* 113. würde ſie in unendlich vielen Punkten ſchneiden.

XX

Die geometriſche Oerter und die Conſtruction der Gleichungen.

§. 968. Erklär. Eine Linie, durch welche eine unbeſtimmte Aufgabe aufgelößt wird, heißt ein geometriſcher Ort; (Locus) diejenige geometriſche Oerter, welche durch eine gerade Linie, und unter den krummen durch den Cirkel aufgelößt werden, heiſſen loca plana; was durch die Linien der zweyten Ordnung, den Cirkel ausgenommen, ſich auflöſen läßt, heißt man loca ſolida; weitere Kenntniß hatten die Alten nicht, und die Linien höherer Ordnung hieſſen ſie loca linearia.

§. 969. Anm. Dieſe Materie gehört alſo nur in ſofern hieher, daß man die Bemühungen der Alten hiſtoriſch verſtehen lerne, und die Nahmen auch wiſſe, die man vorzeiten dieſen Linien gegeben. Dann heutzutag ſind ſie, wie die Conſtructionen der Gleichungen, weder in der Ausübung, wie ſchon Wolf Elem. Lat. T. I. §. 608. Analyſ. fin. anmerkt, noch auch in der Theorie von

von einigem Nutzen; ich habe auch davon in meinen erſten Gründen aller mathem. Wiſſenſch. S. 524 — 527. und 200 folgg. gehandelt.

§. 970. **Erklär.** Wenn man *Fig.* 120. die zwo krumme Linien AMB und DMN mit einander vergleichen will, ſo ſucht man den Ort M, wo ihre Abſciſſen eine gemeinſchaftliche Ordinate haben, welche PM iſt, und dieſe heißt die Gleichung der Wurzel; man kann auch eben ſo die gemeinſchaftliche Abſciſſe ſuchen. Eine ſolche Verzeichnung nun heißt die Conſtruction der Gleichung, durch welche man die Linien findet, welche die Wurzeln der Gleichung vorſtellen.

§. 971. Anm. Man hat ſie vorzeiten zu Gleichungen, die mehr als zwo Dimenſionen haben, beſonders gebraucht. Baker gab ſich insbeſondere Mühe, eine Regel davon feſtzuſetzen, in welcher er die Verbindung des Cirkels und der Parabel angerathen hat. Newton hat dagegen gründliche Erinnerungen gemacht, und die Cirkel und Ellipſe vorgeſchlagen, weil es nicht darauf ankommt, ob die Gleichung einer krummen Linie einfacher ſeye oder nicht, ſondern ob ſie ſich leicht zeichnen laſſen; dann man will die Wurzeln durch Zeichnen finden; nun läßt ſich die Ellipſis viel leichter als die Parabel beſchreiben; dahero dieſe Verbindung vorzuziehen. Sonſt müßte man auch die Parabel dem Cirkel vorziehen, weil die Gleichung der Parabel einfacher als des Cirkels iſt; jedermann aber würde es für ungereimt halten, wenn man bey einer Conſtruction der Gleichung die Parabel dem Cirkel vorzöge. Die ganze Arbeit aber iſt heutzutag entbehrlich; weil man durch Rechnung die Wurzeln viel genauer finden kann, als durch dieſe Zeichnung; die Alten, denen das Deliſche Problem und die Triſectio anguli ſo nahe lag, wurden durch Noth dazu gedrungen, weil ſie die Kunſtgriffe, mit welchen wir heutzutag unſere Rechnungen vollführen, nicht hatten. Sie haben ſich auch darinn geirret, daß ſie die beede Aufgaben durch den Cirkel und gerade Linien auflöſen wollten; indeme die Triſectio anguli auf eine cubiſche Gleichung führt, welche ſchon durch zwey krumme Linien conſtruirt werden muß. Carteſius hat die Conſtruction der cubiſchen und biquadratiſchen Gleichung zuerſt gelehrt, dahero es kein Wunder war, daß die Alten in der Auflöſung gedachten Probl. nicht wohl zurecht kamen. Von dem Deliſchen Problem haben wir ſchon §. 632. in der Elementargeom. gehandelt, was aber die Triſection des Winkels betrift,

ſo wird man ſich noch aus §. 770. Trigon. erinnern, daß man den vielſamen Winkel finden kann; dann weil das vielfache entſteht, wenn man das einfache immer zu ſich ſelbſt addirt, ſo darf man nur, wenn der Sinus $= a$, Coſinus $= b$, in dem Ausdruck §. 742. immer ſetzen $d = a$, $\delta = b$; und für das doppelte $m = a$, $\mu = b$; ſo iſt des doppelten Winkels Sinus $= 2ab$, und ſein Coſinus $b^2 - a^2$; wenn man jezo nur $m = 2ab$, und $\mu = b^2 - a^2$ ſetzet, ſo iſt des dreyfachen Winkels Sinus nach eben dieſem §. $= a(b^2 - a^2) + b \cdot 2ab = 3ab^2 - a^3$. Hieraus ſuche man den Sinus des dritten Theils; weil der ganze Winkel dreymal ſo groß als ſein Drittheil; dann es ſey $x = 3ab^2 - a^3$ der Sinus des ganzen Winkels; folgl. $a^3 - 3ab^2 + x = 0$; man ſetze $b^2 = 1 - a^2$ nach §. 701. ſo iſt $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}x = 0$; eine cubiſche Gleichung. Iſt der gegebene Winkel ein rechter, ſo iſt $x = 1$, folgl. $a^3 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4} = 0$, und $a = \frac{1}{2}$; welches auch aus der Trigon. §. 768. erhellt; weil $\frac{1}{2} = \sin. 30^\circ$, nach §. cit. aber $30^\circ = \frac{1}{3} \cdot 90$.

§. 972. Anm. Man könnte auch hier noch was von der Cardaniſchen Regel ſagen, die cubiſche beſtimmte Gleichungen aufzulöſen; da nemlich die Wurzeln aus $x^3 - ax + b = 0$ dem allgemeinen Ausdruck für alle cubiſche Gleichungen, wo das zweyte Glied weggeſchaft worden §. 347. zu geben gelehret wird. Cardan hat ſie 1570 in ſeiner arte magna de regulis Algebraicis bekannt gemacht. Da ſie aber nach dem Zeugniß der größten Mathematikverſtändigen von ſehr wenigem Gebrauch iſt, und nur wegen den ſeltſamen Bemühungen, die ſich in vorigen Zeiten die Algebraiſten damit gegeben, angemerkt zu werden verdient; ſo können wir ſie übergehen. Herr Prof. Käſtner hat ſie ausführlich erklärt math. Anfgr. T. III. §. 699–724. aber nur blos wegen denen ſeltſamen Bemühungen der Algebraiſten über dieſe Regel; welchen Umſtand er zur Entſchuldigung anführt. Dann ſonſt haben wir weit bequemere Methoden, ſowohl die rationale als irrationale Wurzeln zu finden.

Allgemeine Gründe der Differentialrechnungen.

§. 973. Erklär. Wenn eine Gröſſe nach und nach kleiner wird als eine jede angebliche Gröſſe

(qua-

(quavis data minor), ſo nimmt ſie unendlich ab, oder verſchwindet, (quantitas evaneſcens) eine ſolche verſchwindende Gröſſe heißt das Differentiale, nnd die Verhältniß, in welcher ſie verſchwindet, die Verhältniß der Differentialen.

§. 974. Lehrſatz. Wenn $a^{n-1}Z = z^n$, ſo iſt die Verhältniß der Differentialien davon, die wir E und e nennen wollen $= \frac{E}{e} = \frac{nZ^{n-1}}{a^{n-1}}$.

Bew.

Es werde aus Z nach §. 235. Z + E, und aus z werde z + e, ſo iſt

$a^{n-1}(Z+E) = (z+e^n$ das iſt nach §. 220.

$a^{n-1}Z + a^{n-1}E = z^n + nz^{n-1}e + \frac{n.n-1}{1.2}.z^{n-2}e^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^{n-3}e^3$.

da nun $a^{n-2}Z = z^n$

——————— ſubtr.

ſo iſt $a^{n-1}E = nz^{n-1}e + \frac{n.n-1}{1.2}z^{n-2}e^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^{n-3}e^3$.

——————————————— : e

$a^{n-1}\frac{E}{e} = nz^{n-1} + n.n-1.z^{n-2}e + n.n-1.n-2z^{n-3}e^2$

$a^{n-1}\frac{E}{e} = nz^{n-1}$

——————— a^{n-1}

$\frac{E}{e} = \frac{nz^{n-1}}{a^{n-1}}$

wenn nun e unendlich klein, ſo ſind alle in e multiplicirte Glieder gegen nz^{n-1} unendlich klein und verſchwinden, oder vielmehr wird ſich der Wehrt der Reyhe ohne Ende der Grenze nz^{n-1} nähern, folgl. wird in geom. Schärfe wie §. 199. auch hier ſeyn die obige Verhältniß.

§. 975. Zuſatz. Wenn a = 1, ſo iſt $a^{n-1} = 1$; und $\frac{E}{e} = nz^{n-1}$ und $E = nz^{n-1}e$; aber E iſt das Dif-

Differentiale von z^n, folglich iſt $nz^{n-1}e$ das Differentiale von z^n.

§. 976. Zuſatz. Nennet man nach der deutſchen Mathematikverſtändigen willkührlicher Benennung $e = dz$, ſo iſt alſo Diff. $z^n = nz^{n-1}dz$.

§. 977. Zuſatz. Das Diff. von x^2 iſt alſo $2xdx$, das von $x^3 = 3x^2dx$, das von $x^r = rx^{r-1}dx$.

§. 978. Anm. Die Engländer legen die Methode der Fluxionen zu Grunde; es ſey *Fig.* 1. $AB = x$, $BC = y$, und vx bedeute die Geſchwindigkeit, mit welcher der Punkt B die Linie AB beſchreibt, vy die Geſchwindigkeit, mit welcher der Punkt C die Linie BC beſchreibt; nach Verflieſſung einer willkührlichen Zeit, die endlich ſeyn mag, werde aus dem Rechteck AC das ähnliche Rechteck AE; man ſuche alſo die Geſchwindigkeit, mit welcher das ganze Rechteck ſich verändert hat. Das Rechteck heißt $AB.BC = xy$. Nun fragt man, wie geſchwinde $BC = y$ fortrücken müſſe, daß die Gleichheit immer erhalten, und das wachſende Rechteck in allen Zeittheilen ſich gleich und dem vorigen ähnlich bleibe; ſo wird man antworten, mit der Geſchwindigkeit des Punkts $B = vx$; eben ſo wird ſich die Linie $AB = x$ mit der Geſchwindigkeit des Punkts $C = vy$ bewegen; demnach iſt die Geſchwindigkeit, mit welcher ſich das ganze Rechteck verändert $= v(xy) = y \cdot vx + x \cdot vy$. Dann wenn ſich dieſe beede Linien mit einer andern Geſchwindigkeit bewegten, ſo würde die eine früher oder ſpäter als die andere an den Ort kommen, wohin man ſie haben will; wenn ſich aber x mit der Geſchwindigkeit von y und y mit der Geſchwindigkeit von x bewegt, ſo bleibt das Rechteck ſich immer gleich, und ſeinem vorigen Zuſtand ähnlich; alſo iſt die Geſchwindigkeit, mit der ſich das ganze Rechteck verändert $xvy + yvx$; ohne daß man nöthig hätte, etwas entweder als unendlich klein anzuſehen, oder gar für ein abſolutes Nichts wegzuwerfen. Sind die Linien AB, BC gleich, ſo iſt $x = y$, und die Geſchwindigkeit beederſeits vx, alſo, weil $xy = y^2$ die Geſchwindigkeit des veränderten Quadrats $xvx + xvx = 2xvx$; wäre es ein Cubus, ſo iſt die Geſchwindigkeit ſeiner Veränderung, weil die ganze Flächen $= x^2$ ſich verändern, $= 3x^2vx$; dann aus x^2 wird $2xvx$, $= 2x^{2-1}vx$, aus x^3 wird $3x^2vx = 3x^{3-1}vx$; und aus x^n wird $nx^{n-1}vx$.

§. 979.

§. 979. Anm. Die Deutſchen nennen die Räume, welche mit den Geſchwindigkeiten würden beſchrieben werden, wie auch die Geſchwindigkeit ſelbſt, die Differentialgröſſen; folglich iſt die Fluxionenrechnung von der Differentialrechnung unterſchieden, unerachtet ſie auf einerley Rechnung hinaus führt.

§. 980. Anm. Will man, wie die gewöhnlichſte Art in Deutſchland ſich auszudrucken iſt, nach den Wolfiſchen Elementen die Differentialen mit Sandſtäublein, die man bey Meſſung eines Berges ohne Gefahr zu irren, weglaſſen darf, oder nach der Lehre anderer mit abſoluten Nullen, die gar keine Gröſſen haben, vergleichen, ſo wird abermal einerley Rechnung im Erfolg herauskommen, unerachtet alle dieſe Gründe der Rechnung von einander verſchieden ſind. Wir überlaſſen die Wahl der Gründe den Leſern, indeme uns genüget, nach der alten Euclideiſchen Art die Verhältniß auf Ausdrücke, die kleiner als jede angebliche Gröſſe ſind, gebracht zu haben, wie ſolche auch Newton ſelbſt, als rationes primas & ultimas betrachtet hat. Wenigſtens ſcheinet uns der angeführte Grund §. 200. am meiſten überzeugend zu ſeyn. Eine weitere Ausführung, beſonders auch in Ruckſicht auf die Fluxionenmethode, findet man in den Käſtneriſchen Anfangsgr. T. IV. S. 1—28. doch iſt von dem Weſentlichen nichts von uns übergangen worden.

Die Anwendung der Differentialrechnung auf die vier Rechnungsarten, in poſitiven und negativen ganzen und gebrochenen Zahlen, auch Wurzeln, Potenzen und zuſammengeſezten Gröſſen.

§. 981. Willkührl. Satz. Die Differentialgröſſen werden durch den Buchſtaben d angezeigt; das Differentiale von x iſt dx, das von z, dz, das von y iſt dy. Die Engländer bedienen ſich ſtatt des d eines Punkts; z. E. $\dot{x}$, $\dot{y}$, u. ſ. w. wir werden uns immer des erſten Ausdrucks bedienen.

§. 982. Lehrſatz. Die Addition und die Subtraction, das iſt, die Summe und die Differenz der veränderlichen Gröſſen, wird mit einerley

Zei-

Zeichen durch bloſſe Verbindung mit dem d ausgedruckt; aber wann unveränderliche Gröſſen dabey ſind, ſo iſt das Differential eben das, welches es wäre, wenn keine unveränderliche Gröſſe dabey wäre.

Beweis.

Erſter Fall.

Es ſey $Z = u + x - y$ ſo iſt

$$Z + dZ = u + du + x + dx - y - dy$$

folgl. $dZ = du + dx - dy$.

Zweyter Fall.

$$Z = u + a$$
$$Z + dZ = u + du + a$$
$$dZ = du.$$

§. 983. Zuſatz. Man kann alſo ſagen, das Differential einer unveränderlichen Gröſſe ſey $= 0$; oder beſſer, es hat keines; dann was unveränderlich iſt, kann weder gröſſer noch kleiner, alſo auch nicht unendlich klein werden.

§. 984. Zuſatz. Wenn zwo veränderliche Gröſſen zuſammen einer unveränderlichen gleich ſind, ſo muß die eine abnehmen, wenn die andere wächßt, oder umgekehrt; dann wenn ſie beede wachſen oder abnehmen, ſo kann ihre Summe in allen Umſtänden nicht unveränderlich ſeyn. Folglich werden die Differentiale in dieſem Fall entgegengeſetzt, das eine poſitiv, das andere negativ: dann es ſey $x + y = a$; ſo iſt $dx + dy = 0$, und $dx = -dy$; oder $dy = -dx$.

§. 985. Lehrſatz. Das Differential des Products xy iſt die Summe aus den Producten jeden Factors in das Differential des andern.

Satz.

$$\text{diff.}\,(xy) = xdy + ydx.$$

Bew.

Es ſey $xy = Z$ ſo iſt $4Z = 4xy$. aber

$4xy = (x+y)^2 - (x-y)^2$ weil, wenn man wirklich quadrirt, herauskommt nach §. 145.

$$\begin{array}{l} x^2 + 2xy + y^2 \\ x^2 - 2xy + y^2 \\ - \quad + \quad - \\ \hline + 4xy. \end{array}$$ folgl. ſubtr.

$4Z = (x+y)^2 - (x-y)^2$ es ſey

I. $x+y = u$ | I. $x-y = v$. ſo iſt
$dx+dy = du$ | $dx-dy = dv$
II. $(x+y)^2 = u^2$ | II. $(x-y)^2 = v^2$
folgl. $d(x+y)^2 = 2udu$ §. 977. $d(x-y)^2 = 2vdv$ §. 977
aber $2udu = 2(x+y).(dx+dy)$ | $2vdv = 2(x-y).(dx-dy)$

wenn man nemlich die Wehrte von u und v ſubſtituirt.

folgl. $4dZ = 2(x+y).(dx+dy) - 2(x-y)(dx-dy)$
$= 2udu - 2vdv.$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} :2$$

$2dZ = (x+y)(dx+dy) - (x-y)(dx-dy)$

u. wenn man wirkl. multiplicirt und ſubtrahirt

$$\begin{array}{l} = xdx + ydx + xdy + ydy \\ = xdx - ydx - xdy + ydy \\ - \quad + \quad + \quad - \\ \hline \end{array}$$

$2dZ = 2ydx + 2xdy$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} :2$$

$dZ = ydx + xdy.$

§. 986. Zuſatz. Eben ſo iſt $d(xyz) = xydz + xzdy + yzdx$; da allemal das Product je zweyer Factorum in das Differentiale des dritten mul-

multiplicirt, und die Summe addirt wird. Hieraus läßt ſich das Diff. ($xyvz$) auf eine ähnliche Weiſe finden, wenn man nur je drey Factores in das Diff. des vierten multiplicirt.

§. 987. Anm. Den obigen Lehrſatz § 985. und Beweis findet man in den Käſtneriſchen Anfangsgründen; in den Wolfiſchen Elementen ſteht der bekannte, daß $(x+dx)(y+dy)$ gibt $xy+xdy+ydx+dxdy$; alſo die Differenz, wenn xy weggenommen wird $= xdy + ydx + dxdy$; aber $dxdy$ kann als eine gegen ydx wie nichts zu rechnende Gröſſe weggeworfen werden; folglich iſt das Diff. $xy = xdy + ydx$, aber nur beynahe wahr; weil $dxdy$ doch noch etwas iſt. Iſt aber nach anderer Meynung $dxdy$, wie ich ſelbſt vor zehen Jahren in meiner Lettre ſur quelques paradoxes du Calcul geſetzet habe, ein abſolutes Nichts, ſo müßten auch xdy und ydx nichts werden, dann eine poſitive Gröſſe mit Null multiplicirt, gibt allemal Null. Man mag inzwiſchen die Sachen betrachten wie man will, ſo ſind die Folgen der Rechnung gewiß und richtig.

§. 988. Lehrſatz. Das Differentiale des Quotienten iſt das Product des Diviſors in das Differentiale des Dividendus, weniger dem Product des Dividendus in das Differentiale des Diviſors, zuſammen dividirt durch das Quadrat des Diviſors. Man ſolle z. E. $\frac{x}{y}$ differenziren, ſo iſt

Satz.

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}.$$

Bew.

Es ſey $\frac{x}{y} = v$ ſo iſt

$x = vy$ alſo

$dx = vdx + ydv.$ und

$dx - vdy = ydv$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : y$$

$$\frac{dx - vdy}{y} = dv.$$ u. den Wehrt von v ſubſtit. $\frac{dx}{y}$

$\frac{dx}{y} - \frac{xdy}{y.y} = dv = d(\frac{x}{y})$ unter einerley Benennung

$\frac{ydy - xdy}{y^2} = dv.$

989. Lehrſatz. Das Differentiale von einer Wurzelgröſſe, wo die Exponenten negativ oder poſitiv, ganze oder gebrochene Zahlen ſeyn können, läßt ſich beſtimmen.

I. Satz.

$\sqrt[n]{u^m}$ das iſt

$u^{\frac{m}{n}}$ läßt ſich differenziren

Bew.

$u^{\frac{m}{n}} = w$ man ſetze ſo iſt

$u^m = w^n$ und

$mu^{m-1}du = nw^{n-1}dw$

da aber $w = u^{\frac{m}{n}}$.

ſo iſt $mu^{m-1}du = nu^{\frac{m-1}{n}}dw$:

$\frac{mu^{m-1}du}{nu^{\frac{m-1}{n}}} = dw.$ d. i.

$\frac{m}{n}u^{\frac{m}{n}-1}du = dw.$

II. Satz.

v^{-r} läßt ſich differenziren

Bew.

$v^{-r} = \frac{1}{v^r}$ §. 180.

nun ſeye $\frac{1}{v^r} = y$ ſo iſt

$1 = yv^r$ differenz.

$0 = y.rv^{r-1}dv + v^r dy$

alſo $-ryv^{r-1}dv = v^r dy$ und

$\frac{-ryv^{r-1}dv}{v^r} = dy.$ d. i. §. 175.

$-ryv^{-1}dv = dy.$

$y = \frac{1}{v^r} = v^{-r}$ ſubſt.

$-rv^{-r-1}dv = dy.$

§. 990. Zuſatz. Aus dem erſten Satz erhellet, daß man Potenzen von gebrochenen Exponenten, und aus dem andern, daß man Potenzen von negativen Exponenten differenziren könne; folglich iſt die Differentiationsregel auf alle auch Irratio-

nalgröſſen, die man als Brüche betrachten kann, anzuwenden.

§. 991. Zuſatz. Aus dem Verfahren §. 989. ſiehet man, daß bey Potenzen von ganzen, gebrochenen und negativen Exponenten, folglich auch bey allen Wurzelngröſſen die Differentiation geſchiehet, wenn man den Exponenten um eins vermindert, und hernach mit dem Product aus dem unveränderten Exponenten in das Differentiale der veränderlichen Gröſſe alles multiplicirt. So iſt $\sqrt[r]{x^3} = x^{\frac{3}{r}}$ differenzirt $= \frac{3}{r}x^{\frac{3}{r}-1}dx$; und $d(\sqrt[3]{x^r}) = d(x^{\frac{r}{3}}) = \frac{r}{3}x^{\frac{r-1}{3}}dx$.

§. 992. Lehrſatz. Potenzen und Wurzeln von zuſammengeſezten veränderlichen und unveränderlichen Gröſſen laſſen ſich differenziren.

Satz.

$\sqrt{(aa - xx)}$ läßt ſich differenziren.

Bew.

Es ſey $\sqrt{(aa - xx)} = y$. ſo iſt

$aa - xx = y^2$

$\overline{}$ diff.

$-2xdx = 2ydy$ oder

$\overline{}$: 2

$-xdx = ydy$.

$\overline{}$: y

$\frac{-xdx}{y} = dy$ aber es iſt $y = \sqrt{aa - xx}$ geſezt,

folgl. $\frac{-xdx}{\sqrt{aa - xx}} = d(\sqrt{aa - xx})$

§. 993. Anm. Eben ſo differenzirt man $\sqrt{ax - xx}$, und das Differentiale iſt $\frac{adx - 2xdx}{2\sqrt{(ax - xx)}}$; wie leicht erhellet, wenn man den obigen Ausdruck $= y$ ſezt; und wie vorher calculirt; überhaupt werden durch die Subſtitutionen viele Vortheile im Differenziren und Integriren gefunden, wie im folgenden vorkommt;

kommt; dieſer lezte Lehrſatz, der doch nöthig war, iſt in den meiſten Compendien bey der Lehre von Differenziren bisher übergangen worden.

Allgemeiner Beweis des Newtoniſchen Binomii und des Harriotiſchen Lehrſatzes.

§. 994. Anm. Bey dem Newtoniſchen Binomio kommt es nur darauf an, daß man die Coefficienten beſtimme; dann daß die Potenzen von a ab- und die von b in eben der Ordnung zunehmen müſſen, iſt ſchon §. 217. unumſtößlich erwieſen. Der Beweis wird alſo nur auf die Coefficienten gehen, wie wir ihn jezo vortragen.

§. 995. Lehrſatz. In dem Newtoniſchen Binomio ſind die Coefficienten, wenn der Exponent n iſt, 1, $\frac{n}{1}$., $\frac{n.n-1}{1.2}$., $\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}$ u. ſ. w.

Beweis.

Man nenne die Coefficienten A, B, C u. ſ. w. ſo iſt nach §. 217.

nr. I. $(a+x)^n = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 + Ca^{n-3}x^3 \ldots$

die Reyhe heiſſe = S, ſo iſt

$(a+x)^n = S$. dieſer Ausdruck differenzirt gibt

$n(a+x)^{n-1}dx = dS$ nach §. 976.

$(a+x)^n = S$ man dividire damit, ſo iſt nach §. 175.

$$\frac{ndx}{a+x} = \frac{dS}{S}$$

$. a+x$

$$ndx = (a+x)\frac{dS}{S}.$$

$. S$

$$nSdx = (a+x)dS$$

$$\overline{\phantom{nS = (a+x)\frac{dS}{dx}}} : dx$$

$$nS = (a+x)\frac{dS}{dx}$$ und

$$o = (a+x)\frac{dS}{dx} - nS.$$ dieſen Wehrt muß man in der Reyhe nr. I. ſubſtit. dann es iſt

$$S = a^n + Aa^{n-1}x + Ba^{n-2}x^2 - - -$$ und

$$dS = o + Aa^{n-1}dx + 2Ba^{n-2}xdx + 3Ca^{n-3}x^2 dx \ldots$$

$$\frac{dS}{dx} = o + Aa^{n-1} + 2Ba^{n-2}x + 3Ca^{n-3}x^2 \ldots$$

$$\overline{\phantom{\frac{dS}{dx} = o + Aa^{n-1} + 2Ba^{n-2}x + 3Ca^{n-3}x^2}}\; a+x$$

$$(a+x)\frac{dS}{dx} = o + Aa^n + 2Ba^{n-1}x + 3Ca^{n-2}x^2 + 4Da^{n-3}x^3$$

$$Aa^{n-1}x + 2Ca^{n-2}x^2 + DCa^{n-3}x^3$$

$$-nS = -na^n - nAa^{n-1}x - nBa^{n-2}x^2 - - - -$$

$$(a+x)\frac{dS}{dx} - nS = o + (Aa^n - na^n) + \left.\begin{matrix}2Ba^{n-1}\\ + Aa^{n-1}\\ - nAa^{n-1}\end{matrix}\right\} x + \left.\begin{matrix}+3Ca^{n-2}\\ + 2Ba^{n-2}\\ - nBa^{n-2}\end{matrix}\right\} x^2$$

Da nun diß alles $= o$, aber x nicht null, ſo iſt ein jeder von den Coefficienten $= o$, folglich

I. $Aa^n - na^n = o.$

$$Aa^n = na^n$$
$$\overline{} : an$$
$$A = n.$$

II. $2Ba^{n-1} + Aa^{n-1} - nAa^{n-1} = o$

$$\overline{\phantom{2Ba^{n-1} + Aa^{n-1} - nAa^{n-1} = o}} : a^{n-1}$$

$$2B + A - nA = o$$ und

$$2B = nA - A = (n-1)A.$$ aber

nr. I. $A = n.$

$$2B = n.n-1.$$
$$\overline{} : 2$$
$$B = \frac{n.n-1}{1.2}$$

III,

$$\text{III. } 3Ca^{n-2} + 2Ba^{n-2} - nBa^{n-2} = 0 \quad : a^{n-2}$$

$$3C + 2B - nB = 0$$

$$3C = nB - 2B = (n-2)B \text{; aber}$$

$$B = \frac{n \cdot n - 1}{1 \cdot 2}$$

$$3C = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n - 2}{1 \cdot 2} \quad : 3$$

$$C = \frac{n \cdot n - 1 \cdot n \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$ u. ſ. w.

§. 996 Anm. Dieſen Beweis habe in meiner Lettre ſur quelques paradoxes du Calcul a. 1753 und hernach in meinen erſten Gründen aller mathematiſchen Wiſſenſch. 1759. gegeben. Herr Prof. Käſtner gab einen völlig ähnlichen 1758. in einem Progr. unter dem Titel: Theorema binominale univerſaliter demonſtratum heraus. Warum ein ſo allgemeiner Beweis nöthig ſeye, haben wir §. 215. ſchon gemeldt; dann man ſiehet daraus, daß man das binomial Theorema auch bey gebrochenen und negativen Exponenten ſicher gebrauchen darf.

§. 997. Anm. Was den Harrotiſchen Lehrſatz betrift, ſo kommt es nur auf die Frage an, warum die Wurzeln, wenn ſie alle möglich ſind, bejaht ſeyen, woferne die Zeichen abwechſeln, und verneint, woferne ſie ohne Abwechslung folgen; dann das übrige vom Harriotiſchen Lehrſatz iſt §. 332. richtig erwieſen.

§. 998. Lehrſatz. So viel in einer quadratiſchen Gleichung Abwechslungen der Zeichen ſind, ſo viel hat ſie affirmative Wurzeln; und ſo viel Folgen der Zeichen ſind, ſo viel hat ſie negative Wurzeln.

Beweis.

Es gibt bey quadratiſchen Gleichungen nicht mehr als folgende vier Formen, nach den Combinationsregeln; weil x^2 allemal das Zeichen + hat. §. 209.

Quadrate.

I. $x^2 + px + q$. hat zwo Folgen; II. $x^2 - px + q$. zwo Abwechslungen;

III. $x^2 + px - q$. eine Folge u. eine Abwechsl. IV. $x^2 - px - q$. eine Folge u. eine Abwechsl.

Wurzeln.

I. $-\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$ zwo negative Wurzeln. II. $+\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 - q)$. zwo affirmative Wurzeln.

III. $-\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$ eine poſitive und negative. IV. $+\frac{1}{2}p \pm \surd(\frac{1}{4}p^2 + q)$. eine poſitive und negative.

§. 999. Anm. Weil die cubiſche Gleichung differenzirt eine quadratiſche wird, aber von einer quadratiſchen der Lehrſatz erwieſen, ſo gilt er auch von den cubiſchen; und weil die biquadratiſche differenzirt die cubiſche wird, ſo gilt der Schluß auch von der biquadratiſchen und ſo fort von allen hohen Gleichungen.

§. 1000. Anm. Eine allgemeine cubiſche Gleichung läßt ſich ausdrucken $x^3 \mp qx + r = y$, und das Differentiale iſt $3x^2dx + qdx = dy$, folgl. $3x^2 \mp q = \frac{dy}{dx}$ eine quadratiſche Gleichung, welche null geſezt, gibt $x = \pm \surd - \frac{1}{3}q$ oder $= \pm \surd \frac{1}{3}q$. Iſt q bejaht, ſo hat die Gleichung im erſten Fall zwo unmögliche oder eingebildete Wurzeln, im andern aber zwo mögliche; vom lezten Fall iſt die Rede. Wenn man aus der Combinationslehre den leicht zu erweiſenden Lehrſatz noch dazu nimmt, daß eine Reyhe von Zeichen + und — die mit + anfangt, Abwechslungen in gerader Zahl haben, wenn ſie ſich mit +, und in ungerader Zahl, wenn ſie ſich mit — endiget, und bedenkt, daß die Schlüſſe nur gelten, wenn die Wurzeln alle möglich ſind, ſo wird man einen ausführlichen Beweis von dieſem Lehrſatz geben können, wie ihn Herr Prof. Käſtner gegeben; uns genüget, die erſte Gründe davon geſagt zu haben. Herr v. Segner hat einen Beweis davon gegeben, er läßt ſich aber nicht mit ſo wenig Worten vortragen wie der Käſtneriſche, davon wir nur einen kurzen Begriff Auszugsweiſe geben wollten.

Allgemeine Betrachtung der höhern Differentialien.

§. 1001. Erklär. Wenn man eine Reyhe Gröſſen in einer Ordnung fortſchreibt, und ihre

Diffe-

Differenzen ſucht, und von den Differenzen wieder Differenzen, u. ſ. f. ſo heißt man die erſte Reyhe die Hauptreyhe, die folgende heiſſen die Differenzreyhen, deren Coefficienten ſich finden laſſen.

Hauptreyhe	I. Differenzreyhe	III. Differenzreyhe
K		
L	L — K	
M	M — L	M — 2L + K
N	N — M	N — 2M + L
O	O — N	O — 2N + M
P	P — O	P — 2O + M

III. Differenzreyhe	IV. Differenzreyhe
N — 3M + 3L — K	
O — 3N + 3M — L	O — 4N + 6M — 4L + K
P — 3O + 3N — M	P — 4O + 6N — 4M + L

§. 1002. Zuſatz. Auſſer dem, daß die Coefficienten der Differenzreyhen, mit den Binomialcoefficienten einerley ſind, erhellet aus der Tabell folgendes:

I. Entſtehen die höhern Differenzreyhen durch die Subtraction der correſpondirenden niederen Reyhe von dem unmittelbar vorhergehenden Glied; z. E. der II. Differenzreyhe erſtes Glied iſt M — 2L + K = M — L — (L — K) der Differenz der vorhergehenden Reyhe; N — 2M + L = N — M — (M — L.)

II. Durch die Addition zweyer erſten Glieder zwoer nächſten Reyhen, wird das zweyte Glied der erſtern Reyhe gefunden u. ſ. w. z. E. K + (L — K) = L; und (L — K) + (M — 2L + K) = M — L.

III. Die Summe aller erſten Glieder mit den Bino-

mialcoefficienten drukt das gegebene Glied der Hauptreyhe aus. z. E. Das vierte Glied der Hauptreyhe N wird durch die Summe der vier erſten Glieder der Reyhen, mit den Binomialcoefficienten multiplicirt, ausgedrukt; $N = K + 3(L - K) + 3(M - 2L + K) + (N - 3M + 3L - K)$ Eben ſo fällt es bey O, P, in die Augen.

§. 1003. Willk. Satz. I. Die Glieder der Hauptreyhe K, L, M, N, u. ſ. w. heiſſe man y, $y1$, $y2$, $y3$, $y4$, u. ſ. w. bis yn. da die Zahlen die Stellen der Glieder bedeuten; II. die erſte Differenzreyhe heiſſe $\Delta 1$, und ihre Glieder $L - K$, $M - L$, u. ſ. w. $1\Delta 1$, $2\Delta 1$, $3\Delta 1$, $4\Delta 1$ u. ſ. w. III. Die zweyte Differenzreyhe heiſſe $\Delta 2$ und ihre Glieder $1\Delta 2$, $2\Delta 2$, $3\Delta 2$, $2\Delta 3$ u. ſ. w.

§. 1004. Lehrſ. Ein jedes Glied der Differenzreyhen läßt ſich durch eine allgemeine Reyhe aus den Gliedern der Hauptreyhe ausdrucken.

Satz.

$$1\Delta n = yn - n.yn - 1 + \frac{n.n-1}{1.2}.yn - 2.$$

Bew.

$1\Delta 1 = y1 - y.$

aber $2\Delta 1 = y2 - y1.$ nach §. 1002. nr. I.

fgl. ſubtr. $2\Delta 1 - 1\Delta 1 = y2 - 2y1 + y.$

aber $2\Delta 1 - 1\Delta 1 = 1\Delta 2$ nach §. cit. nr. I.

$1\Delta 2 = y2 - 2y1 + y$

$2\Delta 2 = y3 - 2y2 + y1.$

fgl. ſubtr $2\Delta 2 - 1\Delta 2 = y3 - 3y2 + 3y1 - y$

aber

aber $2\Delta 2 - 1\Delta 2 = 1\Delta 3$ nach §. cit.

folgl. $1\Delta 3 = y3 - 3y2 + 3y1 - y$.
ferner $2\Delta 3 = y4 - 3y3 + 3y2 - y1$.

alſo $2\Delta 3 - 1\Delta 3 = 1\Delta 4 = y4 - 4y3 + 6y2 - 4y1 + y$.
dahero alles allgemein

$$1\Delta n = yn - nyn-1 + \frac{n\,n-1}{1\,.\,2}\,yn-2 \ldots$$

§. 1005. Zuſ. Weil $1\Delta n = yn - nyn-1 + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}.\,yn-2$

und $2\Delta n = yn+1 - nyn + \frac{n.n-1}{1\,.\,2}\,yn-1$.

ſo iſt auch $2\Delta n - 1\Delta n = 1\Delta n+1 = yn+1 - (n+1)yn + (n+1)nyn-1$.

§. 1006. Lehrſ. Ein jedes Glied der Hauptreyhe läßt ſich durch eine Reyhe aus den Gliedern der Differenzreyhen beſtimmen.

Satz.

$$yn = y + A1\Delta 1 + B1\Delta 2 + C1\Delta 3 \ldots + R1\Delta r$$

Bew.

nr. I. $y1 = y + 1\Delta 1$
$y2 = y1 + 2\Delta 1$
aber $2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$ §. 1002, nr. II

$y2 = y1 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2$
$y1 = y + 1\Delta 1$

$y2 = y + 2.\,1\Delta 1 + 1\Delta 2$

nr. II. $y3 = y2 + 3\Delta 1$
$3\Delta 1 = 2\Delta 1 + 2\Delta 2$
$2\Delta 1 = 1\Delta 1 + 1\Delta 2$ ſubſt.

$y3 = y2 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2 + 2\Delta 2$
$2\Delta 2 = 1\Delta 2 + 1\Delta 3$

$$y3 = y2 + 1\Delta 1 + 1\Delta 2 + 1\Delta 2 + 1\Delta 3 = y2$$
$$+ 1\Delta 1 + 2 . 1\Delta 2 + 1\Delta 3$$

aber nr. I. $y2 = y + 2 . 1\Delta 1 + 1\Delta 2$

folgl. $y3 = y + 3 . 1\Delta 1 + 3 . 1\Delta 2 + 1\Delta 3$.
folglich allgemein, wenn man für die Binomialcoefficienten A, B, C, D u. ſ. w. ſetzet

$$yn = y + A . 1\Delta 1 + B . 1\Delta 2 + C\, 1\Delta 3 \ldots$$
$$+ R\, 1\Delta r + S\, 1\Delta r + 1 \ldots$$

§. 1007. Zuſatz. Alſo iſt auch $yn + 1 = y2 + A2\Delta 1 + B2\Delta 2 \ldots + R2\Delta r$. weil die Lage von $yn + 1$ gegen die zweyte Glieder der Reyhe einerley iſt mit der Lage yn gegen die erſte Reyhe der Glieder.

§. 1008. Anm. Die Allgemeinheit dieſer Formeln hat Herr Prof. Käſtner ausführlich bewieſen; man findet ſie zwar nicht in den Wolfiſchen Elementen; inzwiſchen ſind ſie wegen den neuern Schriften unentbehrlich; wie wir im folgenden zeigen werden. Ubrigens enthalten die zwey Lehrſätze den allgemeinen Beweis der Lehre von den Differenzreyhen, die §. 235. folg. vorgetragen wurde.

§. 1009. **Willk. Satz.** Man drukt die höhere Differentiale, das iſt, das zweyte, dritte, vierte, nte Differential von y aus durch d^2y, d^3y, d^4y, d^ny, und heißt ſie auch differentio Differentialien.

§. 1010. Zuſatz. Man kann alſo für $\Delta 1$, $\Delta 2$, $\Delta 3$, Δ^n §. 1003. auch ſchreiben, dy, d^2y, d^3y, d^ny; als worein ſich die Unterſcheide verwandeln, wenn die Abnahme ins Unendliche geht.

§. 1011. Lehrſatz. Die differentio Differentiation geſchiehet wie die Differentiation der endlichen variablen Gröſſen.

Bew.

Bew.

Bey der Addition und Subtraction, oder Summe und Differenz iſt es vorhin richtig; aber auch bey der Multiplication und Diviſion findet man einerley Geſez. Dann es ſey xdx noch einmal zu differenziren; man ſetze

$$xdx = z \text{ ſo iſt } dx = \frac{z}{x} \text{ und } d^2x = \frac{xdz - zdx}{x^2} \text{ §. 988}$$

$$\text{folgl. } x^2d^2x = xdz - zdx$$

$$\text{und } x^2d^2x + zdx = xdz.$$

aber $z = xdx$ nach der Vorausſetzung; diß ſubſtit.

$$x^2d^2x + xdxdx = xdz \quad : x$$

$$xd^2x + dxdx = dz. \quad \text{das iſt}$$

$xd^2x + dx^2 = \text{diff. } xdx.$ Durch dieſe Reduction ſiehet man alſo, daß man wie bey endlichen Gröſſen jeden Factor in das Differentiale des andern multipliciren muß.

§. 1012. Zuſatz. Das Differentiale von dx^2 iſt alſo nach einer ähnlichen Reduction $2dxd^2x$; u. ſ. w.

§. 1013. Zuſatz. Aus gleichem Grunde iſt

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dxd^2y - dyd^2x.}{dx^2}$$

§. 1014. Zuſatz. Um den höhern Differentialen einen beſondern Wehrt zu geben, ſezt man ein erſtes Differentiale, oder eine Gröſſe unveränderlich. Wenn $dy = pdx$, ſo iſt $ddy = dpdx + pd^2x$, iſt nun dx unveränderlich, ſo iſt $ddy = dpdx$.

Die Beſtimmung der Wehrte durch höhere Differentialien, und die Verwandlung der Gleichungen durch eben dieſe Mittel.

§. 1015. Lehrſatz. Wenn in dem Newtoniſchen Binomio m unendlich wird, ſo läßt ſich der Wehrt beſtimmen, dem ſich die Reyhe nähert.

Bew.

Es ſeye c eine beſtändige endliche Gröſſe, e eine, die unendlich abnehme, ſo iſt $m = \frac{c}{e} = \infty$, iſt nun das Glied des Binomii

$\frac{m.(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2.\ldots n} = P.$ ſo iſt, den Wehrt von m ſubſtituirt,

$\left(\frac{c}{e}\cdot\left(\frac{c}{e}-1\right)\cdots\left(\frac{c}{e}-n+1\right)\right):1.2\ldots n.$ diß unter einerley Benennung

$= \frac{c(c-e)\ldots(c-(n-e)e)}{e^n}:1.2\ldots n = P$

$= \frac{c(c-e)\ldots(c-(n-e)e)}{1.2\ldots n.e^n} = P$ woraus folgt, weil e unendlich abnimmt,

$\frac{c^n}{1.2\ldots n.e^n} = \frac{m^n}{1.3\ldots n.}$ weil $\frac{c^n}{e^n} = m^n$.

§. 1016. Lehrſatz. Der Wehrt von einer Gleichung, z. E. $x^3 + x^2 + x$, läßt ſich finden, wenn ſich z. E. x in $x + e$, oder $x + 2$ verwandelt.

Bew.

Es verwandle ſich y in ym wenn ſich x in $x + mc$ verwandelt; m wachſe unendlich, und e nehme unendlich ab, c ſeye eine beſtändige Gröſſe, ſo iſt wie oben $m = \frac{c}{e}$, und $me = c$; und e verwandelt ſich durch die unendliche Abnahme in dx.

Nun iſt nach §. 1006. $ym = y + A\Delta 1 + B\Delta 2 \ldots + N\Delta n$.

das iſt nach §. cit. $ym = y + Ady + Bddy \ldots + Nd^n y$.

und wenn ſich e in dx verwandelt, ſo iſt der Nte Binomialcoeffi-

efficient für ym, wo $m = \frac{c}{e} = \frac{c}{dx} = \frac{c^n}{1.2.3ndx^n}$ nach §. 1015.

folglich die Reyhe

$$ym = y + \frac{cdy}{dx} + \frac{c^2d^2y}{1.2.dx^2} + \frac{c^3d^3y}{1.2.3.dx^3} + \frac{c^4d^4y}{1.2.3.4dx^4} \ldots$$

$$\ldots + \frac{c^nd^ny}{1.2..ndx^n}.$$

§. 1017. Zuſatz. Wenn ſich x in x — e verwandelt, ſo wechſeln die Zeichen + — ab; wie aus dem binomiſchen Lehrſatz erhellet.

§. 1018. Zuſatz. Gehen die Differentiale von y nicht ohne Ende fort, ſo wird die Reyhe abgebrochen, und man kann ſie vollkommen berechnen.

§. 1019. Anm. In der Gleichung $x^3 + x^2 + x$ verwandle ſich x in x + 2, ſo iſt c = 2. folglich

$y = x^3 + x^2 + x$

$\frac{cdy}{dx} = 6x^2 + 4x + 2$ weil $dy = 3x^2dx + 2xdx + dx$

$\frac{c^2d^2y}{1.2dx^2} = 12x + 4$ weil $ddy = 6xdx^2 + 2dx^2$

$\frac{c^3d^3y}{1.2.3.dx^3} = + 8$ weil $d^3y = 6dx^3$; dieſe Ausdrücke mit den Coefficienten

$ym = x^3 + 7x^2 + 17x + 14$ | $\frac{c}{dx}, \frac{c^2}{2dx}, \frac{c^3}{6dx^3}$ multiplic. gibt die bezeichnete Wehrte, wo $c = 2$, $c^2 = 4$, $c^3 = 8$.

Man findet alſo den Wehrt auf eben diejenige Weiſe, wie man ihn in den arithmet. Wiſſenſchaften, §. 344. gefunden hat.

Nic. Bernoulli Methode,

Alle mögliche Reyhen, durch die ſich eine Gleichung auflöſen läßt, und die Geſtalt der Reyhen, zu finden.

XX

§. 1020. Lehrſatz. Wenn einer auf null redu-

ducirten Gleichung Hauptglied $y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots$ geſezt wird, und ſodann die correſpondirende Gleichungsglieder mit den Potenzen, Differentialen u. ſ. w. correſpondirende Reyhen bekommen, ſo laſſen ſich die Coefficienten auch aus den Exponenten beſtimmen.

Beweis.

Es ſey $rrdy^2 - rr + yy = 0$; man differ. noch einmal, ſo iſt $2rrdyddy + 2ydy = 0$, u. durch $2dy$ dividirt $rrddy + y = 0$. Wann nun $r = 1$. ſo iſt, wofern

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} \ldots \text{ geſezt wird.}$$

$$dy = \alpha Ax^{\alpha-1} + \beta Bx^{\beta-1} + \gamma Cx^{\gamma-1} \ldots$$

$$ddy = (\alpha-1)\alpha Ax^{\alpha-2} + (\beta-1)\beta\gamma x^{\beta-2} + (\gamma-1)\gamma Cx^{\gamma-2}.$$

$$\text{folglich } ddy + y = \left.\begin{matrix} \alpha-1\alpha Ax^{\alpha-1} \\ +Ax^{\alpha} \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} (\beta-1)\beta Bx^{\beta-2} \\ Bx\beta \end{matrix}\right\} + \left.\begin{matrix} (\gamma-1)\gamma Cx^{\gamma-2} \\ Cx^{\gamma}. \end{matrix}\right\} \ldots$$

Nun ſey $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = \alpha + 2$, $\delta = \beta + 2 = 3$, $\varepsilon = \gamma + 2 = 4 \ldots$ ſo iſt A, B unbeſtimmt, weil $\alpha = 0$, und $\beta - 1 = 0$; aber $C = -\frac{A}{\gamma.(\gamma-1)}$; $D = \frac{-B}{\delta.(\delta-1)}$

Man ſezt nemlich bey einer ſteigenden Reyhe, wo x den kleinſten Exponenten hat, α erſtlich negativ, dann null, ferner poſitiv; woraus man A, B, C, D u. ſ. w. beſtimmt, wie §. 348. gelehrt worden.

§. 1021.

§. 1021. Zuſatz. Wollte man in der erſten Reyhe nicht wieder differenziren, ſondern unverändert laſſen $rrdy^2 - rr + yy = 0$, ſo iſt nach §. 348.

$$yy = AAx^{2\alpha} + 2ABx^{\alpha+\beta} + 2ACx^{\alpha+\gamma} + 2ADx^{\alpha+\delta}$$
$$BBx^{2\beta} + 2BCx^{\beta+\gamma}$$

$$rrdy^2 = \alpha^2 A^2 r^2 x^{2\alpha-2} + 2\alpha\beta AAr^2 x^{\alpha-\beta-2} \; - - -$$

wenn man nemlich den Wehrt von dy §. 1020. mit ſich ſelbſt multiplicirt

$$-rr = -rr$$

Hieraus werden die Coefficienten zu beſtimmen geſucht; wobey verſchiedenes in Ruckſicht auf die Exponenten u. ſ. w. in acht zu nehmen; davon Herr Prof. Käſtner §. 466. IV. Th. der Mathem. nachgeſehen werden kann; α wird nemlich zuerſt negativ, hernach 0, und ſodann poſitiv geſezt, da man ſieht, was herauskommt, und ob bey dieſer oder jener Gleichung dieſe Vorausſetzungen angehen; übrigens iſt die gegebene Auflöſung §. 1020. allgemeiner als dieſe, wie Herr Prof. Käſtner auch anmerkt in der ſchon gemeldten Stelle.

§. 1022. Zuſatz. Wenn $xxddy - ny = 0$, ſo iſt wie oben

$$ddy = (\alpha-1)\alpha Ax^{\alpha-2} + (\beta-1)\beta Bx^{\beta-2} \; \ldots$$
$$x^2 = x^2$$

multiplicirt nach §. 175.

$$x^2 ddy = (\alpha-1)\alpha Ax^{\alpha} + (\beta-1)\beta Bx^{\beta} \; \ldots\ldots$$

wo bey den Expon. —2 hinwegfällt;

$$ny = nAx^{\alpha} + nBx^{\beta} \; \ldots\ldots$$

$$\text{folgl. } xxddy - ny = (\alpha-1)\alpha) - n)Ax^{\alpha} + (\beta-1)\beta)$$
$$- nBx^{\beta} + (\gamma-1)\gamma) - n)Cx^{\gamma} \; - - - -$$

Man

Man ſetze wie §. 1020. jeden Coefficienten $= c$, ſo iſt $(\alpha\alpha - \alpha - n) A = 0$ und

$$\frac{(\alpha\alpha - \alpha - n) A = 0}{\alpha\alpha - \alpha - n = 0} : A$$

folglich

$$\alpha\alpha - \alpha = n$$ und nach §. 322.

$$\alpha = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4} + n)}$$ eben ſo iſt aus ähnlicher Rechnung

$\beta = \frac{1}{2} \mp \sqrt{(\frac{1}{4} + n)}$; für γ kommt eben dieſe Gleichung heraus; welches alſo entweder α oder β ſeyn müßte; (dann α und β ſind nicht gleich wegen den verſchiedenen Zeichen $\mp$, davon die obere für eine fallende, die untere für eine ſteigende Reyhe gelten) es ſoll aber keines von beeden ſeyn; folglich iſt C u. ſ. w. null; und der Wehrt von y beſteht in den beeden gefundenen Theilen.

§. 1023. Anm. Bey dieſer Methode iſt noch verſchiedenes zu merken, das bey jeden vorkommenden Fällen ein geübter Verſtand von ſelbſt finden wird. In dem Käſtneriſchen Werk findet man dergleichen Fälle und Exempel, wie wir ſchon angemerkt, und verweiſen unſere Leſer um ſo eher dahin, als wir hier nur das Weſentliche dieſer Regel, die einen groſſen Vorzug vor dem Newtoniſchen Parallelogramm hat, vorzutragen geſonnen waren.

Die Methode vom Kleinſten und Gröſten.

(Methodus de maximis & minimis.)

§. 1024. **Erklär.** Wenn eine Function einer Gröſſe, z. E. von x bis auf einen gewiſſen Grad oder Wehrt wächßt, und von da an wieder abnimmt, indeme x beſtändig zu- oder abnimmt, ſo heißt dieſer Wehrt ihr Gröſtes (Maximum).

§. 1025. Anm. So hat die Ellipſe und der Cirkel ein Maximum in den Ordinaten; dann die gröſte Ordinate des Cirkels iſt der Radius, und hernach nehmen ſie wieder ab, unerachtet die Abſciſſe x immer wächßt. Oder in Zahlen: wenn man ſagt, 8 ſolle

8 ſolle ſo getheilt werden, daß die beede Theile als Factores das gröſte Product geben, ſo ſind die Factores 4.4; dann 4.4 = 16 Maximum; ein jedes anders Product iſt kleiner; z. E. 2, 6; 3. 5 u. ſ. w. eben ſo iſt für $x^2 - 10x + 60 = y$, dieſes y für x ein kleinſtes, wenn x = 5; es iſt alsdann 35. Jeder andere Wehrt von x, z. E. 4, oder 6 gröſſer, beedesmal nemlich = 36. Man kann ſie auch in poſitive und negative Maxima und Minima eintheilen, auch theils einförmige, theils vielförmige Functionen dißfalls betrachten; die einförmige kommen zuerſt vor.

§. 1026. Lehrſatz. Das Maximum oder Minimum wird gefunden, wenn man die Differentialgleichung davon = 0 ſezt, und ferner durch calculiren den Wehrt von x oder y ſucht.

Bew.

Weil ein Maximum oder Minimum, als ein ſolches, unveränderlich iſt, ſo iſt ſein Differential = 0; wenn man alſo eine ſolche gegebene Gröſſe differenzirt, das Differentiale = 0 ſezt, ſo kann man den Wehrt des Maximi oder Minimi in leichtern Fällen finden. Man verlangt das Maximum im Cirkel; die Gleichung iſt $ax - x^2 = y^2$, dieſes iſt ein Maximum; folglich

$ax - x^2 =$ Maxim.

diff.

$adx - 2xdx = 0$ und

$adx = 2xdx$ folglich

$a = 2x.$ und

$\frac{1}{2}a = x.$ wo alſo die Abſciſſe dem halben Diameter gleich iſt, da iſt das Maximum der Ordinate des Cirkels, eben ſo wird das Exemp. §. 1025. berechnet.

§. 1027. Anm. So hat man dieſe Lehre anfänglich vorgetragen, und ſo ſteht ſie in den Wolfiſchen Elementen; allein in neuern Zeiten fande man beſſere und allgemeinere Methoden, die Umſtände genau zu beſtimmen, unter welchen eine Function von x ein Maximum oder Minimum wird; wir wollen ſie kürzlich anführen.

§. 1028. Anm. Wenn $\frac{dy}{dx} = (x - f)^2 P$ geſezt wird, wo P eine Function von x iſt, die x — f nicht zum Factor hat, ſo iſt f ein gröſtes oder kleinſtes, wenn der Exponent m ungerade iſt; iſt aber m gerade, ſo iſt die Function weder ein gröſtes noch ein kleinſtes. Dann y ſeye eine einförmige Function von x, und x verwandle ſich zuerſt in $x + \alpha$, hernach in $x - \alpha$; (α kann ſo klein ſeyn als man will) ſo gibt es die beede Reyhen, nach §. 1016. folg.

$$\text{I.}\quad y + \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2 y}{2dx^2} + \frac{\alpha^3 d^3 y}{6dx^3}$$

$$\text{II.}\quad y - \frac{\alpha dy}{dx} + \frac{\alpha^2 d^2 y}{2dx^2} - \frac{\alpha^3 d^3 y}{6dx^3}$$

iſt nun y ein gröſtes oder kleinſtes, ſo muß es in beeden Fällen gröſſer oder kleiner als jeder der gefundenen Wehrte ſeye.

Diß aber kann nicht geſchehen, es ſey dann $\frac{dy}{dx} = 0$; ſezt man dieſes, und $\frac{ddy}{dx^2}$ iſt endlich, ſo müſſen die nachgehends folgende Glieder zuſammen weniger als dieſes dritte Glied betragen, wenn y ein gröſtes oder kleinſtes ſeyn ſoll. Iſt aber auch $\frac{ddy}{dx^2} = 0$, ſo läßt ſich noch nichts ſchlieſſen.

Es ſeye alſo $\frac{ddy}{dx^2} = p$, $\frac{d^3y}{dx^3} = q$, $\frac{d^4y}{dx^4} = r$, ſo ſind, wenn f ſtatt x geſezt wird, deſſen Wehrt alsdann F heiſſe, die Reyhen in folgende verwandelt.

$$\text{I.}\quad F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p + \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r$$

$$\text{II.}\quad F + \tfrac{1}{2}\alpha\alpha p - \tfrac{1}{6}\alpha^3 q + \tfrac{1}{24}\alpha^4 r$$

wo das zweyte Glied $\frac{dy}{dx} = 0$, fehlt; und die Schlüſſe hier wie oben gemacht werden. Dann wenn $p = 0$, und q endlich, ſo iſt F weder ein gröſtes noch kleinſtes; iſt aber $q = 0$, und r endlich, ſo iſt F ein gröſtes oder kleinſtes. Auf dieſe Weiſe gehen die Schlüſſe immer fort, nach den ungeraden Gliedern von y, nemlich 1, 3, 5, 7 u. ſ. w. daraus folgt, daß wenn $\frac{dy}{dx} = (x-f)^2 P$, und P eine Function von x iſt, die x — f nicht zum Factor hat, f ein gröſtes oder kleinſtes werde, wenn von $(x - f)^m P$ der

Expo-

Exponent m ungerade iſt; iſt er aber gerade, ſo iſt er weder ein gröſtes noch ein kleinſtes. Beedes erhellet auch, wenn man $(x-f)^2 P$ differenzirt und differentio differenzirt, und hernach $x=f$ ſetzet, und ſiehet was herauskommt; bey ungeraden Exponenten wird allemal ein gröſtes oder kleinſtes herauskommen.

§. 1029. Zuſatz. Das gröſte Dreyeck in einem halben Cirkel iſt das gleichſchenklichte; welches auf eine ähnliche Weiſe erhellet.

Von den Tangenten, Subtangenten, Normal- und Subnormallinien.

§. 1030. Erkl. Wenn *Fig.* 114. die krumme Linie AM von TM in M berührt wird, ſo heiſt TM die Tangente, TP die Subtangente, QM die Normallinie, die auf TM perpendicular ſteht, und PQ die Subnormallinie.

§. 1031. Lehrſatz. Die Subtangente in allen krummen Linien iſt $\frac{ydx}{dy}$.

Bew.

Man ziehe pm und PM unendlich nahe, und MR parallel mit Pp, ſo iſt $\triangle$ MmR $\backsim$ TMP, folglich

mR : MR = PM : PT = Subtangente.

$$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy}$$

§. 1032. Anm. Das dreyeck MmR iſt das Leibniziſche ſogenannte Triangulum characteriſticum, oder das Barroviſche Dreyeck, indeme Barrow, wie wir ſchon gemeldt, dieſe nemliche Proportion lang vor Newton und Leibniz in ſeinen Lectionibus opticis bekannt gemacht, und was Leibniz dy und dx nennt, e und a genannt hat, dahero nach Barrow die Tangente PT = $\frac{ay}{e}$, welches eben ſo viel als $\frac{ydx}{dy}$, wenn RM = Pp = dx, und Rm = dy geſezt wird.

§. 1033. Lehrſatz. In der Parabel iſt die Subtangente der doppelten Abſciſſe gleich.

Satz. PT = 2x. *Fig.* 114.

Bew.

$ax = y^2$ Def. der Parabel.

differenzirt

$adx = 2ydy$

$:a$

$dx = \frac{2ydy}{a}$

$\cdot y$

$ydx = \frac{2y^2dy}{a}$

$\cdot dy$

$\frac{ydx}{dy} = \frac{2y^2}{a}$

$y^2 = ax$ ſubſtit.

$\frac{2ax}{a} = 2x = \frac{2y^2}{a}$

$\frac{ydx}{dy} = 2x = PT.$

§. 1034. Zuſatz. Man muß nemlich bey der gegebenen Gleichung jedesmal durch Differenzirung ſo weit calculiren, bis man einen gleichgültigen Wehrt für $\frac{ydx}{dy}$ bekommt, welcher der Ausdruck für alle Subtangenten iſt; man kann alſo auf dieſe Weiſe aller krummen Linien Subtangenten beſtimmen.

§. 1035. Zuſatz. Folglich allgemein, wenn $a^{m-1}x = y^m$, iſt die Subtangente mx.

§. 1036. Lehrſatz. Die Subnormallinie in allen krummen Linien iſt $\frac{ydy}{dx}$

Satz. *Fig.* 114.

$$PH = \frac{ydy}{dx}$$

Bew.

$PT : PM = PM : PH.$ weil $TMH = 90^\circ$, und bey P auch rechte Winkel.

$$\frac{ydx}{dy} : y = y : y^2 : \frac{ydx}{dy} = y^2 . \frac{dy}{ydx} = \frac{ydy}{dx}.$$

§. 1037. Lehrſatz. Die Subnormallinie der Parabel iſt eine beſtändige Linie und dem halben Parameter gleich.

Satz. $\frac{ydy}{dx} = \frac{1}{2}a.$

Bew.

$ax = y^2$ Def. der Parabel; differenzirt

$adx = 2ydy$

: 2

$\frac{1}{2}adx = ydy$

: dx

$\frac{1}{2}a = \frac{ydy}{dx} = PH.$

§. 1038. Zuſatz. Weil *Fig.* 108. in der Parabel $FP = AP - AF = x - \frac{1}{4}a$, ſo iſt $FH = FP + PH = x - \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}a = x + \frac{1}{4}a$;

alſo $FH = x + \frac{1}{4}a$ aber

$FM = x + \frac{1}{4}a$ §. 898.

nr. I. $FH = FM$

ferner $TP = 2x$ §. 1033.

$AP = x$ ſubtr.

 TP

$TP - AP = TA = x.$
$AF = \frac{1}{4}a$ add.

nr. II. $TA + AF = TF = x + \frac{1}{4}a.$
folgl. nach nr. I. $TF = FH = FM.$
dahero der Winkel $FMH = FHM$ im gleichſchenkl. $\triangle$
ferner $FHM = HMQ$ §. 465.

$FMH = HMQ$
$TMH = HMm$ ſind rechte

$TMH - FMH = HMm - HMQ$
das iſt $TMF = mMQ.$

§. 2039. Anm. In einem paraboliſchen Spiegel werden daher alle einfallende Strahlen wie QM gegen den Brennpunkt F gebrochen; wie in der Optik erhellt; dahero die paraboliſche Spiegel allen andern vorzuziehen ſind u. die gröſſeſte Wirkung thun.

§. 1040. Lehrſatz. Die Subtangente der logarithmiſchen Linie iſt eine beſtändige Linie.

Bew. *Fig.* 119.

$MR : Rm = PM : PT$

$dy : dx = y : \frac{ydx}{dy} = PT$ und wenn eine andere Abſciſſe v, ihre Ordinate z heißt, ſo iſt

$\frac{zdv}{dz} = PT.$

da aber nach § 952. $dv = dx$ und nach dieſem §.

$y : y + dy = z : z + dz$ auch nach §. 276.

$y : (y + dy) - y = z : (z + dz) - z$ ſo iſt

$y : dy = z : dz$ oder

$\frac{y}{dy} = \frac{z}{dz}.$

$dx = dv$ multipl.

$\frac{ydx}{dy} = \frac{zdv}{dz}.$

§. 1039. Anm. Die Anwendung dieſer Lehre von den Tangenten und Subtangenten u. ſ. w. iſt von ſehr ausgebreitetem Nutzen;

Nutzen; man kann dahero ſich in Erfindung anderer Linien noch üben; auch die Methode umkehren, und aus den gegebenen Subtangenten die krumme Linien finden. z. E. $\frac{2y^2}{a} = \frac{ydx}{2dy}$, man ſuche die krumme Linie; ſo iſt $aydx = 2y^2dy$, welches integrirt $ax = y^2$ gibt; wir werden davon in der Integralrechnung handeln.

Allgemeine Regeln der Integralrechnung, auch in Ruckſicht auf die Wiederherſtellung der beſtändigen Gröſſen.

§. 1042. **Erklär.** Das Integrale heißt die Gröſſe, durch deren Differenzirung das Differentiale entſtanden iſt; und Integriren heißt das Integral aus der gegebenen Differentialgröſſe finden.

§. 1043. **Willk. Satz.** Integral und Integriren heißt man auch Summe und Summiren; und ſolche Integralſumme drukt man durch den Buchſtaben ſ aus, der vor das Differential geſezt wird; z. E. $\int(ydx + xdy) = xy$.

§. 1044. **Zuſatz.** Aus den Differentiationsregeln nach den vier Rechnungsarten muß man noch wiſſen, daß

I. $\int(dx \mp dy) = x \mp y$

II. $\int(ydx + xdy) = xy$.

III. $\int\frac{(ydx - xdy)}{y^2} = \frac{x}{y}$

Eben ſo erinnert man ſich aus der Differentiation der Potenzen und Wurzeln, daß

I. $\int(nx^{n-1}dx) = x^n$

II. $\int(x^{m-1}dx) = \frac{1}{m}x^m$ oder $\int xdx = \frac{1}{2}x^2$

III. $\int\left(\frac{m}{n}u^{\frac{m-1}{n}}du\right) = \sqrt[n]{u^m}$ und

IV. $\int\left(\frac{-xdx}{\sqrt{aa-xx}}\right) = \sqrt{aa-xx}$ bey zuſammengeſezten Differentialien, davon wir ſogleich weiter reden werden.

§. 1045. Zuſatz. Weil bey den Potenzen und Wurzeln einerley Differentiationsregeln gegeben werden, ſo läßt ſich auch die Integrationsregel davon in Worten ausdrucken, welche man um ſo eher behalten muß, als dieſe Formeln am häufigſten vorkommen; die Regel iſt die folgende: Man vermehrt den Exponenten der veränderlichen Gröſſe um Eins, und dividirt hernach alles mit dem in das Differentiale der veränderlichen Gröſſe (dx) multiplicirten neuen Exponenten. z. E. $\int(mx^{m-1}dx) = \frac{mx^m dx}{mdx} = x^m$, und $\int(x^m dx) = \frac{x^{m+1}dx}{(m+1)dx} = \frac{1}{m+1}x^{m+1}$.

§. 1046. Zuſatz. Weil die beſtändige Gröſſen im Differenziren wegfallen, oder wie man ſagt, null werden, §. 983. ſo muß man bey dem Integriren eine ſolche Gröſſe wieder addiren oder ſubtrahiren; man drükt ſie aus $\pm$ *Conſtans* oder Conſt. oder nur C.

§. 1047. Lehrſ. Die beſtändige Gröſſen findet man, wenn man das Integral = o ſezt, und hernach ſuchet, ob für die Conſt. noch was übrig bleibe, ob ſie poſitiv, negativ oder null werde. z. E. Man hätte das Integral $Z = \frac{m}{m+1}(x+a)^{\frac{1+m}{m}}$ + Conſt. und man wollte die Conſt. finden; ſo ſezt man es = o, folgl. iſt auch $\frac{m}{m+1}a^{\frac{1+m}{m}} + C = 0$; und da-

daħero $-\frac{m}{m+1} a^{\frac{1+m}{m}}$ = Conſt. alſo iſt ſie negativ, und das ganze Integrale heißt $\frac{m}{m+1}(x+a)^{\frac{1+m}{m}}$ $-\frac{m}{1+m} a^{\frac{1+m}{m}}$, welches man ſchicklicher ausdrucken kann; wie wir im folgenden zeigen, wo man die Erfindung der Conſtanten auch aus den Figuren erläutert.

Einige ſchwerere Integralformeln für zuſammengeſezte Differentialien.

§. 1048. Erklär. Zuſammengeſezte Differentialien ſind wie nr. IV. §. 1044. und die Integralregel iſt wie bey den Potenzen; nur fehlt es mehrmalen, daß Ungeübte die Sache nicht ſo leicht überſehen können; leichtere Formeln ſind $\int c\,dx\,(a+x)^p = \frac{c(a+x)^{p+1}}{p+1}$ nach §. 1044. nr. II. woraus auch verglichen mit nr. IV. dieſe $\int\left(-\frac{xdx}{\sqrt{aa-xx}}\right)(a+\sqrt{(aa-xx)})^2 = \frac{1}{3}a+\sqrt{(aa-xx)}^3$ leicht zu überſehen ſeyn wird. Wir wollen einige ſchwerere geben.

§. 1049. Satz. $x^{rn}.x^{n-1}dx.(a+bx^n)^p$ läßt ſich integriren.

Beweis.

I. Es ſey $a+bx^n = z$

differenz. ———

nach §. 977. $nbx^{n-1}dx = dz$

———— , nb

$x^{n-1}dx = \frac{dz}{nb}$

Es ſey wie nr. I.

II. $a+bx^n = z$ folgl.

$bx^n = z-a$

———— : b

$x^n = \frac{z-a}{b}$

dieſe Wehrte ſubſtituirt geben das verwandelte Differential $\left(\frac{z-a}{b^{rn}}\right)^{rn} \cdot \frac{z^p dz}{nb} = \frac{(z-a)^{rn} \cdot z^p dz}{nb^{rn+1}} =$

$$\left(z^{rn} - rnz^{rn-1}a + \frac{rn \cdot rn-1}{1 \cdot 2} z^{rn-2}a^2 - \frac{rn.rn-1.rn-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} z^{rn-3}a^3 \ldots \pm a^{rn}\right) \cdot \frac{z^p dz}{nb^{rn+1}}$$

$$= \frac{z^{rn+p}dz - rnz^{rn+p-1}adz + \frac{rn.rn-1}{1 \cdot 2} z^{rn+p-2}a^2 dz}{nb^{rn+1}}$$

davon iſt das Integral des Zehlers $= \frac{z^{rn+p+1}}{rn+p+1} - \frac{rnz^{rn+p}a}{rn+p} + \frac{rn.rn-1}{1 \cdot 2} \frac{z^{rn+p-1}a^2}{(rn+p-1)} \ldots\ldots \pm \frac{a^{rn}z^{p+1}}{p+1}$, welches mit dem unveränderlichen Nenner nb^{rn+1} noch dividirt wird; da man nun überall für z ſeinen Wehrt $a + bx^n$ ſetzen kann, ſo läßt die obige Differentialformel ſich wirklich integriren; wenn rn eine endliche ganze bejahte Zahl iſt, welches vorausgeſezt wird.

§. 1050. Anm. Man ſolle $x^3 \cdot x^{-\frac{1}{2}-1}dx(a + bx^{-\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}$ integriren; ſo iſt $n = -\frac{1}{2}$, $p = \frac{1}{3}$, $rn = 3$; und das Integral $= \left(\frac{3z^{13:3}}{13} - \frac{9az^{10:3}}{10} + \frac{9a^2z^{7:3}}{7} - \frac{3a^3z^{4:3}}{3}\right) : -\frac{b^4}{2}$, dann dieſer Diviſor muß nb^{rn+1} ſeyn; aber $rn = 3$; und $n = -\frac{1}{2}$; folgl. $b^{rn} = b^3$, und der andere Factor $nb = -\frac{1}{2}b$, dieſe beede multiplicirt geben $-\frac{1}{2}b \cdot b^3 = -\frac{b^4}{2}$.

§. 1051. Zuſatz. So oft $x^m dx(a + bx^n)^p$ ſich

ſich in $x^{m+1-n} \cdot x^{n-1}dx \cdot (a+bx^n)^p$ verwandeln läßt, daß $m+1-n = rn$, eine ganze poſitive Zahl wird, ſo kann man das Integral finden.

§. 1052. Lehrſatz. Ein zuſammengeſeztes Differential, wo Irrationalgröſſen vorhanden ſind, läßt ſich integriren.

Satz.

$\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}}$ ſoll integrirt werden.

es ſey nr. I. $\sqrt{(ax+xx)} = \frac{zx}{b}$ ſo iſt $z = \frac{b\sqrt{ax+xx}}{x}$

und $ax + xx = \frac{zzxx}{bb}$

$\overline{\qquad\qquad\qquad} : x$

$a + x = \frac{zzx}{bb}$

$\overline{\qquad\qquad\qquad} . bb$

$abb + xbb = zzx$ folglich

$abb + zzx - xbb = x)z^2 - b^2)$

$\overline{\qquad\qquad\qquad} ; zz - bb$

nr. II. $\frac{abb}{zz-bb} = x.$

$\overline{\qquad\qquad\qquad} . \frac{z}{b}$

$\frac{abb \cdot z}{(zz-bb)b} = \frac{xz}{b}$ das iſt

nr. III. $\frac{abz}{zz-bb} = \frac{xz}{b} = \sqrt{(ax+xx)}$ nr. I.

aber nr. II. $x = \frac{abb}{zz-bb}$ folglich differenzirt

$$dx = \frac{abb. - 2zdz}{(zz-bb)^2}$$ nach §. 992.

dahero $aadx = \frac{aa. - 2abbzdz}{(zz-bb)^2}$

und $x\sqrt{(ax+xx)} = \frac{abb}{zz-bb} \cdot \frac{abz}{zz-bb}$ folglich

aadx

$$\frac{aadx}{x\sqrt{ax+xx}} = \frac{aa. - 2abbzdz}{(zz-bb)^2} . \frac{zz-bb . zz-bb}{abb . abz} = -\frac{2adz}{b}$$

wenn man wirklich multiplicirt, und gegeneinander aufhebt; aber $\int(-\frac{2adz}{b}) = -\frac{az}{b}$, und den Wehrt von z ſubſtituirt $= -\frac{2a\sqrt{ax+xx}}{x}$.

§. 1053. Satz. $\frac{dx}{\sqrt{(xx-aa)}}$ läßt ſich integriren.

Es ſey $\sqrt{xx-aa} = z - x$ ſo iſt

nr. I. $xx - aa = zz - 2zx + xx$ alſo wenn xx ſubtr. wird

$-aa = zz - 2zx$ und

$2zx = zz + aa$ folglich

nr. II. $x = \frac{zz+aa}{2z}$

und

$z - x = z - \frac{(zz+aa)}{2z} = \frac{2zz - zz - aa}{2z}$ das iſt

$= \frac{zz - aa}{2z} = z - x$ aber nr. I.

$\sqrt{(xx - aa)} = z - x$ folgl.

nr. III. $\frac{zz-aa}{2z} = \sqrt{(xx - aa)}$

weil aber nr. II. $x = \frac{zz+aa}{2z}$ gefunden

ſo iſt $dx = \frac{zz-aa}{2zz}dz$ und alſo

$$\frac{dx}{\sqrt{xx-aa}} = \frac{zz-aa}{2zz}dz . \frac{2z}{zz-aa} = \frac{dz}{z}$$

welches ein logarithmiſches Differentiale iſt, wie wir unten zeigen; und welches integrirt $= lz = l(x + \sqrt{(xx-aa)})$

§. 1054. Exempel von Differentialgleichungen, die durch eine doppelte Differentiation endlich ihr Integrale geben.

Satz. $ydx - xdy = a\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ gibt in=

integrirt eine Gleichung für den Cirkel. Man ſetze $dy = pdx$, ſo wird ſich die Gleichung verwandeln in

$$ydx - xpdx = a\sqrt{(dx^2 + ppdx^2)}$$

$: dx$

nr. I. $y - xp = a\sqrt{1 + pp}$ man differenz. wieder, ſo iſt

$$dy - xdp - pdx = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$$

$dy = pdx$ ſubſtituirt, folglich

$$-xdp = \frac{apdp}{\sqrt{(1+pp)}}$$ und

nr. II. $x = -\frac{ap}{\sqrt{(1+pp)}}$ aber aus nr. I.

$y = a\sqrt{(1+pp)} + xp$ den Wehrt von x ſubſtituirt, gibt

$$y = \frac{a}{\sqrt{(1+pp)}}$$ dahero

$\frac{x}{y} = -p$ oder $p = -\frac{x}{y}$ und folglich

wieder $y = \frac{a}{\sqrt{\left(1+\frac{x^2}{y^2}\right)}}$ und alſo $y^2 + x^2 = a^2$

eine Gleichung für den Cirkel.

§. 1055. Anm. Dieſe Auflöſung habe vor 12 Jahren an Hrn Prof. Käſtner überſchrieben, der ſie in das Hamb Magaz. T X. p. 637. folgg. unter meinem Nahmen eingerükt hat; man kann durch Verwandlung mehrere Integrationsformeln finden, die man durch die ordentliche Regeln nicht bekommt; hier habe ich nur die nöthigſte anführen wollen.

Von der Quadratur der krummen Linien.

§. 1056. Erklär. Wenn *Fig.* 114. die Abſciſſe AP um Pp wächßt, folglich die correſpondirende Ordinate pm wird, ſo heißt das Trapezium PpmM, das Differentiale der ſich verändernden Fläche AMP.

§. 1057. Zuſatz. Weil $AP = x$, ſo iſt $Pp = dx$, und $pm = PM + Rm = y + dy$. Nun iſt $PMmp = PMRp + MmR = ydx + \frac{1}{2}dxdy$, wofür man ydx ſchreibt, weil $\frac{1}{2}dxdy$ gegen ydx unendlich klein iſt und verſchwindet. Alſo iſt in allen Flächen das Differential der Fläche ydx.

§. 1058. Anm. So wird dieſe Lehre insgemein vorgetragen; Herr Prof. Käſtner gibt, um die geometriſche Schärfe augenſcheinlicher zu machen, folgenden Beweis: Die Fläche AMP wachſe und verändere ſich bis ANQ daraus wird; die urſprüngliche Fläche heiſſe Z, und ihr endliches Wachsthum $\triangle Z$; ſo iſt

I. $\triangle Z < (PM + NS)\,PQ.$

II. $\triangle Z > (PM + \frac{1}{2}NS)\,PQ.$ wo NS die Höhe des Rectanguli wird, des Dreyecks Höhe aber $MS = PQ$ iſt.

alſo nr. I. $\frac{\triangle Z}{PQ} < PM + NS$

$$\text{———————— : } PM$$

$$\frac{\triangle Z}{PM\,.\,PQ} < 1 + \frac{NS}{PM}.$$ und eben ſo

nr. II. $$\frac{\triangle Z}{PM\,.\,PQ} > 1 + \frac{NS}{2PM}.$$

Da nun die Ordinaten unendlich nahe wie pm, PM kommen können, ſo kann $\frac{NS}{PM}$ unendlich abnehmen, und kleiner werden, als jede angebliche Gröſſe. Demnach kann der Quotient $\frac{\triangle Z}{PM\,.\,PQ}$ der Einheit unendlich nahe kommen, und muß endlich $= 1$ werden. Wenn $\frac{NS}{PM}$ und $\frac{NS}{2PM}$ kleiner werden als jede angebliche Gröſſe (quavis data minor); folglich keinen Unterſcheid mehr ha-

haben. Iſt aber diß, ſo wird $PQ = Pp = dx$; und $\triangle Z = dZ$; folglich $\frac{dZ}{ydx} = 1$. und $dZ = ydx$; das iſt, das Differential der Fläche wird $= ydx$. Man ſehe Herrn Prof. Käſtners Anfgr. IV. Th. §. 205.

§. 1059. **Lehrſatz.** Die Apolloniſche Parabel läßt ſich quadriren.

Satz. $\int(ydx) = \frac{2}{3}xy$. *Fig.* 114.

Bew.

$$ax = . y^2 \quad \sqrt{} \text{ extrah.}$$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} = y \quad . dx$$

$$a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} dx = ydx$$ das Flächendifferential diß integrirt gibt

$$\int(ydx) = \frac{a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} a^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} x$$

$$= \frac{2}{3} x \sqrt{ax} - \frac{2}{3} xy + C.$$

C zu finden, ſezt man nach §. 1047. $x = 0$; folglich wird auch $\frac{2}{3}xy + C = 0$, und $C = 0$; hier darf dahero kein C addirt werden; und das Integral iſt $\frac{2}{3}xy$.

§. 1060. Anm. Man kann auf dieſe Weiſe eines Dreyecks Inhalt finden; damit man in geradeliniaten Figuren die Probe ſehe; es heißt *Fig.* 66. α. β. $BD = a$, $AC = b$, $bd = x$, $ac = y$, ſo iſt, weil

$$BD : AC = bd : ac$$
$$a : b = x : y$$

folglich $\frac{bx}{a} = y$ die Gleichung für das $\triangle$.

$$\frac{bxdx}{a} = ydx \quad (\cdot dx)$$ das Flächendifferential, diß integrirt, gibt

$\int ydx = \frac{bx^2}{2a} = \frac{yx}{2} = \frac{ab \cdot ac}{2}$, wie ſchon in der Geometrie aus andern Gründen bewieſen wurde. Eben das erhellt auch aus *Fig.* 186, β.

§. 1061. Das paraboliſche Segment PMNQ läßt ſich quadriren.

Dann es ſey *Fig.* 114. $AP = b$, $PQ = x$, $QN = y$. ſo iſt $AQ = b + x$; folgl. $ab + ax = y^2$ und $\sqrt{ab + ax} = y$.

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \; dx$$

$dx\sqrt{ab + ax} = ydx$ nun ſetze man

$\sqrt{(ab + ax)} = v$. ſo iſt

$ab + ax = v^2$ und

$$adx = 2vdv$$

$$\overline{\qquad\qquad} : a$$

$$dx = \frac{2vdv}{a}$$ und

$$ydx = \frac{2v^2dv}{a}$$ folglich

$\int(ydx) = \frac{2}{3}v^3 = \frac{2}{3}(ab + ax)\sqrt{(ab + ax)} = \frac{2}{3}(b + x)$
$(ab + ax) + C$. Man ſetze $x = 0$, ſo iſt
$\frac{2}{3}(b + 0)\sqrt{ab + 0}) + C = 0$. das iſt
$\frac{2}{3}b\sqrt{ab} + C = 0$ folglich
$C = -\frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. alſo muß man von dem obigen Integral noch dieſen Wehrt abziehen. In der Figur iſt er AMP; dann man hat das ganze Stück AMNQ quadrirt; man verlangt aber nur PMNQ; darum muß man das erſte abziehen, weilen $PMNQ = AMNQ - AMP = \frac{2}{3}(b + x)$ $\sqrt{ab + ax}) - \frac{2}{3}b\sqrt{ab}$. Man ſiehet, wie man die Conſtantes auch in der Zeichnung ausgedrukt finde.

§. 1062. Anm. Für die Hyperbel, wo $y = \frac{a^3}{x^2}$, iſt

$ydx = a^3x^{-2}dx$. diß integrirt, gibt

$\int ydx = \frac{a^3x^{-1}}{-1} + C = -\frac{a^3}{x} + C$.

ſezt man $x = 0$, ſo iſt $-\frac{a^3}{0} = \infty$.

Wo

Wo man dahero x, *Fig.* 117. auf der Horizontalſeite, und eben auch daſelbſt C als den Raum auf dieſer Seite annehmen muß.

Die Rectification der krummen Linien, besonders auch der Neiliſchen Parabel.

§. 1063. Lehrſatz. Wenn *Fig.* 114. der Bogen AM um Mm wächßt, ſo heißt Mm ſein Differentiale, und diß Differential, geſezt daß AM = s, heißt $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$

Beweis.

Mm ſey unendlich klein, und alſo von der Sehne um keine angebliche Gröſſe unterſchieden, ſo iſt

$Mm = \sqrt{(MR^2 + Rm^2)}$ nach dem Pythag. Lehrſ.

aber $MR = Pp = dx$ und

$Rm = dy$. folglich

$Mm = ds = \sqrt{(dx^2 + dy)}$

§. 1064. Anm. Wenn man die Linien AM bis N wachſen läßt, ſo iſt die Sehne von MN kleiner als der Bogen; dieſe Differenz ſey p; ſo iſt $\frac{MN}{\sqrt{MS^2 + SN^2}} = 1 + p$; da nun p unendlich abnehmen und kleiner werden kann als jede angebliche Gröſſe, weil pm und PM unendlich nahe zuſammen rücken können, ſo wird in dieſem Fall $\frac{ds}{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = 1$, und $ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ Das iſt Euclideiſch geſchloſſen, wie oben, aus dem Begriff einer Gröſſe die kleiner werden kann, als jede angebliche Gröſſe (quavis data minor.) Der obige gewöhnliche Ausdruck ſagt eben das, nur mit andern Worten.

§. 1065. Zuſatz. Wenn man alſo in einer gegebenen Gleichung $\sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ ausdrukt, und hernach den Ausdruck integriren kann, ſo hat man die krumme Linie rectificirt.

§. 1066. Lehrſatz. Die Neiliſche Parabel, in welcher $y^3 = ax^2$, läßt ſich vollkommen rectificiren.

Bew.

$$y^3 = ax^2$$

$\sqrt{}$ extrah.

$$y^{\frac{3}{2}} = a^{\frac{1}{2}}x$$

differenzirt

$$\tfrac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy = a^{\frac{1}{2}}dx$$

$: a^{\frac{1}{2}}$

$$\tfrac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}dy : a^{\frac{1}{2}} = dx$$ das iſt §. 188.

$$\tfrac{3}{2}\sqrt{\tfrac{y}{a}}\,dy = dx.$$ und quadrirt

$$\frac{9y}{4a}dy^2 = dx^2$$ folglich

$$dy^2 + dx^2 = dy^2 + \frac{9y}{4a}dy^2 = \left(1 + \frac{9y}{4a}\right)dy^2$$

dahero $ds = \sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{\left(1 + \frac{9y}{4a}\right)}$

das iſt unter einerley Benennung und aus dem Nenner die Wurzel wirklich extrahirt

$$= \frac{dy\sqrt{(4a+9y)}}{2\sqrt{a}} = \frac{dy.(4a+9y)^{\frac{1}{2}}.}{2\sqrt{a}}$$

Wenn man nun dieſen Ausdruck integriren kann, ſo iſt die Parabel rectificirt. Dieſer Ausdruck läßt ſich nach dem Lehrſatz §. 1049. integriren, wenn man für die dortige Buchſtaben y, a, b, n, p, r die hier vorkommende ſubſtituirt y, 4a, 9, 1, $\frac{1}{2}$, 0. Dahero das Integral $\int\left(\frac{dy.(4a+9y)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{a}}\right.$

$$= \tfrac{2}{27}z^{\frac{3}{2}} : 2\sqrt{a}) + C. = \tfrac{1}{27}z\sqrt{\tfrac{z}{a}} + C.$$

Das C zu finden ſezt man, weil x und y zugleich $= 0$, auch $s = 0$; folglich da

s =

$$s = \tfrac{1}{27}(4a+9y)\surd\left(4+\frac{9y}{4a}\right)+C,$$

$$0 = \tfrac{1}{27}\,4a\,.\,2 + C. \quad \text{dahero}$$

$$C = -\tfrac{8a}{27}, \text{ u. alſo } s = \tfrac{1}{27}(4a+9y)\surd\left(4+\frac{9y}{4a}\right) - \tfrac{8a}{27}$$

§. 1067. Anm. Dieſes iſt die erſte krumme Linie, die man rectificirt hat. Wilhelm Neil, ein Engländer, der den mathem. Wiſſenſchaften Ehre gemacht hätte, wenn er länger gelebt hätte, hat ihre Rectification erfunden und im 20 Jahr ſeines Alters 1657 bekannt gemacht; dahero heißt ſie auch die Neiliſche Parabel. Der Titel ſeiner Schrift heißt: Æquatio lineæ rectæ cum parabola. Man begreift aber von ſelbſt, daß er ſie nicht durch die damals noch nicht erfundene oder wieder erfundene Differential- und Integralrechnung aufgelößt habe.

§. 1068. **Zuſatz.** Es ſey das Element der Neiliſchen rectificirten Parabel gleich dem Element einer Fläche durch eine beſtändige Gröſſe dividirt, diß Element ſey $\frac{zdy}{a}$, wo y der andern krummen Linie Abſciſſe iſt; ſo iſt

$$dy^2(4a+9y) = \frac{z^2dy^2}{a^2} \quad \text{und}$$

$$\frac{4a+9y}{4a} = \frac{z^2}{a^2} \quad \text{folglich}$$

$$4a^2+9ay = 4z^2 \quad \text{es ſey}$$

$$y = u+e \quad \text{ſo iſt}$$

$$4aa+9au+9ae = 4z^2 \quad \text{es ſey}$$

$$4aa+9ae = 0 \quad \text{ſo iſt}$$

$9au = 4z^2$ oder $\frac{9}{4}au = z^2$ eine Apolloniſche Parabel, deren Parameter $= \frac{9}{4}a$; folglich iſt das Flächenelement durch a dividirt in der Apolloniſchen Parabel dem Längenelement der Neiliſchen gleich; und weil man die erſte quadriren kann, ſo läßt ſich die andere rectificiren, oder ihre Rectification wird dadurch begreiflich.

§. 1069. Lehrſatz. Die Apolloniſche Parabel läßt ſich anders nicht als durch eine unendliche Reyhe, nach dem binomiſchen Lehrſatz rectificiren. Es iſt in der Apollon. Parabel

$ax = y^2$ folglich

$adx = 2ydy$ und $dx = \frac{2ydy}{a}$ und

$dx^2 = \frac{4y^2\,dy^2}{a^2}$ folglich

$dy^2 + dx^2 = dy^2 + \frac{4yy}{aa}\,dy^2 = (1 + \frac{4yy}{aa})\,dy^2$ und

$\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy\sqrt{(1 + \frac{4yy}{aa})}$; der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen gibt nach dem Newtoniſchen Binomio

$$ds = dy(1 + \frac{2yy}{aa} - \frac{2y^4}{a^4} + \frac{4y^6}{a^6} - - -)$$

und integrirt, oder

$$S = y + \frac{2y^3}{3a^2} - \frac{2y^5}{5a^4} + \frac{4y^7}{7a^6} - - - .$$

§. 1070. Zuſatz. Weil $\frac{1}{a}ds = \frac{2dy}{a}$ geſezt, $2z = \frac{1}{4}aa + yy$ der gleichſeitigen Hyperbel Gleichung gibt, ſo könnte man wie oben §. 1068. auch die Apolloniſche Parabel rectificiren, wenn man die Hyperbel durch einen endlichen Ausdruck quadriren könnte.

Newtons und Leibnizens Methoden den Cirkel zu quadriren und zu rectificiren, nebſt Diff. Formeln für den Cirkel.

§. 1071. Lehrſatz. Die Quadratur des Cirkels gibt eine unendliche Reyhe; wenn der Diameter

meter des Cirkels = 1, ſo iſt ſeine Gleichung $y^2 = x - x^2$; folglich

$$y = \surd(x - x^2) = (x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \; dx$$

$$ydx = dx(x - x^2)^{\frac{1}{2}}$$ das Flächendifferential.

Aber die Quadratwurzel aus $x - x^2$ gibt nach dem Newtoniſchen Binomio eine unendliche abwechſelnde Reyhe, und es wird

$$ydx = (x^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} \ldots)dx.$$ diß integrirt, gibt

$$\int ydx = \tfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \tfrac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{28}x^{\frac{7}{2}} \;.\;.\; - \;.\;.$$

§. 1072. Lehrſatz. Eben ſo gibt die Rectification eine unendliche Reyhe. Dann es ſeye *Fig.* 115. Mm = ds; man ziehe die Tangente AB, und die Secante CB und dieſer durch m die andere Cb unendlich nahe, ſo iſt, wenn der Radius AC = 1, Tang. = t; nach dem Pythag. Lehrſ. $CB = \surd(AC^2 + AB^2) = \surd(1 + tt)$, und die Proportion

$CB : CA = Bb : Bu$ weil $\triangle ABC \backsim Bbu$. d. i. in Buchſtaben

$\surd(1 + tt) : 1 = dt : Bu$ folgl. $Bu = \frac{dt}{\surd 1 + tt}$ weil dt das Differ. der Tang. iſt.

Es iſt ferner

$CA : Bu = CM : Mm$ das iſt

$\surd(1 + tt) : \frac{dt}{\surd(1 + tt)} = 1 : Mm = \frac{dt}{1 + tt}$ das Differ. von dem Bogen AM.

aber $\frac{dt}{1+tt} = dt \,.\, \frac{1}{1+tt}$; und $\frac{1}{1+tt}$ gibt eine unendliche Reyhe nach §. 157. wovon das Integrale wie oben geſucht wird; iſt nun t = die Tang. von 45°,

 ſo

ſo iſt t = 1; §. 768. folglich wird die Reyhe ſeyn

$$= 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} \ldots$$

das iſt, der rectificirte Bogen von 45° iſt dem Radius gleich, weniger $\frac{1}{3}$, mehr $\frac{1}{5}$, weniger $\frac{1}{7}$ vom Radius u. ſ. f.

§. 1073. Anm. Dieſe Rectification hat Leibniz geſucht; wie die Quadratur Newton. Man merkt ſich aber beſonders das Differential des Bogens durch die Tangente ausgedrukt $= \frac{dt}{1+tt}$, weil es von mehrerm Gebrauch iſt.

§. 1074. Zuſatz. Eben ſo iſt das Differential eines Bogens aus dem Sinus zu merken, das ſehr häufig vorkommt, und in Rechnungen genuzt wird. Wenn AMN *Fig.* 114. eine Cirkellinie wäre, und Q das Centrum, PM der Sinus des Bogens AM; ſo iſt, wenn Am = a, der Sinus PM = s, der Coſinus $PQ = \sqrt{(rr - ss)}$ nach §. 700. und $AP = AQ - PQ = r - \sqrt{(rr - ss)}$; diß differenzirt, gibt $d(AP) = -\frac{sds}{\sqrt{(rr-ss)}}$ nach §. 992. $= Pp = MQ = dx$, folglich iſt hie $da = Mm = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \sqrt{(d.AP^2 + d.SM^2)} =$

$$= \sqrt{d.\left(\frac{-sds}{\sqrt{(rr-ss)}}\right)^2 + ds^2} = \sqrt{\left(\frac{d.ssds^2}{rr-ss} + ds^2\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{rrds^2 - ssds^2 + ssds^2}{rr-ss}} = \sqrt{\frac{rrds^2}{rr-ss}} = \frac{rds}{\sqrt{rr-ss)}}$$

Dieſer Ausdruck $da = \frac{rds}{\sqrt{rr-ss)}}$ kommt nicht nur häufig vor, ſondern läßt ſich auch, wenn r = 1, ausdrucken $da = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$.

§. 1075. Zuſatz. Weil $da = \frac{rds}{\sqrt{(rr-ss)}}$ und diß

=

$$= \frac{rds}{r\left(\sqrt{1-\frac{ss}{rr}}\right)} = \frac{ds}{\left(1-\frac{ss}{rr}\right)^{\frac{1}{2}}} = ds(1 - ss)^{-\frac{1}{2}}$$ §. 190.

ſo läßt ſich der Ausdruck nach dem Newtoniſchen Binomio in eine unendliche Reyhe verwandeln, die alſo heißt

$$da = ds\left(1 + \frac{1}{2}\frac{ss}{rr}\right) + \frac{1 \cdot 3}{1.2.4}\left(\frac{ss}{rr}\right)^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1.2.3.8}\left(\frac{ss}{rr}\right)^3 ..$$

das Integrale iſt

$$\int(da) \text{ oder } a = s + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{s^3}{r^2} + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{s^5}{r^4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{s^7}{r^6} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 16} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{s^9}{r^8} \cdot - - -$$

§. 1076. Zuſatz. Eben ſo kann man, wenn man die Reyhe umkehrt, um die Geſtalt der Reyhe zu wiſſen, aus dem Bogen den Sinus finden; wo hernach die Coefficienten wie §. 995. beſtimmt werden.

§. 1077. Zuſatz. Man kann auch aus dem Querſinus den Bogen und umgekehrt, ferner aus dem Bogen den Coſinus, aber hie nicht umgekehrt, aus dem Bogen die Tangente und umgekehrt, wie oben §. 1072. ferner aus dem Bogen die Cotangenten, Secanten, Coſecanten finden; die Rechnungen ſind nicht viel von einander unterſchieden, wenn man nur die Erklärung der trigonom. Linien weiß, und würden für gegenwärtiges Handbuch zu weitläuftig ſeyn.

Die umgekehrte Methode der Tangenten.

(Methodus Tangentium inverſa.)

§. 1078. Erklär. Weil die Subtangente all-

allgemein $\frac{ydx}{dy}$ iſt, ſo wird die krumme Linie umgekehrt gefunden, für welche ein anderer Ausdruck der Subtangente gegeben iſt.

§. 1079. Anm. Man ſoll die krumme Linie finden, deren Subtangente $\frac{2y^2}{a}$; ſo iſt

$$\frac{ydx}{dy} = 2y^2a$$

$$ydx = 2y^2dy$$

$$:y$$

$$adx = 2ydy$$ und integrirt

$$ax = y^2$$ die Apolloniſche Parabel.

§. 1080. Aufgabe. Man ſoll die krumme Linie finden, deren Subnormallinie beſtändig. Weil $\frac{ydy}{dx}$ der Ausdruck für alle Subnormallinien, ſo iſt $\frac{ydy}{dx} = a$, alſo $ydy = adx$, diß integrirt, gibt $\frac{1}{2}y^2 = ax$, und $y^2 = 2ax$; wo der Parameter $2a$, folglich die Subnormallinie dem halben Parameter gleich iſt.

§. 1081. Aufg. Die krumme Linie zu finden, deren Subtangente beſtändig iſt. Es iſt alſo $\frac{ydx}{dy} = 1$, folgl. $ydx = dy$ und $dx = \frac{dy}{y}$ aber nach §. 1040. iſt $\frac{dy}{y}$ das Differentiale der Logiſtik, oder $dx = l.dy$.

§. 1082. Anm. Diß gibt uns Anlaß, von den logarithmiſchen Differentialien und dahin gehörigen Rechnungen zu handeln, welche eine Erfindung von Joh. Bernoulli ſind.

Die logarithmiſche Differentialien, und der Unterſchied der natürlichen oder hyperboliſchen, und der künſtlichen Logarithmen.

§. 1083. Erklär. Wenn für 1 nach §. 1081. geſezt wird a, ſo iſt $a.\frac{dy}{y} = dx$; und $a\int\frac{dy}{y} = l.y = x$. ſo iſt $\frac{dx}{x} = lx$, $\frac{dz}{z} = l.z$. u. ſ. w. der Grund iſt §. 1040. zu finden.

§. 1084. Zuſaz. Wenn nach den gewöhnlichen Regeln integrirt würde, ſo wäre, wenn $\frac{ady}{y} = ay^{-1}dy$, integrirt $\int.dx = \int.ay^{-1}dy = \frac{ay^{-1+1}}{-1+1} = \frac{ay^{0}}{0} = \infty + C$. Diß gäbe was unendliches, das nicht gebraucht werden kann; alſo bleibt nichts übrig, als daß nach dem Geſez der logarithmiſchen Linie, oder nach dem logarithmiſchen Syſtem $a\int\frac{dy}{y} = l.y = x$.

§. 1085. Lehrſaz. Man ſetze $y = 1 + u$, ſo verwandelt ſich, weil $dx = \frac{ady}{y}$, der Ausdruck in $a.\frac{d.(1+u)}{1+u} = a.\frac{du}{1+u} = dx$. Dann $1 + u$ differenzirt $= du$, weil 1 Conſtans. Diß gibt eine unendliche Reyhe nach §. 157. wo

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + u^4. - -$$ folgl.

$$\frac{a.du}{1+u} = a(du - udu + u^2du - u^3du + u^4du. - -)$$

$$a\int\frac{du}{1+u} = a(u - \tfrac{1}{2}u^2 + \tfrac{1}{3}u^3 - \tfrac{1}{4}u^4 + \tfrac{1}{5}u^5 - - -)$$

wo die Conſt. = o für u = o, weil l. 1 = o. alſo
$l.\,1+u = x = \int\frac{du}{1+u}$ wenn a = 1.

§. 1086. Zuſatz. Eben ſo iſt

$$\frac{a.-du}{1-u} = a.-du(1+u+u^2+u^3\ldots)\ \text{§. 162.}$$

$$\int\frac{a.-du}{1-u} = a.(-u-\tfrac{1}{2}u^2-\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4\ldots)$$

§. 1087. Zuſatz. Man kann alſo eine ſich ſchneller nähernde (ſchneller convergirende) Reyhe finden, wenn man die leztere Reyhe von der erſten ſubtrahirt, durch welche Operation nach §. 305. $l.\frac{1+u}{1-u}$ herauskommt; weil die Diviſion ſich bey den Logarithmen in eine Subtraction verwandelt; folglich

$$(l\,1+u) = a.(+u-\tfrac{1}{2}u^2+\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4+\tfrac{1}{5}u^5\ldots)$$
$$l\,1-u = a.(-u-\tfrac{1}{2}u^2-\tfrac{1}{3}u^3-\tfrac{1}{4}u^4-\tfrac{1}{5}u^5\ldots)$$

ſubtr.

$$l.\frac{1+u}{1-u} = a.2u+2.\tfrac{1}{3}u^3+2.\tfrac{1}{5}u^5\ldots$$
$$= a.2(u+\tfrac{1}{3}u^3+\tfrac{1}{5}u^5+\tfrac{1}{7}u^7\ldots)$$

§. 1088. Exemp. So finden ſich die natürlichen Logarithmen der erſten 10 Zahlzeichen, wenn man ſezt

Erſtl. $u=\frac{1}{5}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{\frac{5}{5}+\frac{1}{5}}{\frac{5}{5}-\frac{1}{5}} = \frac{6}{5} : \frac{4}{5} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$

II. $u=\frac{1}{7}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{8}{7} : \frac{6}{7} = \frac{56}{42} = \frac{4}{3}$

III. $u=\frac{1}{9}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{10}{9} : \frac{8}{9} = \frac{90}{72} = \frac{5}{4}$

IV. $u=\frac{1}{99}$ daraus $\frac{1+u}{1-u} = \frac{100}{99} : \frac{98}{99} = \frac{9900}{9702} = \frac{50}{49}$.

Nun ſuche man für die kleine Brüche $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{50}{49}$ die Logarithme, welches leicht geſchiehet, weil die Brüche für u klein ſind. Hat man dieſe, ſo hat man auch die Logarithme für die 10 erſte

erſte Zahlzeichen bald gefunden; dann es iſt, weil die Multiplication bey Logarithm. in eine Addition ſich verwandelt;

I. $l.\frac{3}{2} + l.\frac{4}{3} = l.\frac{3}{2}.\frac{4}{3} = l.\frac{12}{6} = l.2.$

II. $l.\frac{3}{2} + l.2 = l.\frac{3}{2}.2 = l.\frac{6}{2} = l.3.$

III. $2l.2 = l.2^2 = l.2\,.\,2 = l.4.$

IV. $l.\frac{5}{4} + l.4 = l.\frac{5}{4}.4 = l.\frac{20}{4} = l.5.$

V. $l.2 + l.3 = l.2\,.\,3 = l.6.$

VI. $2l.5 + l.2 = l.5^2.2 = l.25.2 = l.50$ aber
$l.50 - l.\frac{50}{49} = l.50 : \frac{50}{49} = l.\frac{50.49}{50} = l.49;$
und endlich $\frac{1}{2}l.49 = l.49^{\frac{1}{2}} = l.\sqrt{49} = l.7.$

VII. $3l.2 = l.2^3 = l.2.2.2. = l.8.$

VIII. $2l.3 = l.3^2 = l.3\,.\,3 = l.9.$

IX. $l.2 + l.5 = l.2\,.\,5 = l.10.$

So iſt der Logarithmus von 10 in Zahlen wirklich nach der Decimalprogreſſion ausgedrukt

2, 3025850929940456840179914.

§. 1089. Erklär. Wenn man in dem Ausdruck $ſ.\frac{ady}{y} = ly$ ſetzet $a = 1$, ſo heiſſen die herauskommende Logarithmen natürliche Logarithmen, und die andere nach den Abſciſſen und Subtangenten ſind künſtliche.

§. 1090. Zuſatz. Weil $dx = \frac{adu}{1+u}$ ſo iſt umgekehrt $dx + udx = adu$, und $dx = adu - udx$, und $du - \frac{udx}{a} = \frac{dx}{a}$; folglich läßt ſich die Zahl u umgekehrt durch den Logarithmen ausdrucken, und zwar in einer unendlichen Reyhe.

§. 1091. Wenn *Fig.* 117. eine Apolloniſche Hyperbel iſt, deren Potenz = 1, und $AP = 1+u$, $PM = y$, ſo iſt nach §. 936. $y(1+u) = 1$, und $y = \frac{1}{1+u}$ folglich das Flächendifferential $ydu = du.$

$\frac{1}{1+u}$

$\frac{1}{1+u} = d(l\,1+u)$; alſo wird die Hyperbel durch die logarithmiſche Reyhen quadrirt, und dahero heißt man die natürliche Logarithmen auch hyperboliſche Logarithmen, wegen ihrer Uebereinſtimmung mit der Quadratur der Hyperbel. Uebrigens gehören auſſer der natürlichen Logarithme einer jeden Zahl noch unzählich viel unmögliche Logarithmen zu, wie Herr Prof. Euler bewieſen hat Anal. Inf. L. I. C. 6. 7. daher die logarithmiſche Linie eine transſcendentiſche iſt.

XX Die Exponentialrechnung nebſt einigen Integralformeln für logarithmiſche Differentialien.

§. 1092 Erklär. Wenn der Exponent einer Gröſſe veränderlich iſt, alſo x, y, z heißt, ſo heißt die Gröſſe ſelbſt eine Exponentialgröſſe; z. E. a^x, b^y, x^y, y^z.

§. 1093. Lehrſatz. Die Exponentialgröſſen werden differenzirt, wenn ſie auf logarithmiſche Ausdrücke reducirt werden. Dann es ſey

$x^y = z$ ſo iſt nach §. 308.

$ylx = lz$ alſo differenzirt

$lxdy + ydlx = d.lz$ aber

$dlx = \frac{dx}{x}$ folglich ſubſtituirt

$$lxdy + y\frac{dx}{x} = d.lz = \frac{dz}{z}$$

§. 1094. Zuſatz. Erinnert man ſich noch, daß die Exponenten die Logarithmen der Potenzen ſind,

ſind, ſo wird man ſich in dieſe Regel finden; auch ſchlieſſen, das eine jede Exponentialgröſſe ſich in eine logarithmiſche Reyhe verwandeln laſſe.

§. 1095. **Lehrſatz.** Das Integrale von $\frac{dx}{1-xx}$ iſt $= \frac{1}{2} l \frac{1-x}{1+x}$.

Satz. $\int \frac{dx}{1-xx} = \frac{1}{2} l. \frac{1-x}{1+x}$

Beweis.

Es ſey $dy = \frac{dx}{1-xx} = dx. \frac{1}{1-x^2}$ ſo iſt

weil $\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)}$

ſo iſt

$dy = dx \left(\frac{1}{2(1+x)} + \frac{1}{2(1-x)} \right)$

Es ſeye

$2+2x = u$ und $2-2x = z$ ſo iſt

$2dx = du$ $\quad -2dx = dz$

$dx = \frac{1}{2}du$ $\quad -dx = -\frac{1}{2}dz$ flg.

$dx. \frac{1}{2+2x} = \frac{1}{2}du:u$ $\quad dx. \frac{1}{2-2x} = -\frac{1}{2}dz:z$

das iſt $= \frac{du}{2u}$ $\quad = -\frac{dz}{2z}$

welches alſo erwieſen wird: man bringe beede Brüche unter einerley Benennung, ſo iſt

$\frac{1.2(1-x)+1.2(1+x)}{2(1+x).2(1-x)} = \frac{2+2x+2-2x}{4-2x}$

d. i. wenn man 2x gegen −2x aufhebt $= \frac{4}{4-4xx}$

oder $= \frac{1}{1-x^2}$.

folglich $dy = \frac{du}{2u} - \frac{dz}{z}$, ein logarithm. Differential; alſo

$y = \frac{1}{2} lu - \frac{1}{2} lz$ und den Wehrt von u und z ſubſtituirt,

$y = \frac{1}{2} l(z+2x) - \frac{1}{2} l.(2-2x) = \frac{1}{2} l. \frac{2+2x}{2-2x}$ weil die Logarithm. die Diviſion in eine Subtraction verwandeln;

oder $y = \frac{1}{2} l. \frac{1+x}{1-x}$ wenn man mit 2 aufhebt.

Joh.

XX Joh. Bernoulli Vergleichung der Ausſchnitte des Cirkels und der Hyperbel.

§. 1096. Lehrſatz. Es ſey ein Cirkelbogen v, ſeine Tangente heiſſe $= q$, ſo iſt $dv = \frac{dq}{1+qq}$ nach §. 1073. und wenn der Radius $= 1$, der correſpondirende Sector $\frac{1}{2}dv = \frac{\frac{1}{2}dq}{1+qq}$; dann wenn man den Bogen in den halben Radius multiplicirt, ſo hat man den Sector nach der Element. Geom.

Man ſuche nun den correſpondirenden hyperboliſchen Ausdruck, wenn die Tangente der Hyperbel $= p$; da dann $dv = \frac{dp}{1-pp}$ und $\frac{1}{2}dv = \frac{\frac{1}{2}dp}{1-pp}$; weil, wie wir ſogleich zeigen, der Ausdruck für die Hyperbel nur umgekehrt iſt oder das negative Zeichen hat; dieſe beede Sectores ſolle man nur mit einander vergleichen.

Man ſezt alſo, wenn die Vergleichung angehen ſolle,

$+qq = -pp$. dahero wenn man die Wurzel auszieht $q = p\sqrt{-1}$. und

nr. I. $\frac{q}{\sqrt{-1}} = p$ das iſt nach §. 336.

$-q\sqrt{-1} = p$ folglich ſubſtituirt

$\frac{1}{2}dv = \frac{\frac{1}{2}dp\sqrt{-1}}{1-pp}$ da nun

$\int \frac{1}{2}\frac{dp}{1-pp} = \frac{1}{2}l.\frac{1+p}{1-p}$ nach §. 1095. ſo iſt

nr. II.

nr. II.

$\frac{1}{2}\int dv = \frac{\sqrt{-1}}{2} \, l. \frac{1+p}{1-p}$ u. weil $+p = -q\sqrt{-1}$ nr. I. folgl. $-p = +q\sqrt{-1}$; ſo iſt

nr. III. wenn man ſubſtit. $\frac{\sqrt{-1}}{2} \, l. \frac{1-q\sqrt{-1}}{1+q\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\int dv.$

dieſer Ausdruck verwandelt ſich in folgenden, wenn man immer $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ für $-\sqrt{-1}$ und umgekehrt nach §. 336 ſezt,

$-\frac{1}{2\sqrt{-1}} . l. \frac{1-q\sqrt{-1}}{1+q\sqrt{-1}}$ u. die Zeich. verändert

$+\frac{1}{2\sqrt{-1}} \, l. \frac{1+q\sqrt{-1}}{1-q\sqrt{-1}}$ u. nochmal ſubſt. $\frac{1}{\sqrt{-1}}$

$+\frac{1}{2\sqrt{-1}} . l. \frac{1+q.\frac{-1}{\sqrt{-1}}}{1+q.\frac{1}{\sqrt{-1}}}$ woraus der leztere Ausdruck unter einerley Benennung, weil der Diviſ. $\sqrt{-1}$ einerley,

$\frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}$; alſo iſt das ganze Integral

$\frac{1}{2\sqrt{-1}} . l. \frac{\sqrt{-1}-q}{\sqrt{-1}+q}.$

§. 1097. Zuſatz. Hieraus folgt, daß der Ausſchnitt des Cirkels einem unmöglichen oder eingebildeten Ausſchnitt (imaginario Sectori) der Hyperbel und umgekehrt gleich ſeye. Die Urſache davon iſt folgende: r ſey zugleich der Radius des Cirkels und die halbe Axe der Hyperbel; ſo iſt, wenn die Ordinate des Cirkels y und der Hyperbel z, die Gleichung $y^2 = r^2 - x^2$; und $z^2 = x^2 - r^2$; jenes iſt nur möglich, wenn $x < r$; und dieſes wenn $x > r$;

$x > r$; alſo wenn der einen Linie Ausſchnitte möglich werden, ſind der andern unmöglich, und umgekehrt.

§. 1098. Erklär. Der hyperboliſche Ausſchnitt und deſſen Ausdruck $l(1 + u)$ kann auch aus der Figur erwieſen werden; dann *Fig.* 117. heißt der Ausſchnitt CAM ein hyperboliſcher Ausſchnitt; er entſteht, wenn aus dem Mittelpunkt A nach dem Scheitel C und einem andern willkührlichen Punkt M gerade Linien gezogen werden.

§. 1099. Lehrſatz. Das Element von dieſem Sector läßt ſich nun finden, und daraus eine Integralformel geben.

Dann es ſey CAm ein anderer Ausſchnitt, ſo iſt die Differenz beeder Ausſchnitte MAm.

Man nehme AM als einen Radius und beſchreibe den Bogen MR damit, ſo hat man das Maas des Winkels MAm.

ferner iſt $Rm = Am - AR$. aber

$$AR = AM$$

$$Rm = Am - AM.$$

Geſezt nun, die Punkte M und m ſeyen unendlich nah beyſammen, ſo iſt MR ein Perpendikel auf Am, Mm eine gerade Linie, und MAm ein geradelinigtes Dreyeck, deſſen Inhalt nach geometriſchen Gründen $= \frac{MR \cdot Am}{2}$; nemlich die Höhe mit der Grundlinie multiplicirt, und durch zwey dividirt; dafür man, weil Rm unendlich klein, ſetzen kann $\frac{AM \cdot MR}{2}$. Dieſer Ausdruck $\frac{AM \cdot MR}{2}$ iſt das Differential vom hyperboliſchen Sector CAM.

Man

Man nenne die Abſciſſe AP = w, ſo iſt

nr. I. die Ordinate $PM = \frac{1}{w}$ nach §. 936.

dann wenn die Potenz = 1, ſo iſt $1 = wy = PMAP$.

folglich $\frac{1}{w} = y = PM$. (:w)

nr. II. $Tang. MAP = \frac{PM}{w} = \frac{1}{ww}$ weil

$AP : PM = 1 : T. MAP$ das iſt

$w : PM = 1 : \frac{PM}{w}$ aber

$PM = \frac{1}{w}$ folgl ſubſtit.

$$\frac{PM}{w} = \frac{1}{w} : w = \frac{1}{ww} = w^{-2}$$ nach §. 180.

alſo das Differ. von $\frac{1}{ww} = -2w^{-3}dw = -\frac{2dw}{w^3}$

und das Differential des Winkels MAP, welches aus den Tangenten nach §. 1073. gefunden wird da $= \frac{dt}{1+tt}$, hier den Wehrt von t ſubſtituirt, gibt $diff. MAP = -\frac{2dw}{w^3} : \left(1 + \frac{1}{w^4}\right) = -\frac{2dw}{w^3} : \left(\frac{w^4+1}{w^4}\right)$

und wenn man wirklich dividirt, das iſt mit dem umgekehrten dividirenden Bruch multiplicirt,

$-\frac{2w^4dw}{w^3(w^4+1)} = -\frac{2wdw}{w^4+1}$ wenn man richtig aufhebt;

aber eben diß Differential iſt = MAm;

aber dieſer Winkel $MAm = \frac{MR}{AM}$ §. 582.

folglich $-\frac{2wdw}{w^4+1} = \frac{MR}{AM}$ (.AM)

$-\frac{2wdw}{w^4+1} . AM = MR$ (.$\frac{AM}{2}$)

$-\frac{wdw}{w^4+1} . AM^2 = \frac{MR . AM}{2} = diff. Sectoris.$

aber $AM^2 = AP^2 + MP^2$ nach dem Pyth. Lehrſatz

$= w^2 + \frac{1}{w^2}$ nr. I. und unter einerl. Benenn.

$= \frac{w^4+1}{w^2}$

folgl. ſubſtit. $-\frac{wdw}{w^4+1} \cdot \frac{w^4+1}{w^2} = \frac{MR.AM}{2}$ d. i. wirkl. multipl. und aufgehoben

$-\frac{wdw}{w^2} = -\frac{dw}{w} = \frac{MR.AM}{2} =$ diff. Sect.

es ſey $w = 1+u$, ſo iſt, weil $\frac{1}{w} = PM = y$

ſubſtituirt $-\frac{1}{w}.dw = -y.du$ oder

$-\frac{dw}{w} = -ydu$ oder $+\frac{dw}{w} = ydu$ deſſen

Integral $= l.(1+u)$ wo Conſt. $= 0$.

§. 1100. Anm. Der Ausdruck wird affirmativ, weil CAM $= 45° -$ AMP, dahero $dCAM = -d.PAM = +\frac{2wdw}{1+w^4}$. Dann es wurde oben nur deßwegen negativ, weil die nächſtfolgende Winkel nach PAM kleiner werden, indeme man aus dem Winkel PAM das Differential ſucht.

§. 1101. Anm. Wenn man die Ausſchnitte aus dem Mittelpunkt der Axe durch die Abſciſſen ausdrukt, ſo wird, wenn man überall richtig ſubſtituirt, und der Radius $=1$, und die die Tangente p iſt, das Integral $\frac{1}{2} l.\frac{1+p}{1-p}$, woraus obige Vergleichung §. 1096. erläutert wird. Die Rechnung iſt leicht, aber weitläuftig, dahero wir ſie übergehen.

X X Einige andere Vergleichungen der Sinus, Coſinus, Tangenten, nach Joh. Bernoulli Methode.

§. 1102. Lehrſatz. Aus der Tangente x des einfachen Bogens, läßt ſich die Tangente y des nfachen Bogens finden. Weil die Tangenten x, y ſind, ſo iſt nach §. 1073. die Formel

$$\frac{ndx}{1+x^2} = \frac{dy}{1+y^2}$$ folglich

$\frac{n\int dx}{1+x^2} = \frac{\int dy}{1+v^2}$ alſo nach §. 1096. wo für p geſezt wird x, und q geſezt y,

$\frac{n}{2\sqrt{-1}} \cdot l.\frac{\sqrt{-1}-x}{\sqrt{-1}+x} = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l.\frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$ und wenn man die Zeichen der Logarithmen wegläßt nach §. cit.

$$\frac{(\sqrt{-1}-x)^n}{(\sqrt{-1}+x)^n} = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$$

Man ſuche nun eine Gleichung zwiſchen des Winkels φ und $n\varphi$ ſeinem Sinus und Coſinus.

Man ſetze $x = \frac{b}{\beta}$ $y = \frac{p}{\pi}$ nach §. 720. nr. III. wo $b = \sin.\varphi$, $\beta = \cos.\varphi$; und $p = \sin.n\varphi$; $\pi = \cos.n\varphi$. Endlich ſetze man, um die Rechnung bequemer zu machen $\sqrt{-1} = \varepsilon$, ſo verwandelt ſich der obige Ausdruck

$\frac{(\sqrt{-1}-x)^n}{(\sqrt{-1}+x)^n} = \frac{\sqrt{-1}-y}{\sqrt{-1}+y}$ in folgende Gleichung

$\frac{\left(\varepsilon - \frac{b}{\beta}\right)^n}{\left(\varepsilon + \frac{b}{\beta}\right)} = \frac{\varepsilon - \frac{p}{\pi}}{\varepsilon + \frac{p}{\pi}}$ das iſt, unter einerley Benennung

$\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$, aber es iſt $\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}$ wie §. 1103. gezeigt werden ſoll.

nr. II. $\left(\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$.

Es iſt ferner

nr. III. $\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{(\beta + b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)}{(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon)}$ wie leicht erhellet nach §. 56.

aber der Diviſor $(\beta - b\varepsilon)(\beta + b\varepsilon) = 1$ dann das wirkl. Product $\beta^2 - b^2\varepsilon^2 = (\cos.\varphi)^2 - (\sin.\varphi)^2.-1$ wenn man die Wehrte $= (\cos.\varphi)^2 + (\sin.\varphi)^2 = 1$ ſubſtituirt, wo auch $\varepsilon^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$ wird.

---

folgl. $\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = (\beta + b\varepsilon)^2$ da aber oben nr. II.

$\frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon} = \frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}$ ſo iſt

---

$\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = (\beta + b\varepsilon)^2$ folgl. zur Potenz n elevirt, nach §. 184.

$\frac{(\varepsilon\beta - b)^n}{(\varepsilon\beta + b)^n} = (\beta + b\varepsilon)^{2n}$ da aber nr. I.

$\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$ ſo iſt

---

nr. IV. $(\beta + b\varepsilon)^{2n} = \frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p}$

Weil endlich auf eine ähnliche Weiſe wie nr. II. III.
$\frac{\varepsilon\pi - p}{\varepsilon\pi + p} = (\pi + p\varepsilon)^2$ gefunden wird; ſo iſt

nr. V. $\left(\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b}\right)^n = (\pi + p\varepsilon)^2$. oder nach nr. IV.

$(\beta + b\varepsilon)^{2n} = (\pi + p\varepsilon)^2$ das iſt im Wehrt der Buchſtaben

$(\cos.\varphi \pm \sin.\varphi\sqrt{-1})^n = \cos.n\varphi \pm \sin.n\varphi\sqrt{-1}$.
wie ſchon §. 751. unabhängig von dieſen Gründen gezeigt worden.

§. 1102. Anm. Daß $\frac{\varepsilon\beta - b}{\varepsilon\beta + b} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon}$ erhellet, wenn

man

man den Wehrt von ε ſubſtituirt, und $\frac{1}{\sqrt{-1}}$ mit $-\sqrt{-1}$ gehörig nach § 336. verwechſelt; dann in dieſem Wehrt iſt der erſte Ausdr. $\frac{\sqrt{-1}\beta - b}{\sqrt{-1}\beta + b} = \frac{\beta - b}{-\sqrt{-1}} : \frac{\beta + b}{-\sqrt{-1}} = \frac{\beta - b}{-\sqrt{-1}} \cdot \frac{-\sqrt{-1}}{\beta + b}$

$$= \frac{-\sqrt{-1}\beta + b\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}\beta - b\sqrt{-1}} = \frac{\beta + b\sqrt{-1}}{\beta - b\sqrt{-1}} = \frac{\beta + b\varepsilon}{\beta - b\varepsilon},$$

wenn man ε wieder ſubſtituirt.

§ 1104. Anm. Dieſe Methode hat Joh. Bernoulli in den Act. Erud. 1712. bekannt gemacht, und noch viele andere nüzliche Folgen daraus hergeleitet.

Herrn Eulers und Clairaut Betrachtungen über die Differentiale der Functionen, die zwo und mehr veränderliche Gröſſen enthalten.

§. 1105. Lehrſatz. Es ſeye V eine Function von xy, oder x, y vermiſcht; man differenzire V dergeſtalten, daß man zuerſt nur x veränderlich ſezt, und das Differential wieder, aber ſo, daß man nur y veränderlich ſezt; zweytens differenzire man V auch ſo, daß man nur y veränderlich, und diß Differentiale wieder, aber ſo, daß man nur x veränderlich ſetze, ſo wird die zweyte Differentiation in beeden Fällen gleich ſeyn. Denn es ſey

$V = xy$ ſo iſt nach

nr. I. ydx erſtes Differential: $dydx$ zweytes Differ.
nr. II. xdy erſtes Differential: $dxdy$ zweytes Differ.

aber $dydx = dxdy$ folglich gibt die zweyte Differentiation allemal in dieſem Fall und unter der gegebenen Bedingung einerley Differentiale.

§. 1106. Zuſatz. Eben ſo wird man finden, daß wenn man bey drey veränderlichen Gröſſen xyz auf eben dieſe Bedingungen differenzirt, das drittemal einerley herauskomme; und ſo geht das Geſez bey mehrern veränderlichen Gröſſen fort, wenn keine von der andern beſtimmt wird; und man alſo, welche man will, unveränderlich annehmen kann.

§. 1107. Willk. Satz. $\frac{dV}{dy}$ bedeute, daß V ſo differenzirt werde, daß nur y als veränderlich angenommen worden. Ferner, man heiſſe bey einer Differentialgröſſe, wo x, y und ihre Differentiale vermiſcht ſind, alles dasjenige P was in dx, und alles dasjenige Q was in dy multiplicirt wird.

§. 1108. Lehrſatz. Wenn $dV = Pdx + Qdy$, ſo iſt $\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$.

Bew.

$dV = Pdx + Qdy$ nach der Vorausſez. folglich $\frac{dV}{dx} = P$ und $\frac{dV}{dy} = Q$. man differ. nun noch einmal nach §. 1105.

ſo iſt $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dx}$ nach eben dieſem §.

§. 1109. Anm. Um den zweyten Satz, daß $\frac{dV}{dx} = P$, und $\frac{dV}{dy} = Q$, beſſer zu verſtehen, merke man folgenden Lehrſatz.

§. 1110. Lehrſatz. Jede gleichartige Function von x, y läßt ſich, wenn $y = zx$ geſezt wird, durch ein Product aus einer Potenz von x in eine Function von z ausdrucken.

Bew.

A, B ſeye die Function von x, y; Z, W von z,

oder

oder es ſeye $A = x^{\lambda} Z$

$B = x^{\varkappa} W$ ſo iſt dividirt

$$\frac{A}{B} = x^{\lambda - \varkappa} \frac{Z}{W}$$

es ſeye $\frac{Z}{W} = T$ eine Function von z, und

$\lambda - \varkappa = n$; und $\frac{A}{B} = V$; ſo iſt

$V = x^{n} . T$, und $dV = nx^{n-1} Tdx + x^{n} dT$.

§. 1111. Zuſatz. Es ſey $dT = Rdz$, ſo iſt
$dV = dx^{n-1}Tdx + x^{n}dT$; es ſey ferner
$dV = Pdx + Qdy$. aber
$dy = xdz + zdx$ weil $y = zx$ oben geſezt iſt;

$dV = Pdx + Qzdx + Qxdz$; nur beſtimmen x und y einander nicht, alſo vergl. gibt
$dV = nx^{n-1}Tdx + x^{n}Rdz$

$$Pdx + Qzdx + Qxdz = nx^{n-1}Tdx + x^{n}Rdz$$

alſo gibt es eine Gleichung zwiſchen den Gliedern die dx, und eine andere zwiſchen denen, die dz enthalten; folglich iſt

I. $Pdx + Qzdx = nx^{n-1}Tdx$; :dx

$P + Qz = nx^{n-1}T$

II. $Qxdz = x^{n}Rdz$; :dz

$Qx = n^{n}R$

aber es iſt $nx^{n-1}T = \frac{nV}{x}$

$$P + Qz = \frac{nV}{x}$$

$z = \frac{y}{x}$ nach §. 1119.

$$P + Q\frac{y}{x} = \frac{nV}{x}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad} \cdot x$$

$$Px + Qy = nV.$$

§. 1112. Willk. Satz. Wenn P eine Function von xy zugleich iſt, und man integrirt Pdx ſo, daß man y unveränderlich, und nur x für veränderlich anſieht, ſo drukt man das Integral aus $\int(x)Pdx$. z. E. $\int(x)\,yx^3dx = \frac{1}{4}yx^4$, wo y unveränderlich angenommen worden.

§. 1113. Zuſatz. Alſo das Differential von $\int(x)Pdx = Pdy$, wenn nur x veränderlich iſt; iſt aber die Function von x, y vermengt, die V heiſſen ſoll, ſo iſt, wenn beede Gröſſen veränderlich ſind $dV = Pdx + Gdy$; wo wiederum $\frac{dV}{dx} = P$.

§. 1114. Lehrſatz. Wenn $\int Pdx + Qdy = Z$, und $Q = G + H$, ſo wird H kein x enthalten, ſondern eine Function blos von y ſeyn.

Bew.

$$\left.\begin{aligned}\frac{dP}{dy} &= \frac{dQ}{dx}\\ \frac{dP}{dy} &= \frac{dG}{dx}\end{aligned}\right\} \text{nach §. 1108.}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dQ}{dx}.$$

$$Q = G + H \text{ nach der Vorausſetzung}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d(G+H)}{dx.} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx} \text{ alſo}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dx} + \frac{dH}{dx} \text{ das iſt}$$

$$\frac{dG}{dx} = \frac{dG}{dx} + 0 \text{ alſo } \frac{DH}{dx} = 0\text{; das iſt}$$

H kann kein x enthalten.

§. 1115. Erläuterung. Man ſuche das Integral aus $3x^2y^2dx+(2yx^3+4ay^3)dy=dZ$ nach dieſer Formel, ſo iſt nach §. 1108.

$P=3x^2y^2$; und $Q=(2yx^3+4ay^3)$ folgl.

$dP=6x^2ydy$, wo x unveränderl. angeſehen wird; und $\frac{dP}{dx}=6x^2y$.

Dieſer Ausdruck iſt $=\frac{dQ}{dx}$ weil $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$ nach §. 1108. folglich

$6x^2y=\frac{dQ}{dx}=\frac{dP}{dy}$. Es iſt ferner

$V=\int(x)Pdx$ nach §. 1113. und weil

$P=3x^2y^2$ ſo iſt

$Pdx=3x^2y^2dx$ und integrirt nach den gewöhnl. Regeln,

$\int(x)(Pdx)=x^3y^2$ wo y unveränderlich; alſo

$V=x^3y^2$ folglich

$dV=3x^2y^2dx+2x^3ydy$. wo x, y veränderlich, alſo $G=2x^3y$; $H=4ay^3$, und dahero

$Z=x^3y^2+ay^4$; das Integral;

dann wenn man dieſes Integral wirklich wieder nach den allgemeinen bekannten Regeln differenzirt, ſo kommt der erſte im Exempel gegebene Ausdruck wieder heraus, nemlich das Differential oder $d(x^3y^2+ay^4)=3x^2y^2dx+2x^3ydy+4ay^3dy$.

§. 1116. Anm. Der Gebrauch von den hier kürzlich berührten Sätzen zeiget ſich bey verſchiedenen ſchweren Integrationen. Herr Prof. Euler und Herr Clairaut haben ſie jeder für ſich erfunden und bekannt gemacht, jener in Inſt. Calc. diff. P. I. c. 7. dieſer in Mem de l'Acad. des Sciences à Paris 1740. unter dem Titel: ſur l'integration des equations differentielles; Herr Prof. Käſtner und Herr Prof. Karſten haben ſie in ihren Schriften erläutert.

Die Lehre von der Evolution, Evoluten, und aus Evolution erzeugten Linien, den Krůmmungscirkeln und Radiis, (circulis curvaturæ, radiis oſculi.)

§. 1117. **Erklår.** Wenn *Fig.* 121. NV =NM Sehnen einer krummen Linie ſind, und durch deren Punkte M, N, V ein Cirkel beſchrieben wird, deſſen Mittelpunkt K ſich geometriſch beſtimmen låßt, ſo heißt der Cirkel (circulus curvaturæ) der Krůmmungscirkel (auch circulus oſculator) und ſein Radius MK iſt der Radius oſculi. Man ſezt aber voraus, daß die Punkten V, M ſich dem Punkt unendlich nåhern, und in dieſer unendlich kleinen Diſtanz werden ſie vom Krůmmungscirkel berůhrt. Die Linien MH, NN ſeyen Tangenten der krummen Linie; dahero HW eine Tangente zugleich von circulo curvaturæ iſt; THD iſt der Krůmmungswinkel (Angulus curvaturæ).

§. 1128. **Lehrſatz.** Man heiſſe den Centriwinkel $MKN = x$, ſo iſt $MNH = \frac{1}{2}x$.

Bew.

$MNH = HNK - MNK = 90 - MNK$. aber nach §. 469.

$$MNK = 180^\circ - x = 90 - \tfrac{1}{2}x$$

$MNH = 90 - (90 - \frac{1}{2}x) = 90 - 90 + \frac{1}{2}x$. das iſt $MNH = \frac{1}{2}x$.

§. 1119. **Lehrſatz.** Wenn die Punkten M, V ſich unendlich nåhern, ſo wird zulezt der Winkel $THD = x$.

Bew.

Bew.

$HNM = 180° - WNV - MNV$ §. 443.

$MNV = 2MNK$

$HNM = 180° - WNV - 2MNK$

$MNK = \frac{180 - x}{2}$

$HNM = 180° - WNV - \frac{1}{2}(180 - x)$ das iſt

$HNM = 180 - WNV - 180 + x = x - WNV$

es ſey $WNV = HMN + d.HMN.$ ſo iſt

$HNM = x - HMN - dHMN.$ folgl. iſt herübergeſezt

$HNM + HMN + dHMN = x$ aber

$HNM + HMN = THD$ nach §. 470. folgl. ſubſtit.

$THD + dHMN = x.$ wenn nun dHMN unendlich abnimmt, ſo wird endlich $THD = x.$

§. 1120. Lehrſatz. Der Radius oſculi MK iſt $\frac{ds}{THD}$.

Bew.

$MK = \frac{1}{2}MN$; ſin. $\frac{1}{2}x$. nach trigonometr. Gründen. Wenn aber M, N ſich unendlich nähern, ſo wird aus der Sehne MN der unendlich kleine Bogen; und verwandelt ſie ſich alſo in ds; eben ſo verwandelt ſich ſin. $\frac{1}{2}x$ in $\frac{1}{2}x$ ſelbſt; aber $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}THD$; folgl. MK in dieſem Fall $\frac{1}{2}MN : \frac{1}{2}THD = MN : THD = \frac{ds}{THD}$.

§. 1121.

§. 1121. Anm. Aus der Gleichung für die krumme Linie muß hernach ds und THD beſtimmt werden; THD iſt nemlich der Krümmungswinkel; welcher aus der Natur der krummen Linien zu beſtimmen iſt; wir haben nur die Art anzeigen wollen, wie es geſchiehet; die Rechnung würde hier zu weitläuftig ſeyn. Zu einer vollſtändigen Ausführung gehört auch die Lehre von den Wendungen und Rukkehrpunkten, wenn eine krumme Linie bald die hohle, bald die erhabene Seite herauskehrt, wie eine Schlangenlinie, und die Tangenten alſo bald oberhalb bald unterhalb der Linien liegen; allein die Hauptbegriffe davon ſind ſchon hier vorgetragen; und man wird aus dem bisherigen in den Stand geſezt werden, Schriften davon leſen zu können, wenn man ſich in dieſe Materie einlaſſen will, die eben keinen ſo groſſen Einfluß, wie die übrige in die angewandte Mathematik haben, und endlich in einem Compendio eher als in Quartanten von Elementen der Mathematik, wo ſie nicht einmal genannt ſind, nur kürzlich berühret werden dörfen.

§. 1122. **Erklärung.** Die Evolution zu verſtehen, muß man nur auf zwo krumme Linien acht haben; die eine iſt diejenige, von welcher die krumme Linie durch Abwicklung entſteht; die andere iſt die abgewickelte Linie ſelbſt. Man ſeze eine krumme Linie von was für einer Gattung man will, nur daß ſie keinen Wendungs- oder Rukkehrpunkt habe, um deren erhabene (convexe) Seite ein Faden gewunden ſeye; man winde den Faden ſo ab, daß er immer geſpannt bleibe oder eine gerade Linie mache; ſo wird der Endpunkt oder die Extremität des Fadens eine krumme Linie beſchreiben, welche (curva ex evolutione genita) die aus der Abwicklung erzeugte krumme Linie heißt, die Linie aber, von welcher der Faden abgewickelt wird, heißt die Evoluta. Der geſpannte Faden kann den Radius oſculi vorſtellen, der aber alle Augenblick ſich ändert, und alſo, wie oben, nur in dem Fall, wenn zween Punkten der neu entſtandenen

krum-

krummen Linie unendlich nahe ſind, ſich gleich bleibet.

§. 1123. Zuſatz. Es ſey *Fig.* 118. AC die Evolute, ſo iſt DEA, die ex evolutione genita, und der Radius oſculi = DA + AC = EC; dann der Faden kann auch von A nach D vorher ſchon, ehe er ſich abwickelt, in eine gerade Linie ausgeſpannt ſeyn.

§. 1124. Lehrſatz. Aus der Gleichung für die aus der Evolution erzeugte Linie läßt ſich eine Gleichung für die Evolute finden.

Bew.

Es ſey *Fig.* 118. DL die gemeinſchaftliche Abſciſſenlinie für beyde curvas, DE und AC. Man ſetze DA ſey = x, AE = y, und die Coordinaten rechtwinklicht; ferner DL = v, LC = t, EC = z, und EO = w. Es iſt aber

EO : EA = OC : CL und

EO : OC = EA : CL

EO + OC : EO = EA + CL : EA das iſt

EC : EO = EA + CL : EA. und transp.

EO : EA = EC : EA + CL. alſo in Buchſtaben

$w : y = z : \frac{yz}{w} = t + y$. folglich

$$\frac{yz}{w} - y = t. \text{ das iſt}$$

$$\frac{yz - yw}{w} = \frac{(z-w)y}{w} = t.$$

Nun iſt

nr. I. $EO : OA = OC : OL$ und verſezt

$EO : OC = OA : OL$ und addendo

$EO + OC : OC = OA + OL : OL$ das iſt in der Figur

$EC : OC = AL : OL$ und verſezt

nr. II. $EC : AL = OC : OL$ aber

$OC : OL = EO : OA$ nr. I.

$EC : AL = EO : OA$ oder umgekehrt

$EO : OA = EC : AL$

$= v - x = DL - DA$.

§. 1125. Zuſatz. Wenn alſo die aus der Evolution erzeugte Linie algebraiſch iſt, ſo iſt auch ihre Evolute algebraiſch, aber nicht umgekehrt.

§. 1126.

§. 1126. Anm. Die Lehre von der Evolution hat Herr Prof. Euler Comm. Ac. Imp. Petrop. T. XII. am vollſtändigſten abgehandelt. Der erſte, der davon was gemeldt, war Hugenius, der die Cycloide beſchrieben, als eine krumme Linie, die ihrer Evolute, dem Cirkel, gleich iſt. Der Nutzen davon zeigt ſich in dem Horologio oſcillatorio und überhaupt in der Mechanik. Auſſer dieſer, nemlich der Cyclois, davon wir in verſchiedenen Stellen gehandelt, ſchiene die Betrachtungen über die Evolution, wenn man den Nutzen, den man bey Integrationsformeln hat, ausnimmt, mehr zu einer mathematiſchen Speculation zu dienen, als daß ſie von beſonderem Gebrauch wären. Jac. Bernoulli hat ſich auf dieſe Weiſe an der logarithmiſchen Spirallinie, die ſeine Erfindung war, ungemein ergözt, weil ſie nach unzählichen Veränderungen und Wendungen, wodurch ſonſt in andern Fällen andere krumme Linien entſtehen, ſich dennoch ſelbſt immer wieder darſtellt; zu welchem Ende er ſie auch als ein Sinnbild der Auferſtehung mit der Innſchrift: Eadem mutata reſurgo, auf ſeinen Grabſtein ſetzen lieſſe.

§. 1127. Anm. Diß iſt nun dasjenige, was wir von der höhern Geometrie in dem gegenwärtigen Compendio vortragen wollten; wir glauben nicht, daß irgend eine Materie von Wichtigkeit übergangen worden ſeye, und dörfen uns dißfalls

auf

auf ſolche Leſer berufen, welche Kenner von der Sache ſind, und wiſſen, wie man ſolche Lehren in einem Auszug vortragen ſolle, damit man im folgenden einen Nutzen davon habe und in den Stand geſezt werde, weitere mathematiſche Schriften mit Nutzen zu leſen. Unſere nächſte Beſchäftigung wird

alſo auf die angewandte Mathematik gehen, worinnen
nach dem bisherigen Plan fortzuarbeiten
uns angelegen ſeyn
wird.

Die ſtatiſche Wiſſenſchaften,

oder

die Statik, ſonſt Mechanik, die Hydroſtatik, die Aerometrie und die Hydraulik.

Erſtes Hauptſtük,
Von der Statik ſonſt Mechanik.

§. 1.
Erklärung.

Die ſtatiſche Wiſſenſchaften handeln überhaupt von dem Gleichgewichte der Cörper, ſie mögen flüßig oder veſte ſeyn. Die Statik im eigentlichen Verſtand beſchäftiget ſich mit dem Gleichgewichte der veſten Cörper. Sie iſt dahero von der Mechanik, welche die Bewegung ſelbſt, und die Geſetze der Bewegung u. ſ. w. nach theils coſmologiſchen theils phyſikaliſchen Gründen zugleich mit in die Rechnung bringt, hinlänglich unterſchieden.

§. 2. Anmerk. Das, was man bisher in der angewandten Mathematik vorgetragen hat, iſt eigentlich die Statik der Alten; und der Nahme einer Mechanik, den man gemeiniglich dieſer Wiſſenſchaft beylegt, iſt viel zu allgemein, als daß er durch die enge Schranken der einfachen und einiger zuſammengeſezter Maſchinen beſtimmt werden könnte. Diß iſt auch der Grund, warum wir gegenwärtiges Hauptſtük nur von der Statik und nicht von der Mechanik benennen, weil wir die Grenzen der angewandten Mathematik nicht überſchreiten oder ſelbige bis zur Naturlehre, welche immer eine eigene Wiſſenſchaft war, erweitern, ſondern nur dasjenige vortragen wollen, was bisher alle diejenige, die von Archimedes an bis auf Wolfen,

und von ihme bis auf die neueſte Zeiten die angewandte Mathematik gelehret, zu den ſtatiſchen Wiſſenſchaften gerechnet haben. Nur müſſen wir vorhero nach dem bisherigen Plan etwas von der Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft ſagen.

Geſchichte der Statik.

§. 3. Den Grund zu dieſer Wiſſenſchaft, in ſo ferne ſie eine Wiſſenſchaft iſt, hat vornemlich Archimedes in ſeinen Büchern de Aequiponderantibus, oder von dem wagerechten Stand der ſchweren Cörper gelegt. Die Archimedeiſche Säze hat hernach Pappus L. VIII. Collectan. Mathem. in Rukſicht auf die fünf einfache Maſchinen, den Hebel (vectis) das Rad an einer Axe (axis in peritrochio) den Kloben (trochlea) die Schraube (cochlea) und den Keil (cuneus) in ein weiteres Licht zu ſezen geſucht.

§. 4. Man iſt mit dieſem Vortrag zufrieden geweſen, bis Galiläus, der überhaupt die Mechanik, wie die andere mathematiſche Wiſſenſchaften mit neuen Erfindungen bereichert, auch zum theil Borellus in der Statik ein gröſſeres Licht aufſtekten, und beſonders nach dem Plano inclinato den Fall und Druk der ſchweren Cörper näher beſtimmten Doch war man immerhin mehr bedacht, die Lehre ſelbſt zu erweitern, als ihre erſte Gründe richtig zu beweiſen; oder wie ſich Herr d'Alembert ausdrukt in der Vorrede zu ſeiner Dynamik: On a été plus occupé jusqu'à preſent à augmenter l'edifice, qu'à en eclairer l'entrée, & on à penſé principalement à l'elever ſans donner à ſes fondemens toute la ſolidité convenable.

§. 5.

§. 5. In neuern Zeiten hat man dahero auch dieſe Lehre gründlicher zu erweiſen geſucht. Das erſte Geſez der Statik, daß von zwey gleichen Gewichten dasjenige, das von dem Mittelpunkt der Bewegung weiter entfernt ſeye, ein Uebergewicht bekomme, haben Barrov und Sturm als einen Grundſaz angenommen. Newton hat aus der zuſammengeſezten Bewegung die Lehre von dem Gleichgewicht hergeleitet; und Varignon hat beſonders dieſen Beweis deutlich und ſo auseinander geſezt, daß er glaubte, etwas zuerſt geſagt zu haben, das man vorhero ohne Beweis angenommen hätte. Allein Joh. Bernoulli tadelt den Varignoniſchen Beweis, Opp. T. IV. nr. 177. und zeigt, daß man die Lehre von der zuſammengeſezten Bewegung erſt aus dem Archimedeiſchen Grundſaz erweiſen müſſe, wann man, ohne einen Cirkel zu begehen, richtig ſchlieſſen wolle. Folglich muß man den erſten Saz auf eine andere Art erweiſen, ohne die zuſammengeſezte Bewegung vorauszuſetzen, oder als demonſtrirt anzunehmen.

§. 6. Anm. Die Stelle des Varignon ſteht in ſeinem Projet d'une Nouvelle Mechanique Paris 1687. wo er p. 64. ſchreibt: Perſonne, que je ſache n'avoit encore demontré la charge, ni la direction des points d'apui des leviers; il ne paroit pas même qu'il ſoit aiſé de le faire par les principes ordinaires; ſans cela cependant il y a bien des problemes, qu'on ſauroit reſoudre. Und wiederum p. 66. Voilà ce qu'on appelle ordinairement le prémier principe de Mechanique, & ce que perſonne, du moins que je connoiſſe, n'avoit encore demontré de cette maniere, ni ſi generalement. Er hat es aber aus der Lehre von der zuſammengeſezten Bewegung demonſtrirt; wie wir den Beweis in der Abhandlung ſelbſt vortragen werden. Nun wendet Herr Joh. Bernoulli dagegen ein, daß man den Beweis von der zuſam-

ſammengeſezten Bewegung ohne aus der Lehre vom Hebel nicht überzeugend vortragen könne, weil erſtlich, wie Varignon ſelbſt den Beweis p. 14. Corol. 3. vorträgt, eine anfängliche Bewegung (motus naſcens) vorausgeſezt wird; aber bey dem Gleichgewicht, davon hier die Rede iſt, findet gar keine Bewegung ſtatt, alſo auch keine anfängliche; zweytens nimmt man an, daß keine Kraft von der andern aufgehalten werde, und doch folgert man daraus, die zuſammengeſezte Kraft ſeye kleiner als die Summe der zuſammenſetzenden Kräfte, welches nicht geſchehen könnte, wenn keine die andere aufhielte oder verminderte. Dieſe Gründe des Joh. Bernoulli gegen den Varignon hat ſein Herr Sohn, Dan. Bernoulli, weiter ausgeführt in Examine Principiorum Mechanicorum T. I. Comment. Petropol. und Herr d'Alembert vornemlich in Rukſicht auf die zuſammengeſezte Bewegung, in ſeiner Dynam. P. I. ch. 2. wodurch auch Herr Prof. Käſtner bewogen wurde, dieſe Lehre ausführlich, nach dem Sinn des Herrn Joh. Bernoulli, vorzutragen, zu welchem Ende er ſchon 1753. eine Theoriam vectis & compoſitionis virium ſeiner Einladungsſchrift zu den academiſchen Vorleſungen voranſchikte, und nachgehends 1761. ſeinen Anfangsgründen der angewandten Mathematik ſolche einverleibt hat, um ſo mehr als auch Herr de la Hire ähnliche Betrachtungen in ſeiner Mechanik über den Hebel angeſtellt hatte.

§. 7. Wir haben die Geſchichte von dem Fundamentalgeſez aller ſtatiſchen Wiſſenſchaften bis auf unſere Zeiten vorgetragen; und weil wir nur von dieſem reden, ſo wird man die Geſchichte der ganzen Mechanik, welche ungleich fruchtbarer und weitläuftiger iſt, hierum ſo weniger erwarten, als wir bisher nur die Geſchichte derjenigen Lehren vorgetragen, die wir in der Abhandlung ſelbſt ausgeführt haben; doch werden wir hie und da in den Anmerkungen etwas von der Geſchichte ſolcher mechaniſchen Erfindungen ſagen, welche in die ſtatiſche Wiſſenſchaften einen nähern Einfluß haben. Was endlich die zuſammengeſezte Maſchinen, oder die Gegenſtände der practiſchen Mechanik betrift, ſo ſind ſie ſo mannigfaltig, daß man ein eigenes Werk nur von ihrer Geſchichte ſchreiben könnte. Man

wird alles hieher gehörige geſagt haben, wenn man den Leſer auf Leupolds Theatrum machinarum oder auf Deschales mundum mathematicum verweiſet. Was aber die einfachen Maſchinen betrift, ſo findet man die gründlichſte Abhandlung davon in Comm. Acad. Petrop. T. IX. wo Herrn Prof. Krafften Theoria de machiniis ſimplicibus eingerücket iſt, da alle einfache Maſchinen auf den Hebel und das planum inclinatum reducirt werden; auſſer dieſen iſt unter den neueſten noch hieher zu zehlen Traitè Elementaire de Mechanique & de Dynamique appliquè principalement aus mouvemens des Machines. par Mr. l'Abbé *Boſſut* 1763. wo beſonders von den Hinderniſſen der Bewegung, der Friction u. ſ. w. gehandelt wird.

Allgemeine Begriffe von den in der Statik vorkommenden Wörtern, der Kraft, Laſt, Schwere, Direction u. ſ. w.

§. 8. Erklär. Eine Kraft heißt, was eine Bewegung hervorbringen oder verhindern kann. Wenn zwo oder mehrere Kräften ſo einander hindern oder entgegengeſezt ſind, daß keine Bewegung erfolgen kann, ſo heißt dieſer Zuſtand das Gleichgewicht (ſtatus æquilibrii); und Kräfte, die einander im Gleichgewicht halten, werden todte Kräfte genannt; lebendig aber, wenn eine die andere überwiegt, und eine Bewegung erfolgt.

§. 9. Zuſatz. Zwo Kräften, die einander entweder ganz oder zum Theil an der Bewegung hin-

hindern, heiſſen überhaupt Kraft und Laſt. Unerachtet eigentlich die Laſt auch eine Kraft, nemlich die entgegengeſezte Kraft iſt.

§. 10. Zuſatz. Kraft und Laſt können alſo Gewichter, Steine, Feuer, Waſſer, Erde, Luft, Menſchen, Thiere ſeyn u. ſ. w. weil ſie alle eine Bewegung hervorbringen, und derſelben wiederſtehen können.

§. 11. Zuſatz. Eine jede Kraft läßt ſich durch ein Gewichte vorſtellen; dann wenn ein beladener Wagen von vier Pferden gezogen wird, ſo wird er eben ſo aus der Stelle gebracht werden, wenn man durch Maſchinen, davon wir handeln werden, Gewichter nach einerley Richtung mit den Pferden anbringt, die ſo viel ziehen, als die Pferde zuſammen; eben dieſe Verwandlung hat bey allen andern Kräften ſtatt. Folglich laſſen ſich alle Kräfte durch Gewichter vorſtellen.

§. 12. Zuſatz. Weil alle Gewichter, in ſofern ſie mit einander verglichen werden können, entweder gleich, oder gröſſer, oder kleiner ſind, dieſes aber auch von allen Zahlen und geraden Linien gilt, ſo kann man alle Kräfte und ihre Verhältniſſe zu einander durch gerade Linien ausdrücken. z. E. Eine Kraft, die noch einmal ſo viel als die andere wirket, verhält ſich wie 2 zu 1, oder wie eine Linie von 2 Schuh, zu einer Linie von einem Schuh.

§. 13. Erfahrung. Alle Cörper, die von einerley oder verſchiedenen nicht allzu groſſen Höhen auf die Erde fallen, fallen in parallelen Linien, und wenn man die fallende Cörper mit Fäden an einen geradelinigten horizontalen Stab bindet, ſo wer-

werden die Fäden alle parallel ſeyn, und mit dem Stab rechte Winkel machen.

§. 14. Erklär. Dieſe Linien heiſſen die Directionen oder Richtungen der Schwere, welche auf dem Horizont oder der ſcheinbar ebenen Fläche der Erde perpendicular (ſenkrecht, lothrecht, vertical) ſtehen. Dahero ſie, wenn die Erde eine Kugel iſt, verlängert durch den Mittelpunkt gehen würden.

§. 15. Erkl. Der Punkt eines Cörpers, wo er von der Spitze einer geraden Linie, z. E. von einer Nadel ſo unterſtüzt wird, daß er auf keine Seite mehr wanket als auf die andere, heißt der Schwerpunkt.

§. 16. Zuſatz. Man kann ſich alſo vorſtellen, daß die ganze Schwere eines Cörpers in ſeinem Schwerpunkt zuſammengefaßt ſeye.

§. 17. Erfahrung. Verſchiedene gleich groſſe Cörper ſind nicht gleich ſchwer; z. E. eine bleyerne und hölzerne Kugel von einerley Diameter.

§. 18. Erklär. Cörper, die unter einerley Raum ſchwerer als andere ſind, werden dichter und von ſchwererer Art, (denſiora, ſpecifice graviora) die andere locker oder von leichterer Art (rariora, ſpecifice leviora) genannt.

§. 19. Zuſatz. Wenn alſo die Materie einerley iſt, ſo verhalten ſich die Gewichter wie die Räume. z. E. Ein Cubicſchuh Bley verhält ſich zu zwey Cubicſchuh Bley, wie eins zu zwey.

Allgemeine Theorie des Hebels,
(Theoria Vectis.)

§. 20. Erklär. An dreyen Punkten einer geraden unbeugſamen Linie oder eines Stabs ſollen

zwey Gewichte, das iſt, Kraft und Laſt, nebſt einer Unterlage, um welche ſich die Linie drehe, angebracht werden; ſo hat man einen Hebel. Wenn die Laſt und Kraft an den beeden Enden der Linie und die Unterlage dazwiſchen angebracht wird, ſo hat man einen **wagförmigen** Hebel (vectis Heterodromus) wie *Fig.* 1. iſt aber Laſt und Kraft auf einer Seite, und die Unterlage an der andern Extremität, ſo entſtehet ein **Hebel der zweyten Art** (vectis homodromus.) wie *Fig.* 2. Die Unterlage heißt auch der **Ruhepunkt**, griechiſch (hypomochlion) und die Diſtanzen der Kraft und Laſt vom Ruhepunkt die **Arme des Hebels**.

§. 21. **Lehrſatz.** Wenn in der Mitte eines Hebels die Unterlage angebracht iſt, und folglich beederſeits die Aerme gleich ſind, ſo wird ein Gleichgewicht entſtehen, wenn man an beede Endpunkte gleiche Gewichte hängt. Dann es ſey *Fig.* 1. $AC = CB$, in C die Unterlage, und $Q = P$, wo die Directionen ſenkrecht; ſo iſt alles auf beeden Seiten der Unterlage einerley; folglich iſt keine Urſache vorhanden, warum Q ſinken ſollte, die nicht eben ſowohl für P gelten könnte; da nun P und Q nicht zugleich ſinken können, ſo muß ein Gleichgewicht ſeyn.

§. 22. **Zuſatz.** Weil $Q = P$ und $AC = CB$, ſo iſt $Q . AC = P . CB$. Dieſes Product heißt man das **Moment**; folglich ſind die Momente §. 21. gleich.

§. 23. **Zuſatz.** Die Unterlage in C trägt alſo die beede Gewichter Q und P, oder 2P, weil $Q = P$; wobey man ſich AB als eine mathematiſche Linie vorſtellt, die keine Schwere hat.

§. 24.

§. 24. Zuſatz. Wenn man alſo ſtatt der Unterlage in C durch eine Rolle *Fig.* 2. ein Gewicht 2P oberhalb anbringt, ſo iſt eben ſo wie vorhin ein Gleichgewicht.

§. 25. Zuſatz. Schaft man die Laſt bey Q hinweg, und legt den Ruhepunkt unter A, ſo wird er ſo viel tragen als Q = P ſchwer iſt.

§. 26. Lehrſatz. In einem Hebel der zweyten Art iſt ein Gleichgewicht, wenn das eine Gewicht vom Ruhepunkt noch einmal ſo weit entfernt iſt als das andere.

Beweis.

Wenn man *Fig.* 2. bey A den Ruhepunkt ſtatt des Gewichts Q *Fig.* 1. und bey C das Gewicht 2P durch eine Rolle, ſtatt des Ruhepunkts C *Fig.* 1. anbringt, ſo bleibt alles wie vorhin, und A trägt ſo viel als Q gezogen, 2P aber zieht ſo viel als C getragen; folglich muß noch ein Gleichgewicht ſeyn. Die Figur aber ſtellt einen Hebel der zweyten Art vor, in welchem die Diſtanzen vom Hypomochlio wie eins zu zwey, und die Gewichter umgekehrt auch ſo ſind. Folglich iſt bey dem Hebel in dieſem Fall ein Gleichgewicht.

§. 27. Zuſatz. Weil $P : 2P = AC : AB$; indem $AB = 2AC$; ſo iſt $P . AB = 2P . AC$; und die Gewichter verhalten ſich umgekehrt wie die Diſtanzen vom Ruhepunkt.

§. 28. Zuſatz. Es bleibe alles wie §. 26. Man mache *Fig.* 3. $AD = AC$, ſchaffe die Laſt bey C hinweg, und hänge ſie bey D an, ſo wird wieder ein Gleichgewicht im wagförmigen Hebel ſeyn. Dann die Laſt 2P, die wir $+ F$ nennen wollen,

zieht

zieht ſo ſtark über ſich, als die entgegengeſezte $-F$ unter ſich ziehet; folglich heben ſie einander auf; aber $-F=Q$; nach der Vorausſetzung; folglich heben ſich $+F$ und Q gegeneinander auf; da alſo alles andere geblieben iſt, ſo muß auch jezo noch ein Gleichgewicht ſeyn.

§. 29. Zuſatz. Alſo iſt wieder wie §. 27. $Q.AD=P.AB$; oder $P:Q=AD:AB$; das iſt, die Gewichter in einem wagförmigen Hebel verhalten ſich umgekehrt wie die Diſtanzen vom Ruhepunkt, wenn die Diſtanzen wie eins zu zwey ſind.

§. 30. Zuſatz. Die Unterlage in A trägt $Q+P$; man nenne $Q=nP$, ſo trägt die Unterlage $nP+P=(n+1)P$. Dieſes Gewicht könnte man bey R in einer Rolle anbringen. Die Diſtanzen AD und AB ſind wie eins zu zwey, nach der Vorausſetzung; folglich $2AD=AB$; man ſeze bey D ſtatt Q eine Unterlage, die eben ſo viel trägt als Q zieht, ſo hat man den Hebel der zweyten Art, wo $2AD+AD=DB$; oder wenn $2=n$ geſezt iſt, $nAD+AD=(n+1)AD=DB$. Alſo iſt $(n+1)$ in der Diſtanz AD, mit P in der Diſtanz $(n+1)AD$ im Gleichgewicht, oder $(n+1)P.AD=(n+1)AD.P$.

§. 31. Zuſatz. Wenn $n=1$, ſo fließt der Beweis aus §. 26. iſt $n=2$, ſo fließt er aus §. 30. alſo wird er auch gelten für 4, wenn $n=3$, für 5, wenn $n=4$ u. ſ. w. geſezt wird; weil überhaupt $(n+1)P.AD=(n+1)AD.P$. Welches eben ſo im wagförmigen Hebel erwieſen wird; folglich verhalten ſich in allen Hebeln die Gewichter umgekehrt wie ihre Diſtanzen vom Ruhepunkt.

§. 32. Anm. Diß iſt das weſentlichſte aus Herrn Prof. Käſtners Beweis für dieſen Grundſaz der ganzen Mechanik; die eigene Worte p. 15. des II. Th. der math. Anfangsgründe ſind folgende: Mir iſt niemand bekannt, (auſſer der in der Vorrede genannte de la Hire) der die Lehre vom Hebel auf dieſe Art, und niemand, der ſie vollkommen überzeugend vorgetragen hätte.„ Das leztere läßt faſt vermuthen, als ob Herr Prof. Käſtner ſelbſt glaubte, auch dieſer Beweis ſey nicht vollkommen überzeugend; weil ſo ein genauer Unterſchied in den Ausdrücken gemacht wird. Wir werden dahero im folgenden auch den Varignoniſchen Beweis noch vortragen, und merken hier nur noch an, daß, nach dem Urtheil der größten Kenner, nichts ſchwerer iſt, als die erſte Grundgeſetze der Natur vollkommen überzeugend zu erweiſen. Und eben darum darf man ſich nicht wundern, daß man ſich nach dem Ausdruk Herrn d'Alemberts mehr angelegen ſeyn läßt, das Gebäude der Wiſſenſchaften zu erweitern, als den Grund davon recht zu beveſtigen; jenes iſt ungleich leichter als dieſes.

Allgemeine Theorie der Zuſammenſetzung der Kräfte, nebſt dem Varignoniſchen Beweis vom Hebel.

§. 33. Anm. Ich werde hier einen doppelten Beweis von der Zuſammenſetzung der Kräften geben, den erſten nach Herrn Prof. Käſtners Theorie, den andern nach der Varignoniſchen Theorie, aus welcher leztern hernach die Theorie des Hebels hergeleitet werden ſolle. Unſern Leſern wird es nicht ſchwer fallen, ſolche wichtige Unterſuchungen von mehrern Kennern leſen zu können.

§. 34. Erklär. Ein Winkelhebel iſt ein Hebel, der ſich um den Scheitelpunkt unverrükt und ſo drehet, daß ſich der Winkel nicht ändert; wenn man z. E. eine eiſerne Stange unter einem ebenen Winkel ſchneiden läßt, ſo kann man ihn wie ACB *Fig.* 5. betrachten.

§. 35. Lehrſatz. In einem Winkelhebel ſind die unter rechten Winkeln ziehende Kräften im Gleichgewicht, wenn ſie ſich umgekehrt wie die Aerme des Hebels verhalten.

Satz.

Satz. *Fig.* 5.

$$P \cdot AC = Q \cdot BC.$$

Bew.

In der Figur iſt nach geometriſchen Gründen aC = AC, Cb = CB; es ſey ferner p = P und q = Q; ſo iſt nach §. 31.

$$p \cdot aC = q \cdot bC$$

$$p = P, \quad q = Q \quad \text{ſubſtituirt}$$

$$P \cdot aC = Q \cdot bC$$

$$aC = AC, \quad bC = BC \quad \text{ſubſtituirt}$$

$P \cdot AC = Q \cdot BC$. Das iſt, im Winkelhebel ſind die Gewichter umgekehrt wie die Diſtanzen vom Scheitelpunkt des Winkels, nemlich vom Punkt C.

§. 36. Lehrſatz. Es ſey *Fig.* 6. ACB ein Winkelhebel, die Kräften ſeyen P und Q; ihre Direction, unter welcher ſie ziehen, ſey ſchief; ſind ſie im Gleichgewicht, ſo ſind ſie auch im Gleichgewicht in dem auf rechtwinklichte Richtungen reducirten Hebel DCE. Dann man fälle von C nach AP den Perpendikel CD, und nach BQ den Perpendikel CE; ſo iſt, nach §. 34. CE : CD = P : Q.

§. 37. Zuſatz. Wenn man AP und BQ nach M verlängert, wo ſich beede Linien ſchneiden, und die Linie MC ziehet, ſo iſt es eben ſo viel, als wenn der Punkt C mit der Kraft MC nach M gezogen würde, und MC heißt die mittlere Richtung der Kräften.

§. 38. Lehrſatz. Wenn CT mit MB, und CV mit MA parallel gezogen wird, ſo iſt

$$CD : CE = MV : MT.$$

Bew.

Bew.

$$
\begin{array}{l}
CTD = TMB \\
\quad TMB = CVB \\
\hline
CTD = CVB. \\
D = E \text{ ſind rechte Winkel} \\
\hline
\Delta TCD \backsim \Delta VCE. \text{ folgl.} \\
CD : CE = CT : CV. \\
\quad CT : CV = MV : MT. \\
\hline
CD : CE = MV : MT.
\end{array}
$$

§. 39. Zuſatz. Wenn man auf den verlängerten Richtungen der Kräften von dem Punkt M an, wo ſie einander ſchneiden, zwo Linien annimmt, die ſich wie die Kräften verhalten, ſo kann man das Parallelogramm ergänzen, deſſen Diagonale von M an gerechnet, die mittlere Richtung iſt.

§. 40. Lehrſatz. Die zuſammenſetzende Kräften MT, MV verhalten ſich umgekehrt wie die Sinus der durch die mittlere Richtung gemachten Winkel.

Satz. *Fig.* 6.

$$MT : MV = \text{ſin. } CMV : \text{ſin. } CMT.$$

Bew.

$$
\begin{array}{l}
MT : MV = \text{ſin. } TCM : \text{ſin. } MCV \\
\quad TCM = CMV, \; MCV = CMT \text{ ſubſt.} \\
\hline
MT : MV = \text{ſin. } CMV : \text{ſin. } CMT.
\end{array}
$$

§. 41. Zuſ. Weil $MC : MT = \text{ſin. } CTM : \text{ſin. } TCM$, aber $CTM + TMV = 180°$, ſo iſt

$$
\begin{array}{l}
\text{ſin. } CTM = \text{ſin. } TMV \;\; \text{§. 689. I. Th.} \\
\hline
\text{folgl. } MC : MT = \text{ſin. } TMV : \text{ſin. } TCM \\
\quad TCM = CMV. \\
\hline
\text{ſo iſt } MC : MT = \text{ſin. } TMV : \text{ſin. } CMV.
\end{array}
$$

§. 42.

§. 42. Zuſatz. Eben ſo iſt auf der andern Seite MC : MV = ſin. TMV : ſin. CMT aus dem nemlichen Grunde.

§. 43. Zuſatz. Eine jede Kraft läßt ſich alſo in ſo viel zuſammenſetzende verwandeln als man will, und die zuſammenſetzende laſſen ſich in eine verwandeln.

§. 44. Anm. Bisher haben wir den Beweis vorgetragen, wie er aus der Lehre vom Hebel fließt: nun ſoll er auch ohne Rukſicht auf dieſe Lehre vorgetragen werden; wobey wir einen Verſuch wagen, ob man ihn mit Vermeidung der oben gemachten Vorwürfe §. 5. vortragen könne.

§. 45. Lehrſatz. Wenn zwo Kräften nach verſchiedenen Richtungen ziehen, die nicht gerade entgegengeſezt ſind, ſondern einen Winkel machen, ſo wird der gezogene Cörper die Diagonallinie durchlaufen. Dann wenn

1) Die Kräften gleich und gerade entgegengeſezt ſind, ſo erfolgt keine Bewegung, weil eben die Urſach vorhanden, warum er nach der einen Seite ſich wenden ſollte, als nach der andern. Da er aber auf beede zugleich ſich nicht lenken kann, ſo bleibt er unbewegt.

2) Sind die Kräften ungleich, ſo wird C nach dem Satz des zureichenden Grundes dahin gezogen werden, wo die gröſſere Kraft angewandt wird.

3) Sind die Kräfte gleich und wirklich unter einem gegebenen Winkel, ſo wird *Fig.* 7. C ſo ſtark nach A als nach B gezogen, folglich muß es ſich ſo ſtark nach A als B lenken, das geſchieht, wenn ACB durch die Richtung CD in zwey gleiche Theile getheilt wird; durch dieſe Theilung aber wird die Diagonallinie CD beſchrieben.

4) Zieht endlich die Kraft AC ſtärker als CB *Fig.* 8. ſo wird C mehr gegen AC ſich lenken, doch ſo, daß CB auch eine Wirkung noch behält; das geſchicht, wenn der Winkel ACB ſo getheilt wird, daß ACD um ſo viel kleiner wird, als DCB, und in wie viel AC gröſſer iſt als CB; durch dieſe Theilung aber wird die Diagonallinie CD beſchrieben, wo AC, CB wie ſin. DCB : ſin. ACB.

§. 46. Anm. In dieſem Beweis wird der Satz des zureichenden Grundes allein vorausgeſezt, woraus das geſagte richtig

fließet.

fließet. Erkennet man nun ſeine Richtigkeit, ſo wird ſich der Varignoniſche Beweis vom Hebel leicht verſtehen laſſen. Wir haben um ſo eher dieſen Beweis hier anbringen wollen, als Newton ſelbſt auf eine ähnliche Weiſe, wie nach ihm Varignon, geſchloſſen hat.

§. 47. Lehrſatz. Wenn zwo Kräften E und F an dem wagförmigen Hebel MBN, unter was für Richtungen man will, (hier *Fig.* 9. unter ſchieſen und zwar ſpizwinklichten Richtungen) ziehen, ſo verhalten ſich die Kräften E und F umgekehrt wie die auf die Richtungslinien von dem Ruhepunkt aus gezogene Perpendikel BD, BP.

Saz. *Fig.* 9.

$$E:F = BP:BD \text{ oder } E.BD = F.BP.$$

Bew.

Man verlängere die Directionen AE und NF, bis ſie ſich in A durchſchneiden, den Punkt A verbinde man mit dem Ruhepunkt B durch die Linie BA; dieſe Linie verlängere man nach Belieben bis G; AG ſoll die Kraft ausdrucken, mit welcher B gezogen wird, oder die Laſt die B trägt, wenn E und F ziehet; AF verlängere man nach R, und AE nach S; bis ſich das Parallelogramm ARGS beſtimmt; ſo ſind AG, AR die zuſammenſezende Kräfte, welche ſich durch Linien jedesmal ausdrucken laſſen. Dieſes vorausgeſezt, ſo iſt

$$E:F = AS:AR.$$

$$AS = RG \text{ ſubſtituirt}$$

$$E:F = RG:AR.$$

$$RG:AR = \text{ſin. } GAR : \text{ſin. } AGR.$$

$$E:F = \text{ſin. } GAR : \text{ſin. } AGR$$

$$GAR = BAN$$

$$\frac{\begin{array}{l} E:F = \sin. BAN : \sin. AGR \\ \qquad\qquad AGR = GAS = MAB. \end{array}}{\begin{array}{l} E:F = \sin. BAN : \sin. MAB. \\ \qquad \sin. BAN = BP;\ \sin. MAB = BD \end{array}}$$

$E:F = BP:BD$ oder wenn man die äuſſerſte und mittlere Glieder multiplicirt

$E.BD = F.BP.$

§. 48. Zuſatz. Die gröſte Wirkung der Kräften iſt alsdann, wenn beede unter einem rechten Winkel einen Hebel ziehen, wie aus dem Beweis von ſelbſt erhellet.

§. 49. Anm. In dem Beweis haben wir einen wagförmigen Hebel vorausgeſezt; der nemliche Beweis läßt ſich aber in der ſchon bekannten Veränderung eben ſo leicht auf die Hebel der zweyten Art anwenden.

Anwendung der Lehre vom Hebel auf die Erfindung des Schwerpunkts, der Gewichter, der Zeiten u. ſ. w. ferner die Waagen und Schnellwaagen.

§. 50. Lehrſatz. Das Product der Laſt in den ganzen Hebel dividirt durch die Summe der Laſt und Kraft iſt der Ort des Ruhepunkts, wenn man die gröſſere Diſtanz als unbekannt $=x$ ſezet. Dann es ſey *Fig.* 3.

$DB = a$

$AB = x$ ſo iſt $AD = a - x$. folgl. nach §. 47.

$Q.AD = P.AB$ oder in Buchſtaben

$Q.(a-x) = P.x.$ oder wirklich multiplicirt

$Qa - Qx = Px$

$\underline{\qquad Qx = Qx}$ addirt;

Qa

$$Qa = Px + Qx = (P+Q)x. \quad :P+Q$$

$$\frac{Qa}{P+Q} = x.$$

§. 51. Zuſatz. Folglich iſt $AD = a - x = \frac{Pa}{Q+P}$; und alſo, je nachdem man die gröſſere oder kleinere Diſtanz nennt, der Ort des Ruhepunkts das Product vom ganzen Hebel in eine der Kräfte dividirt durch die Summe der Kräfte.

§. 52. Zuſatz. Iſt $P = Q$, ſo iſt $x = \frac{Pa}{2P} = \frac{1}{2}a$; folglich der Ruhepunkt in der Mitte des Hebels.

§. 53. Anm. Der Hebel muß aber von einerley Materie ſeyn, deſſen gleiche Theile gleich ſchwer ſind; alſo entweder ganz von Eiſen, oder Holz u. ſ. w. Iſt ſeine Materie verſchiedener Art, ſo muß man ihn auf einen mathematiſchen Hebel reduciren, und ſeine ganze Schwere in Gewichter verwandeln, die an gehörigen Orten, wie ſogleich gezeigt wird, anzubringen ſind.

§. 54. Lehrſatz. Wenn in einem Hebel der zweyten Art Laſt und Kraft gegeben iſt, nebſt der Diſtanz der Kraft von der Laſt, ſo kann man die Lage des Hebels finden, und den Ort des Ruhepunkts, welcher das Product der Diſtanz der beeden Kräfte in die Summe der Kräfte durch die Laſt dividirt iſt.

Dann es ſey *Fig.* 4. $DB = x$, $AB = a$, Q und P gegeben; ſo iſt $AD = x - a$; und

$AD . Q = DB . P$ oder in Buchſtaben

$(x-a)Q = Px$. und wirklich multiplicirt

$Qx - aQ = Px$ und verſezt

$Qx - Px = aQ$

$(Q-P)x = aQ \quad :Q-P$

$$x = \frac{aQ}{Q-P} = DB.$$

§. 55. Zuſatz. Sezt man AD = x, und AB = a, ſo iſt AD = $\frac{P \cdot AB}{Q-P}$.

§. 56. Lehrſatz. Wenn an einem Hebel der zweyten Art die Kräften in q und p ſind, und c der Ruhepunkt iſt; ſo wird die Summe der Momente dividirt durch die Summe der Kräfte den Ort des Schwerpunkts beſtimmen, wo beede Gewichte aufgehängt und in eins gebracht werden. Der Ort ſey a, ſo iſt *Fig.* 10.

$$ca = \frac{cd \cdot q + cb \cdot p}{p + q}.$$

Bew.

$cd.q = cb.p.$ §. 31. ferner

$ca.p+q = cd.q + cb.q.$ §. 31. 30.

$p+q$

$$ca = \frac{cd \cdot q + cb \cdot q}{p + q}.$$

§. 57. Zuſatz. Weil die Richtungen bey einem wagförmigen Hebel entgegengeſezt ſind, ſo findet man in ſolchem Fall den Ort des Schwerpunkts, wenn man nur ſtatt + das Zeichen — ſetzet; ſo iſt *Fig.* 3. $CA = \frac{CD \cdot Q - CB \cdot P}{Q + P}.$

§. 58. Lehrſatz. Wenn *Fig.* 11, BD ein mathematiſcher Hebel iſt, an dem drey Gewichte P, H, Q hangen, ſo kann man aus dieſen drey Gewichten die Länge des Hebels, den Ort des mittlern Gewichts und den Ort der Unterlage finden.

Wenn man zwey Gewichte in eines verwandelt nach §. 30. ſo iſt nach §. 47. 31.

$$\begin{array}{l} AD.Q = AM.H+P \\ \qquad AM.(H+P) = AV.H + AB.P. \\ \hline AD.Q = AV.H + AB.P. \\ AD = DB - AB \text{ in der Figur; ſubſtit. gibt} \\ \hline DB.Q - AB.Q = AV.H + AB.P \\ \qquad AV = AB - BV \text{ in der Fig. diß ſubſt.} \\ \hline DB.Q - AB.Q = AB.H - BV.H + AB.P. \\ \qquad AB.Q = AB.Q \text{ add.} \\ \hline DB.Q = AB.H - BV.H + AB.P + ABQ. \\ \quad BV.H = BV.H \text{ ſubtr.} \\ \hline DB.Q - BV.H = AB.H + AB.P + AB.Q. \\ \qquad = AB(H+P+Q) \\ \hline \qquad :H+P+Q \\ \dfrac{DB.Q - BV.H}{H+P+Q} = AB. \end{array}$$

§. 59. Zuſatz. Eben ſo kann man die Laſt Q oder die Kraft P finden; da $Q = \frac{AM.(H+P)}{AD.}$

§. 60. Zuſatz. Man ſiehet hieraus, wie man einen phyſikaliſchen Hebel, der keine mathematiſche Linie iſt, behandeln ſolle; man ſtellt ſich ſein Gewicht in H am Schwerpunkt V vor, und hat hernach einen mathematiſchen Hebel aus den Gewichtern.

§. 61. Zuſatz. In einem ſo geordneten Hebel kann man allemal aus drey gegebenen Stücken das vierte finden; die Stücke ſind Laſt, Kraft, und die beede Diſtanzen vom Ruhepunkt. Die Diſtanzen ſeyen AC, CB, Laſt und Kraft Q und P; ſo iſt, weil AC. Q = CB. P, durch die gewöhnlichſte Regeln *Fig.* 1. 2.

$$P = \frac{AC.Q}{CB} \qquad AC = \frac{CB.P}{Q}$$

$$Q = \frac{CB.P}{AC.} \qquad CB = \frac{AC.Q}{P.}$$

§. 62. Anm. Die Laſt ſey 100 Pfund; die kleinere Diſtanz AC=1′, die gröſſere CB = 10; ſo iſt $P = \frac{100}{10} = 10$; alſo kann man mit 10 Pf. hundert Pf. im Gleichgewicht halten; fragt man, wie groß der längere Arm ſeyn müſſe, wenn ich mit einem Pfund, bey der kürzern Diſtanz vor einen Schuh 1000 Centner im Gleichgewicht halten will; ſo iſt $CB = \frac{1 \cdot 100000}{1} = 100000'$, ſo lange muß der andere Arm ſeyn; und der ganze Hebel hält alſo 100001′. Das erläutert die Forderung des Archimedes δος μοι πȣ ϛησαι και την γην κινησω. Die Figur zu dieſer Forderung hat Varignon ſeiner neuen Mechanik, und Creiling der unter dem Titel ſtatera univerſalis herausgekommenen Diſſert. 1706. voranſetzen laſſen.

§. 63. Lehrſatz. Was man an dem Hebel in Rukſicht auf die Kraft gewinnt, eben das verliert man hinwiederum an der Zeit; oder die Bewegung der Laſt geſchiehet um ſo viel langſamer, je kleiner die Kraft in Vergleichung mit der Laſt iſt. *Fig.* 12. bewege ſich AB um C, daß die Laſt Q in die Höhe gezogen werde, ſo wird ſich der Beweis leicht geben. Dann es iſt

$$P : Q = AC : CB.$$

nr. I. $AC : CB = AE : DB$ weil $\triangle AEC \backsim CDB$.

$$P : Q = AE : DB.$$

$$AE : DB = T.Q : T.P.$$ aber AE iſt der Raum den Q durchlauft, und DB der Raum den P zu gleicher Zeit durchlauft; und die Räume ſind wie Zeiten, folgl. wenn T.Q und T.P dieſe Zeiten ſind, ſo iſt

$$P : Q = T.Q : T.P.$$

und weil $P : Q = AC : AB$

$$T.Q : T.P = AC : CB.$$

Die Zeit oder der Raum der Laſt verhält ſich zur Zeit oder dem Raum der Kraft gerade ſo, wie vorher die Kraft ſich zur Laſt verhalten.

§. 64. Zuſatz. Wenn man alſo mit einem Pfund hundert bewegen kann, ſo wird die Laſt hundert-

dertmal langſamer als die Kraft bewegt werden; oder die Kraft wird hundert Schuh weit ziehen müſſen, bis die Laſt nur einen Schuh hoch erhoben wird.

§. 65. Erklär. Eine Waage iſt ein ordentlicher Hebel der erſten Art, der zwey gleiche Arme hat; eine ſolche gleicharmigte Waage iſt die ordentliche Kramerwaage; hingegen eine Schnellwaage (ſtatera) iſt ein Hebel der erſten Art von ungleichen Armen.

§. 66. Zuſatz. Die Kramerwaage iſt ſo bekannt, daß es überflüßig wäre, ſie ausführlich zu beſchreiben. Man probirt ſie, wenn man einerley gewicht in beeden Waagſchalen durch Verwechslung abwiegt; dann wenn der Ausſchlag gleich iſt, ſo iſt es ein Beweis, daß kein Arm länger noch ſchwerer als der andere iſt.

§. 67. Zuſatz. Die Schnellwaage iſt aus dem, was wir §. 28. vorgetragen haben, leicht verſtändlich. Man muß nur den kürzern Arm ſo ſchwer machen laſſen, daß er mit dem längern, ehe noch Gewichter angehängt werden, im Gleichgewicht iſt.

Das Rad und die Rolle, oder Kloben;
(Axis in peritrochio & trochlea).

§. 68. Erklär. Stellt man ſich vor, daß ein Hebel der zweyten Art (vectis homodromus) ſich um ſeinen Ruhepunkt im Cirkel herum bewege, und zwar dergeſtalten, daß, wo die Laſt angebracht iſt, ein kleiner Cirkel um den Ruhepunkt herum beſchrieben werde, den man die Welle oder Well-

baum heißt, und wo die Kraft hängt, ein gröſſerer Cirkel, der das eigentliche Rad iſt, um den kleinen concentriſchen Cirkel herumgehe, ſo hat man einen richtigen Begriff von dem Rad, (Axe in peritrochio) wie *Fig.* 13. Die Welle oder der Cylinder mag vertical oder horizontal ſtehen.

§. 69. Lehrſatz. Der Radius des Rads verhält ſich zum Radius der Welle, wie die Laſt, die auf die Welle aufgewunden wird zur Kraft; wenn ein Gleichgewicht iſt.

Satz. *Fig.* 13.

P : Q = Rad. axis : Rad. Rotæ.

Bew.

P . BC = Q . AB nach §. 47. 31. daraus die Prop.

P : Q = AC : BC

AC = Rad. ax. u. BC = Rad. Rot. ſubſt.

P : Q = Rad axis : Rad. Rotæ.

§. 70. Zuſatz. Wenn man den Radius des Rads in die Kraft multiplicirt, ſo iſt dieſes Product dem Product aus dem Radius der Welle in die Laſt gleich.

§. 71. Zuſatz. Nach der Verhältniß der beeden Radiorum richtet ſich auch Zeit und Raum der bewegenden Kräften; wie aus §. 63. erhellet.

§. 72. Zuſatz. Man merkt alſo auf die beede Radios, und auf die beede Kräfte; wenn von dieſen vier Stücken drey gegeben ſind, ſo kann man allemal, wie §. 61 das vierte finden.

§. 73. Lehrſatz. Ein einiges Rad läßt ſich nach Belieben in mehrere kleinere vertheilen, die zuſammen einerley Wirkung hervor bringen, wenn man

das

das Product der Laſt in die Radios aller Wellen der kleinern Rädern multiplicirt, und durch das Product der gröſſern Radiorum dividirt.

Satz. *Fig.* 14.

$$\frac{P \cdot AC \cdot BE \cdot FG}{CB \cdot BF \cdot FH} = p.$$

Bew.

$P.AC = p.CB$ nach §. 47. 31.

$:CB$

nr. I. $\frac{P \cdot AC}{CB} = p.$ es iſt ferner aus gleichem Grund

$p \cdot BE = \pi \cdot FB$

$:BF$

nr. II. $\frac{p.BE}{BF} = \pi.$ aber nach nr. I.

$p = \frac{P \cdot AC}{CB}$ diß ſubſtituirt, gibt

$\frac{P.AC.BE}{CB.BF} = \pi.$ es iſt ferner

nr. III. $\pi.FG = p.FH$

$:FH$

$\frac{\pi.FG}{FH} = p$ aber nach nr. II.

$\pi = \frac{P.AC.BE}{CB.BF}$ diß ſubſtituirt, gibt

$$\frac{P.AC.BE.FG}{CB.BF.FH} = p.$$

§. 74. Zuſatz. Wenn alſo Q *Fig.* 13. = P *Fig.* 14; und P *Fig.* 13. = p *Fig.* 14. und man wollte aus dem groſſen Rad drey kleinere machen, ſo müßte die Eintheilung der Räder ſo geſchehen, daß $\frac{CA.Q}{CB}$ *Fig.* 13. = $\frac{P.AC.BE.FG}{CB.BF.FG}$ *Fig.* 14.

§. 75. Anm. Es gibt Fälle, wo man ein gegebenes groſſes Rad nothwendig in kleinere, die nahe zuſammen gehen, und weniger Plaz einnehmen, wie bey Sackuhren, vertheilen muß. Nun iſt die Frage, wie viel kleinere Räder, und unter was für einer Bedingung ſie gemacht werden müſſen, daß ſie eben die Wirkung thun, die ein gegebenes groſſes Rad mit der gegebenen Kraft thut. Die aus dem vorigen Lehrſatz gezogene Regel heißt: man ſolle den Quotienten, der herauskommt, wenn man den halben Radius der Welle mit dem Radius des Rads dividirt, im Zehler und Nenner, dann es wird ein eigentlicher Bruch, weil der Radius der Welle immer kleiner iſt als der Radius des Rads, in ſo viel ganze Zahlen zerfällen, als es möglich iſt; welche hernach die Anzahl der Räder, und die Gröſſe ihrer Diameter bey Rad und Wellen beſtimmen werden. z. E. Das groſſe Rad habe im halben Diameter 24″ ſeine Welle 6″; der Quotient $\frac{6}{24} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}$ gibt 3 kleinere Räder; die Welle des erſten hat 1″ und das Rad ſelbſten 2″, die Welle des andern 2″ und das Rad 3‴, und die Welle des dritten 3′ das Rad 4‴ im halben Diameter. Dann die Factores des Zehlers geben die halbe Diameter der Wellen, und die Factores des Nenners die halbe Diameter der Räder.

§. 76. Anm. Weil die Räder in einander eingreifen, ſo müſſen ſie Zähne oder Kammen haben; ſtehen ſie in einer Fläche mit dem Rad, ſo heißt man es ein Sternrad, ſtehen ſie aber auf der Fläche des Rads perpendicular, ſo entſteht ein Kammrad, oder Cronenrad. Die Wellen, wo ſie eingreifen, müſſen auch ausgeſchnitten ſeyn, man heißt ſie Getriebe, das ſind Cylinder die aus Triebſtöcken beſtehen. Wie man den Zähnen die beſte Geſtalt gebe, daß ſie auf einander paſſen, und durch die Friction nicht ſo leicht ſich hindern, gehört in die höhere Mechanik. Insgemein läßt man die Zähne durch öfteres Abreiben ſich ſelbſt die gehörige Geſtalt geben, daher alte aber gut gemachte Sackuhren oft beſſer ſind als die neuere. Wir werden aber davon noch weiter unten was melden.

§. 77. Erklär. Ein Rad, in deſſen Mittelpunkt die Laſt, und an einem Ende der Peripherie die Kraft, an dem andern entgegengeſezten Ende der Ruhepunkt iſt, heißt die Rolle (Trochlea, Kloben) bey welcher man zum Gleichgewicht nur halb ſo viel Kraft als Laſt gebraucht; ſie heißt die Rolle der erſten Art; iſt aber Laſt und Kraft an den beeden Enden der Peripherie und der Ruhepunkt in

der

der Mitte, ſo muß im Fall des Gleichgewichts Laſt und Kraft, wie bey einer Krämerwaage, gleich ſeyn; man heiſſe ſie die Rolle der zweyten Art.

§. 78. Lehrſatz. Bey der Rolle der erſten Art verhält ſich die Laſt zur Kraft wie zwey zu eines, oder die Kraft darf nur halb ſo groß ſeyn als die Laſt, wenn ein Gleichgewicht entſtehen ſoll.

Satz. *Fig.* 15.

$$P = 2p.$$

Bew.

$$P \,.\, AC = p \,.\, AB. \quad §.\ 31.$$

$$AC = \tfrac{1}{2}AB \quad \text{ſubſtituirt}$$

$$P \,.\, \tfrac{1}{2}AB = p \,.\, AB. \quad .2$$

$$P \,.\, AB = 2 \,.\, p \,.\, AB \quad :AB.$$

$$P = 2p.$$

§. 79. Zuſatz. Die Rollen der erſten Art ſind alſo vectes homodromi, deren einer Arm noch einmal ſo groß als der andere iſt.

§. 80. Erklär. Ein Flaſchenzug (polyspaſtus) iſt eine Zuſamntenſetzung verſchiedener Rollen, wie *Fig.* 16. von welchen diejenige die oberhalb ſtehen, Rollen der zweyten Art ſind, und die Kraft nicht vermehren; die untere aber, an welchen die Laſt hinauf gezogen wird, ſind Rollen der erſten Art, durch welche die Kraft jedesmal um die Helfte vermehrt wird; die obere und untere Rollen hangen durch einen Haken zuſammen; und werden mit einem Seil umwunden, an deſſen äuſſerſten Ende die Kraft entweder herunterwarts oder hinaufwarts ziehet. An der unterſten Rolle wird die Laſt aufgehängt.

§. 81.

§. 81. Lehrſatz. In einem Flaſchenzug wird die Kraft nach der Anzahl der untern Rollen in geometriſcher Progreſſion, deren Exponent zwey iſt, vermehrt. Dann nach §. 78. wenn die Laſt P heißt, iſt die Kraft der unterſten Rolle $= \frac{1}{2}$P; der folgenden, die $\frac{1}{2}$P Laſt trägt, $= \frac{1}{4}$P, der dritten $\frac{1}{8}$P, der vierten $\frac{1}{16}$P u. ſ. w.

§. 82. Anm. Will man alſo wiſſen, wie viel man Rollen brauche, daß man mit 1 Pf. 1000 Pf. im Gleichgewicht erhalte, ſo darf man nur 1000 mit 2 ſo oft dividiren, bis die Zahl herauskommt, die 1 am nächſten iſt, ſo wird man die Rollen beſtimmen können. z. E.

	Kraft.		Rollen.	Kraft.	Rollen.
1000 (2)	500 (2)	=	1.	$15\frac{5}{8}$ (2)	6.
	250 (2)	=	2.	$7\frac{13}{16}$ (2)	7.
	125 (2)		3.	$3\frac{29}{32}$ (2)	8.
	$62\frac{1}{2}$ (2)		4.	$1\frac{61}{64}$ (2)	9.
	$31\frac{1}{4}$ (2)		5.	$\frac{125}{128}$	10.

Man braucht alſo 10 *untere* Rollen zu der obigen Forderung.

§. 83. Zuſatz. Ziehet die Kraft herunterwarts, ſo hat man oben eine Rolle der zweyten Art weiter nöthig als unten, wie *Fig.* 16. ziehet ſie aber hinaufwarts, ſo ſind beederſeits gleichviel Rollen, und umgekehrt; wenn der Haken *Fig.* 16. an der obern Rolle iſt, und das Seil zuerſt um die erſte untere Rolle herum geht.

§. 84. Zuſatz. Wenn die Laſt um einen Schuh hoch erhaben wird, ſo müſſen alle Seiler einen Schuh kürzer werden; folglich wird *Fig.* 16. wo mit einem

einem ℔. Kraft vier ℔. Laſt erhalten werden, in dieſem Fall die Kraft vier Schuh durchlaufen, bis die Laſt einen Schuh hoch gezogen wird; es verhalten ſich alſo Zeit und Raum der Kräften, wie die Kräften; und was man bey der einen Kraft gewinnt, das verliert man wieder bey der Zeit und Raum.

Allgemeine Theorie der ſchiefen Fläche.
(Planum inclinatum.)

§. 85. **Erklär.** Eine ebene Fläche, die mit dem Horizont einen ſchiefen Winkel macht, heißt eine ſchiefliegende Fläche, (planum inclinatum) *Fig.* 17. 18. 19. ſind die Durchſchnitte davon.

§. 86. **Lehrſatz.** Die Kraft verhält ſich zur Laſt wie der Sinus des Winkels, den die Fläche mit dem Horizont macht, zum Coſinus des Winkels, den die ziehende Kraft mit der ſchiefen Fläche ſelbſt macht, oder wenn P die Laſt, und p die Kraft iſt; *Fig.* 17. ſo iſt der

Satz. *Fig.* 17.

P : p = cos. CAD : ſin. D.

Bew.

Nach der Lehre von den zuſammengeſetzten Kräften §. 45. iſt

CL = P
LE = p parallel mit AC.
CE = der mittlern Kraft. folglich
P : p = CL : LE.
CL : LE = ſin. CEL : ſin. ECL

P : p = ſin. CEL : ſin. ECL
CEL = ECA ſind Wechſelswinkel.

——— folglich

P : p = ſin. ECA : ſin. ECL.
ECA = (ACL — ECL) nach der Figur

P : p = ſin. (ACL - ECL) . ſin. ECL
ECL = D, weil △ILC ∾ △HLD.

P : p

$$P : p = \text{ſin.}(ACL - ECL) : \text{ſin. D.}$$
$$(ACL - ECL) = ACI.$$ in der Fig. ſubſtituirt

$$P : p = \text{ſin. ACI} : \text{ſin. D.}$$
$$\text{ſin. ACI} = \text{cos. CAD},$$ weil $\triangle CAI$ bey I rechtwinklicht, folglich

$$P : p = \text{cos. CAD} : \text{ſin. D.}$$

§. 87. Zuſatz. Ziehet *Fig.* 17. AC mit GD parallel, wie *Fig.* 18. ſo gibt es bey A gar keinen Winkel, das iſt CAD = 0, folglich cos. CAD = cos. 0 = ſin. tot. dahero in dieſem Fall

$$P : p = \text{ſin. tot.} : \text{ſin. D.}$$
$$\text{ſin. tot.} : \text{ſin. D} = AC : AB.$$

$$P : p = AC : AB.$$

§. 88. Zuſatz. Ziehet *Fig.* 17. AC mit der Grundlinie BD parallel, wie *Fig.* 19. ſo iſt der Winkel CAD = D *Fig.* 17. folglich

$$P : p = \text{cos. D} : \text{ſin. D.}$$
$$\text{cos. D} : \text{ſin. D} = BD : BG$$

$$P : p = BD : BG$$

Oder nach der 19. Figur

$$P : p = MN : ML.$$

§. 89. Zuſatz. Weil der Sinus totus der gröſte Sinus iſt, ſo wird die Kraft im erſten Fall, §. 87. unter allen möglichen Wirkungen auf der ſchiefen Fläche die gröſte Wirkung haben: das iſt, im erſten Fall darf man die kleinſte Kraft anwenden; in allen andern Richtungen muß ſie gröſſer ſeyn, wenn das übrige einerley bleibt.

§. 90. Anm. Die beede leztere genannte Fälle hat man ſonſten vorgetragen, weil ſie die gewöhnlichſte ſind; die allgemeine Theorie aber trift man ſelten an. In dem Käſtneriſchen Handbuch ſteht ſie. Doch wollen wir auch die gewöhnliche Art dieſe Fälle zu erweiſen, aus den Wolfiſchen Elementis anführen. Es ſind, wie ſchon gemeldt, nur die zween §. 87. 88. genannte bisher betrachtet worden.

Da

Da es im erſten Fall heißt, die Laſt verhält ſich zur Kraft, wie die Hypothenuſe der ſchiefen Fläche zu ihrer Höhe, und im zweyten wie die Grundlinie zur Höhe.

I. Fall. Satz. *Fig.* 18.

P : p = AC : AB.

Bew.

nr. I. ED . p = EF . P §. 31.

△EDF ∽ EFG
EFG ∽ HGC
HGC ∽ ABC

nr. II. △ EDF ∽ ABC folgl.
ED : EF = AC : AB aber §. 35.
ED : EF = P : p. folgl.

P : p = AC : AB.

II. Fall. Satz. *Fig.* 19.

P : p = MN : ML.

Bew.

△ TQR = QRS
QRS ∽ QSO
QSO ∽ PON
PON ∽ LMN

△ TQR ∽ LMN folgl.
TQ : TR = MN : LM
TR = QS

TQ : QS = MN : LM aber §. 35
TQ : QS = P : p.

P : p = MN : LM;

Man ſtellt ſich nemlich in beeden Fällen die Winkelhebel DEF *Fig.* 18. und TQS *Eig.* 19. vor, an welchen die Kräften p und P nach perpendikularen Richtungen ziehen; da dann allemal p . ED = P . EF *Fig.* 18. und p . TQ = P . QS *Fig.* 19. nach den Grundſätzen des Hebels §. 35. ſeyn werden. Woraus man zugleich ſiehet, daß ſich das planum inclinatum auf die Lehre vom Hebel reduciren laſſe; wenn man ſtatt des geraden Hebels einen Winkelhebel ſezt.

§. 91. Anm. Weil dieſe zwey Fälle die gewöhnlichſte ſind, ſo nennt man gemeiniglich die ſchiefe Fläche im erſten Fall, die ſchiefe Fläche der erſten Art, und die vom zweyten Fall die ſchiefe Fläche der andern Art.

§. 92. Zuſatz. Wenn *Fig.* 18. XD mit BC parallel gezogen wird, ſo iſt der Perpendikel XY die Höhe, um welche die Laſt empor gehoben worden, währender Zeit ſich die Kraft um DY fortbewegt hat: aber DY : XY = AC : AB = P : p. folglich iſt der Verluſt der Zeit und des Raums wie beym Hebel.

Die

Die Schraube und der Keil.
(Cochlea & Cuneus.)

§. 93. Erkl. Man beſchreibe ein länglichtes Vierek, wie *Fig.*20. und ſetze auf ſeine Grundlinie den Durchſchnitt einer ſchiefliegenden Fläche von ſehr kleiner Höhe, mit dieſer Hypothenuſe ziehe man Parallellinien, deren Diſtanz die Höhe der erſten von der Grundlinie iſt, ſo hat man den Grundriß zur Spindel einer Schraube. Dann wenn man dieſes ſo gezeichnete Vierek um einen hölzernen Cylinder, deſſen Peripherie ſeiner Breite gleich iſt, herum legt, und den Dreher oder Tiſchler nach den gezeichneten Linien Einſchnitte machen läßt, ſo iſt die Spindel fertig; eben ſo wird die Schraubenmutter (cochlea femina) ſich geben, wenn man durch ein Brett ein Loch bohren läßt, das in den Cylinder paßt, worauf man innerhalb deſſelben ähnliche Einſchnitte macht.

§. 94. Anm. Wer eine Kelter oder nur eine Buchbinderpreſſe geſehen, der kann ſich einen Begriff von der Figur der Spindel und Schraubenmutter machen, dahero es überflüßig wäre, wenn wir durch eine unnöthige Mahlerey eine ſolche Preſſe im Kupfer vorſtellen wollten.

§. 95. Zuſatz. Weil bey der Schraube der Druk mit dem Horizont parallel geſchiehet, ſo ſiehet man ſchon, daß ſich Kraft und Laſt nach den Geſetzen der ſchiefen Fläche von der zweyten Art richte.

§. 96. Lehrſatz. Bey der Schraube iſt das Product der Kraft in die Peripherie der Spindel dem Product der Laſt in die Diſtanz zweyer nächſten Schraubengänge gleich. Dann die Peripherie der Spindel iſt die Länge der umgewandten ſchiefen Fläche, und die Diſtanz zweyer nächſten Schraubengänge

gänge iſt die Höhe; da ſich nun die Schraube nach dem Geſez der ſchiefen Fläche der zweyten Art richtet, nach dieſem Geſez aber die Laſt mit der Höhe multiplicirt dem Product der Kraft in die Grundlinie der ſchiefen Fläche gleich iſt; ſo iſt, wenn man gleiches für gleiches ſetzet, das Product der Kraft in die Peripherie der Spindel dem Product der Laſt in die Diſtanz zweyer nächſten Schraubengänge gleich.

§. 97. Zuſatz. Je kleiner die Diſtanz zweyer nächſten Schraubengänge, und je dicker die Spindel iſt, deſto eine gröſſere Wirkung hat die Kraft; aber auch deſto langſamer geſchiehet die Bewegung.

§. 98. Zuſatz. Wenn von den vier Stücken, Kraft, Laſt, Peripherie der Spindel, und Diſtanz zweyer nächſten Schraubengänge, drey gegeben ſind, ſo kann man allemal das vierte finden.

§. 99. Anm. Z. E. Die Peripherie des Cylinders ſey 8″ die Diſtanz der Schraubengänge $\frac{1}{4}''$ ſo iſt $p : P = \frac{1}{4} : 8 = 1 : 32$, folglich wenn $p = 1$, ſo kann ich mit 1 Pf. durch den Druk 32 Pf. im Gleichgewicht halten. Iſt $P = 108$, $p = 1$, die Peripherie der Spindel 12″, man verlangt die Weite zweyer Schraubengänge, die x heiſſen ſoll, ſo iſt $1.12 = 108 . x$, und $x = \frac{12}{108} = \frac{1}{9}''$. Alſo um den 9ten Theil eines Zolls darfen in dieſem Fall die Schraubengänge von einander abſtehen.

§. 100. Erklär. Eine Schraube ohne Ende (cochlea infinita) beſtehet aus drey Schraubengängen, in welche ein Rad eingreifet, und welche ſich ohne Ende fortbewegt, ſo lange das Rad herumgetrieben wird, weil allemal der vierte Zahn wieder in den erſten Schraubengang eingreiſt.

§. 101. Anm. Die Zeichnung würde hier auch überflüßig ſeyn, man kann ihre Figur bey einem jeden Uhrwerk ſehen.

§. 102. Erklär. Ein Keil (Cuneus) wird insgemein durch zwo ſchiefe Flächen erklärt, die mit

ihren Grundflächen zuſammen gefugt werden; wie *Fig.* 21.

§. 103. **Zuſatz.** Was alſo von den ſchiefen Flächen überhaupt geſagt worden, das läßt ſich unter den gehörigen Beſtimmungen auf den Keil anwenden.

§. 104. **Zuſatz.** Ein ſpitziger Keil hat alſo mehr Vermögen als ein ſtumpfer.

§. 105. Anm. Wer nur Holz ſpalten geſehen, kann ſich ſchon einen Begrif vom Keil machen, ohne daß man weitere Zeichnung nöthig hätte. Inzwiſchen iſt die Theorie vom Keil, ſo gemein er übrigens iſt, doch eine der ſchwerſten Aufgaben, wenn alle Fälle beſtimmt werden ſollen, die dabey vorkommen; und die nach den Geſetzen der bloßen Statik nicht beurtheilt werden können. Herr Prof. Baermann zu Wittenb. hat in ſeiner Diſſert. de Cuneo 1751. die Lehre vom Keil theoretiſch und hiſtoriſch abgehandelt. Was von dem Keil geſagt worden, gilt auch von der Schraube; indeme auch hier in der Anwendung manche Fälle vorkommen, die nicht genau aus der Theorie der ſchiefen Fläche ſich herleiten laſſen, beſonders weil die Bewegung der Laſt auf einer krummen Fläche geſchiehet, wenn man auch von der Reibung nichts gedenket.

§. 106. **Zuſatz.** Alle einfache Maſchinen laſſen ſich auf den Hebel und auf die ſchiefliegende Fläche reduciren; nemlich das Rad und die Rolle ſind wirkliche Hebel; die Schraube und der Keil ſind bewegliche ſchiefe Flächen; ja wenn man die ſchiefe Fläche als einen Winkelhebel anſieht, ſo kann man ſie alle aus dem Hebel erklären.

§. 107. **Zuſatz.** Alle zuſammengeſezte Maſchinen beſtehen aus der Verbindung der einfachen Maſchinen; die einfache Maſchinen beruhen auf der Lehre vom Hebel; wer alſo die Lehre vom Hebel recht verſteht, der wird ſich auf alle ſowohl zuſammengeſezte als einfache Maſchinen verſtehen.

Das Waſſerwägen. (Nivelliren)

§. 108. Anm. Um etwas von den zuſammengeſetzten Maſchinen, unter welchen vornemlich die Mühlen und Uhren die nützlichſte ſind, ſagen zu können, müſſen wir was von dem Waſſerwägen vorausſetzen.

§. 109. Erklär. Waſſerwägen heißt das Gefälle finden; das Gefälle aber iſt der Unterſchied, um wie viel ein gegebener Ort tiefer liegt als der andere. z. E. L und M *Fig.* 22. ſind zween Orte auf der Oberfläche der Erde, man ziehet die Horizontallinie LG; und von M den Perpendikel auf LG; ſo wird MG das Gefälle ſeyn.

§. 110. Zuſ. Wenn die Erde platt wäre, ſo würde die unendlich verlängerte Linie, die auf die Directionslinie der Schwere KL perpendikular iſt, nemlich LG die Horizontallinie und MG allemal das Gefäll ſeyn.

§. 111. Lehrſatz. Iſt die Erde eine Kugel, ſo iſt nach *Fig.* 23. das Horizontalgefäll, das iſt, die Diſtanz des Punkten H der wahren Horizontallinie vom Punkt G der ſcheinbaren Horizontallinie das Quadrat der ſcheinbaren Horizontallinie durch den doppelten Radius dividirt.

Satz. *Fig.* 23.

$$GH = \frac{LG^2}{2r}.$$

Bew.

Wenn K der Mittelpunkt der Kugel und LG die Tangente vom Bogen LH iſt, ſo iſt nach geom. Gründen der Aehnlichkeit,

$GI : GL = GL : HG$ aber

$GI = IH + HG$ diß ſubſtituirt, gibt

$IH + HG : GL = GL : HG$

$IH = 2r$

$2r + HG : GL = GL : HG$ folgl. wenn man die äuſſere und mittlere multipl.

$2r.HG + HG^2 = GL^2$ aber HG iſt gegen HK=r, den Rad. der ganzen Erde, bey nicht groſſen Diſtanzen wie nichts zu achten; folglich

$HG^2 = \text{inf. parv.}$

$2r.HG = GL^2$ $:2r$

$$HG = \frac{GL^2}{2r}$$

§. 112. Zuſ. Weil der Erddiameter, das iſt 2r = 6538594 Toiſen; ſo iſt, wenn LG = 4000 Toiſen, welche Länge ſelten bey dem Nivelliren vorkommt, nach der Decimalrechnung $\frac{LG}{2r} =$ 0,0006114. und $\frac{LG}{2r}.LG = 0,0006114.4000$ = 2,4456 Toiſen = 14′7″.

§. 113. Lehrſatz. Der Unterſchied zwiſchen dem Bogen LH, den man mißt, und der geraden Linie LG, die als gegeben angenommen wird *Fig.* 23. iſt, bey 4000 Toiſen ſo gering, daß man ihn für nichts achten darf. Der Beweis iſt folgender: LG wird als gegeben angenommen, doch mißt man auf der Erde nicht LG wirklich, ſondern den Bogen LH; den man LG gleich ſezt, weil der Unterſchied ſehr gering iſt, und bey 4000 Toiſen kaum 2″ betrift. Welches erhellet, wenn man für den Radius = 1, die Tangente für den Bogen LH, aus der geſuchten Linie LG findet. Dann nach

tri=

trigonom. Gründen iſt KL : LG = ſin. tot. : tang. LH; alſo tang. LH = $\frac{LG . \text{ſin. tot.}}{KL}$ und weil ſin. tot. = 1, und oben KL = r geſezt wurde, ſo iſt tang. LH = $\frac{LG}{r}$, iſt LG = 4000, ſo iſt dieſe Tangente = $\frac{4000}{6538594}$ = 0.0012228, die in den Tafeln zwiſchen 4 und 5 Minuten fällt, bey welchen Tangente und Sinus noch nicht in 200 Milliontheilchen des Radius unterſchieden ſind; folglich iſt der Bogen, der zwiſchen den Sinus und Tangente hinein fällt, noch weniger in dieſen Theilchen unterſchieden; die Differenz zwiſchen LH und LG iſt alſo $< \frac{1}{1000000000}$, das iſt nach der Reduction < 2″88.

§. 114. Zuſ. Bey kleinen Diſtanzen, die kaum etlich hundert Toiſen, oder nach deutſchen Rechnungen kaum 100 Ruthen betragen, darf man die Rechnung §. 110. gebrauchen, ohne auf die Kugelgeſtalt der Erde zu ſehen.

§. 115. Anm. Zu wirklicher Beſtimmung des Gefälls und zu Ausmeſſung einer genauen Horizontallinie bedient man ſich verſchiedener Inſtrumente, die man Waſſerwaagen nennt. Man hat dazu halbe Cirkel, aus deren Mittelpunkt ein Bleywurf ſenkrecht herabhängt, dann wenn dieſer den halben Cirkel unter rechten Winkel ſchneidet, ſo ſtehet der Diameter horizontal, und die von da aus verlängerte Linie iſt auch horizontal; um dieſes genauer zu beſtimmen, bringt man oben Diopten, auch, wo gröſſere Schärfe nöthig iſt, Fernröhre mit durchkreuzenden Fäden an. Will man nun überhaupt wiſſen, ob eine gegebene kleine Fläche horizontal ſey, ſo kann man einen mit Weingeiſt gefüllten gläſernen Cylinder dazu gebrauchen, wo für eine Luftblaſe ein leerer Rand gelaſſen wird; wenn dieſe in der Mitte ſteht, ſo iſt die Fläche horizontal, weil flüßige Oberflächen horizontal ſind, und das leichtere darinnen zu oberſt ſteht. Für eine der beſten hieher gehörigen Schriften iſt Traitè du nivellement par Mr. Picard, die ſchon 1684. zu Paris herauskam, und Herr Paſſavant 1749. ins Deutſche überſezt hat.

Die Waſſer- und Windmühlen.

§. 116. Erklär. Waſſermühlen werden durch das Waſſer, und Windmühlen durch den Wind getrieben; ihre Abſichten ſind mannigfaltig; die nüzlichſte und nöthigſte ſind, die man zum Mahlen der Früchten braucht, und die deßwegen Mahlmühlen heiſſen; auſſer dieſen gibt es Sägmühlen, Pulvermühlen, Papiermühlen, Oelmühlen u. ſ. w. welche alle in der Hauptſache, was das vom Waſſer in Bewegung geſezte Räderwerk betrift, einerley ſind.

§. 117. Erkl. Wenn ein Rad durchs Waſſer getrieben wird, ſo muß es an ſeiner Peripherie Schaufeln haben, (palmulas) die durch den Stoß des Waſſers umgetrieben werden. Wenn das Waſſer von einer Höhe herabfällt, ſo wird das Rad nach der Gegend getrieben, nach welcher das Waſſer hinſchießt, und in dieſem Fall heißt das Rad ein oberſchlächtiges Waſſerrad (rota directa); fließt aber das Waſſer unterhalb des Rads, ſo wird durch ſeinen Fluß das Rad dem Strom entgegen umgetrieben, und heißt in dieſem Fall ein unterſchlächtiges Rad (retrograda).

§. 118. Erkl. Räder, die in einander eingreifen, müſſen Erhöhungen und correſpondirende Vertiefungen haben; dieſe Erhöhungen heiſſen Zähne; ſtehen ſie in einer Fläche mit dem Rade, ſo hat man ein Stirn- oder Sternrad; ſtehen ſie auf der Fläche perpendicular, ſo heißt das Rad ein Cronenrad; die leztere Art von Rädern kommt vornemlich bey Mühlen vor; aber die Müller nennen ſie nicht Cronen-

ſon-

ſondern Kammräder; das kleinere Rad, in das ſie eingreifen, heißt gemeiniglich das Getriebe, deſſen Vertiefungen in zuſammengeſezten Triebſtöcken beſtehen, die an zwey hölzerne Scheiben oben und unten eingeſenkt ſind.

§. 119. Erkl. Bey einer gewöhnlichen Mahlmühle werden die Räder folgendermaſſen angebracht; erſtlich iſt das Waſſerrad, das oberſchlächtig oder unterſchlächtig ſeyn kann; parallel mit dieſem, an einerley Welle, iſt das Kammrad, welches in ein vertical ſtehendes Getriebe eingreiſt, und dadurch eine Stange herumtreibt, welche das Mühleiſen heißt; dieſes geht mitten durch das Getrieb, und trägt den oberſten Mahlſtein, den die Müller den Läufer nennen, und welcher durch ſein Umtreiben das Getraide zermalmet.

§. 120. Erklär. In Rukſicht auf das Waſſer, das die Mühle treibt, hat man das Mahlgerinne und das wüſte Gerinne zu merken. Dieſes dient dazu, daß das Waſſer, welches nicht auf das Rad fallen ſoll, abflieſſen kann; jenes iſt der ſchmale Raum, den das Waſſer zur Mühle durchlauft, weil das Rad, das getrieben werden ſoll, nicht die ganze Breite des Fluſſes einnimmt; dahero man einen gewiſſen Theil des Fluſſes für das Waſſerrad einfaßt, welcher Theil das Mahlgerinne heißt.

§. 121. Zuſ. Diß iſt beynahe das weſentlichſte bey einer Mahlmühle; weitere Umſtände, beſonders die Gerechtſame in Rukſicht auf das Waſſer, die Schadloshaltung der Nachbarn, den Ablauf des Waſſers u. ſ w. betreffend, findet man in Herrn Prof. Pohlaks Matheſi forens.

§. 122. Anm. Die Windmühlen ſind in ebenen Ländern, wo die Flüſſe ein geringes Gefälle haben, ſo nüzlich als die Waſſermühlen bey Strömen von ſtarken Gefällen. Wir wollen alſo auch davon das nöthigſte ſagen. Was bey den Waſſermühlen das Waſſer iſt, das iſt bey den Windmühlen der Wind; es kommt alſo darauf an, unter was für Winkel man die dem Wind ausgeſezte Flügel richten ſolle, daß der Wind die gröſte Wirkung thue; die mathematiſche Schriften ſagen, der Winkel müſſe 54° enthalten. In wenigen davon iſt der Beweis enthalten; Herr von Wolf hat ihn nicht einmal in ſeinen gröſſern lat. Elementen gegeben. In dem Käſtneriſchen Handbuch, ſo klein auch der zweyte Theil iſt, ſteht er; wir wollen ihn kürzlich vortragen, wenn wir vorher einen kurzen Lehnſatz vorangeſchikt.

§. 123. Lehnſatz. Die Kraft, mit welcher der Wind auf einen Flügel ſtoßt, und die durch ein Prißma von fortgeſtoſſenen Lufttheilen abgemeſſen werden kann, iſt, wenn der ſchiefe Neigungswinkel der Fläche des Flügels gegen die Axe der Welle $= \gamma$ geſezt wird, (dann die Axe des Flügels ſteht auf der Axe vorhin perpendicular) nach dem cörperlichen Inhalt, das Product vom Coſ. dieſes Winkels in das Quadrat ſeines Sinus multiplicirt noch in drey beſtändige Gröſſen (conſtantes) welche die Grundfläche und Länge des Prißma ausdrucken. Die Conſtantes ſeyen a, e, f, ſo iſt die Stärke des Windes aef. $\cos.x(\sin.\gamma)^2$. Der Beweis gründet ſich auf die erſte Lehren der Stereom. und Trigonometrie; wenn man aus der Seite des ſchiefen Prißma ein rechtwinklichtes beſtimmt; und der Beweis iſt leicht, wenn man die Figur mit Chartenpapier macht, da ſich die Linien augenſcheinlich geben; ſo werden wir ſie auch vorſtellen, weil die perſpectiviſche Maſchine wegbleiben kann.

§. 124. Lehrſatz. Der Wind thut auf den Flügel die ſtärkſte Wirkung, wenn der Neigungswinkel $\gamma = 54°$.

Bew.

Bew.

Weil a, e, f beſtändige Gröſſen ſind, ſo iſt die Frage von $\cos.\gamma.(\sin.\gamma^2)$; wenn dieſer Ausdruk ein gröſtes iſt, ſo wird die ganze Kraft die gröſte werden. Aus der Lehre vom gröſten läſt ſich alſo dieſes beſtimmen. Es ſey $\cos.\gamma = u$, ſo iſt nach trigon. Gründen

$$(\sin.\gamma)^2 = 1 - u^2$$

folgl. $\cos.\gamma.(\sin.\gamma)^2 = u(1-u^2) = u - u^3$.

$$\text{diff. } (u-u^3) = du - 3u^2du = 0$$

folglich $du = 3u^3du$

$$\overline{} : du$$

$$1 = 3u^2$$

$$\overline{} : 3$$

$$\tfrac{1}{3} = u^2$$

$\overline{}$ die Quadratwurzel extrah.

$\sqrt{\tfrac{1}{3}} = u$ oder

$$1 : \sqrt{3} = u.$$

weil nun $u = \cos.\gamma$ im Fall das Sinus totus $= 1$, ſo ſucht man durch die Regel Detri dieſen cos. wenn der Sinus totus in den Tafeln 1000000 iſt, den wir r nennen. Es verhält ſich alſo $1 : u = r : ur = \cos.\gamma$. Alſo logarithmiſch

$$l.u = l.1 : \sqrt{3} = l.1 : 3^{\frac{1}{2}} = l.1 - \tfrac{1}{2}l3 = 0 - \tfrac{1}{2}l3.$$

$$= -\tfrac{1}{2}\log.3 = -0,2385606$$

$$\log.r = +10,\ldots\ldots$$

$\log.\cos.\gamma = l.ur = 9,7614394$ dem in den Tafeln $54^\circ 44'$ correſpond.

§. 125. Anm. So richtig dieſe Rechnung iſt, ſo hat man doch bey der Anwendung bemerkt, daß es beſſer, wenn der Winkel etwas gröſſer wird, weil die Bewegung des Flügels mit betrachtet wird. Ueberdas muß man auch dem Flügel ſuchen eine ſolche Geſtalt zu geben, durch welche alle Theile dem Wind gleichförmig ausgeſezt werden, wie ein Schraubengang, welches man windſchief nennt.

Von den Uhrwerken, vornemlich Pendul-uhren, und den dazu nöthigen mechaniſchen Lehrſätzen, ferner von den Hinderniſſen der Maſchinen, wie auch vom Geſez der kleinſten Wirkung.

§. 126. Anm. Nach den Mühlen haben die Uhren in Rukſicht auf die Abmeſſung der Zeiten einen eben ſo groſſen Nutzen; es kommt aber beſonders darauf an, daß man die Abmeſſung der Zeit ſo genau bekommt, als es möglich iſt; dazu dienen Pendul-uhren, davon Hugenius beſonders und zuerſt gehandelt hat. Bey den ſogenannten oſcillirenden Uhren, die ſo genau ſind, daß ſie die mittlere Zeit richtiger abmeſſen, als die tägliche Bewegung der Sonne, und alſo weit beſſer als Sonnenuhren ſind, kommt es vornemlich auf das Pendul an, welches die Gleichförmigkeit der Bewegung verurſacht. Von dieſen ſo richtigen Hugenianiſchen Penduluhren ſchreibt de la Hire, daß ſie innerhalb 8 Tagen nicht um eine Secunde von der mittlern Bewegung der Sonne abweichen, wie er es ſelbſt bemerkt habe: ſie verdienen dahero beſonders in Rukſicht auf das Pendul unſere Aufmerkſamkeit.

§. 127. **Lehrſatz. Die Geſchwindigkeiten, welche fallende Cörper am Ende ihres Falls haben, ſind wie die Quadratwurzeln aus den Höhen, welche ſie bey ihrem Fallen durchloffen. Sie würden mit gleichförmiger Bewegung den doppelten Raum auf der Erde zurük legen.**

Der Beweis von dem vorgetragenen Lehrſatz gründet ſich auf den Begriff der gleichförmig beſchleunigten Bewegung, da in gleichen Zeiten gleiche Incremente der Geſchwindigkeit hinzukommen: Es ſeyen *Fig.* 24. AP, AB die Zeiten des fallenden Cörpers; PM, BC drucken ſeine proportionirte Geſchwindigkeiten aus; pm ſey PM unendlich nah; ſo werden die Geſchwindigkeiten PM und pm nicht verſchieden ſeyn, als um ein unendlich kleines Stük, welches wie nichts zu achten; man kann ſie alſo für einerley annehmen; iſt aber die Geſchwindigkeit immer einerley, ſo verhält ſich der Raum wie das Product der Zeit in die Geſchwindigkeit; das iſt, wie das kleine Viereck PpmM. Die Summe aller dieſer Vierecke iſt das △ APM, alſo drukt das △ APM den Raum aus, den der fallende Cörper während der Zeit AP beſchrieben hat, eben ſo drukt ABC den Raum aus, der während der Zeit AB beſchrieben worden. Alſo wenn die Räume s und S heiſſen:

$s : S = APM : ABC.$ aber nach geom. Gründen
$APM : ABC = AP^2 : AB^2$

$s : S = AP^2 : AB^2$

$\sqrt{}$ extrahirt

$\sqrt{s} : \sqrt{S} = AP : AB.$ Das iſt, die Zeiten ſind wie die Quadratwurzel aus den durchloffenen Räumen; und weil bey gleichförmiger Bewegung der ganze Raum währender Zeit AB, das Product der Zeit in die Geſchwindigkeit iſt $= AB . BC = ABCD = 2ABC$; ſo verhalten ſich die Räume in einerley Zeit wie $ABC : 2ABC = 1 : 2$. Das iſt, der Cörper würde am Ende des Falls mit der daſelbſt erlangten Geſchwindigkeit den doppelten Raum in gleichförmiger Bewegung beſchreiben.

§. 128 Anm. In dieſem Beweis iſt alles klar; nur könnte man noch fragen, warum bey gleichförmiger Bewegung die Raume wie die Producte der Zeiten in die Geſchwindigkeiten ſeyen. Allein wenn die Geſchwindigkeiten gleich ſind, ſo ſind die Räume wie die Zeiten. Wenn zwey Bothen gleich ſtark laufen, ſo wird der eine in drey Stunden dreymal ſo weit kommen als der andere in einer Stunde; ferner wenn die Zeiten gleich ſind, ſo ſind die Räume wie die Geſchwindigkeiten; wenn zwey Bothen eine Stunde lang laufen, und der eine lauft noch ſo geſchwind als der andere, ſo wird in der gegebenen Stunde jener einen zweymal ſo groſſen Weg machen als dieſer. Folglich wenn die Geſchwindigkeiten C und c ſind, die Zeiten T und t, die Räume S, s, q; wo q den einfachen, s den dreyfachen, und S den doppelten Weg bedeutet; ſo iſt

$q : s = T : t$ wenn die Geſchwindigkeiten gleich,
$S : q = C : c$ wenn die Zeiten gleich.

$Sq : sq = TC : tc$

$-q$

$S : s = TC : tc.$

Das iſt, die Räume, hier der doppelte zum einfachen, verhalten ſich wie die Producte aus den Zeiten in die Geſchwindigkeiten. Eben hieraus erhellet, daß $\frac{S}{T} : \frac{s}{t} = C : c$, oder die Geſchwindigkeiten wie die Räume dividirt durch die Zeiten ſind.

§. 129. Erfahrung. Ein ſchwerer Cörper fällt in einer Secunde $15\frac{615}{1000}$ Rheinländ. Schuh.

§. 130. Zuſatz. Seine Geſchwindigkeit läßt ſich alſo nach Verfluß dieſer Zeit ausdrucken durch $2\sqrt{\frac{15615}{1000}}$, nach §. 127. Aus dieſer Zahl läßt ſich

die Quadratwurzel genau ausziehen, (ſie iſt 125) folglich die Geſchwindigkeit 125, dieſe Zahl wollen wir Kürze halber α nennen.

§. 131. Lehrſatz. Die Zeit der Oſcillation eines Penduls läßt ſich beſtimmen. Wenn r : π die Verhältniß des Diameters zur Peripherie iſt, ſo iſt

Satz. *Fig.* 25.

$$\pi\sqrt{AB} = \pi\sqrt{2AC} = \text{der Zeit der Oſcillation.}$$

Bew.

nr. I. $AB : AE = AE : AD$ alſo $AD = \frac{AE^2}{AB}$

$AB : AM = AM : AP$ alſo $AP = \frac{AM^2}{AB.}$

Wenn der Cörper von E nach A den Bogen herabſenkt oder oſcillirt, ſo fällt er durch die Höhe AD; und wenn er von M nach A oſcillirt, ſo fällt er durch die Höhe AP,

Seine Geſchwindigkeit in A iſt alſo nach der Oſcillation $AE = \alpha\sqrt{AD}$	Die Geſchwindigkeit in A nach der Oſcillation $AM = \alpha\sqrt{AP}$
aber nr. I. $AD = \frac{AE^2}{AB}$	$AP = \frac{AM^2}{AB}$
nr. II. Geſchw. $= \alpha\sqrt{AD} = \alpha\sqrt{\frac{AE}{\sqrt{AB}}} = \frac{\alpha\, AE}{\sqrt{AB.}}$	$\alpha\sqrt{AP} = \alpha\frac{\sqrt{AM^2}}{\sqrt{AB}} = \frac{\alpha . AM}{\sqrt{AB.}}$

Es iſt ferner die Geſchwindigkeit in M die Differenz dieſer beeden Geſchwindigkeiten, oder

Cel. in M nach der oſcill. $EM = \alpha\sqrt{AD} - \alpha\sqrt{AP}$ u. ſubſt.

$$= \frac{\alpha\sqrt{(AE^2 - AM^2)}}{\sqrt{AB.}}$$

Die Zeit iſt der Raum dividirt durch die Geſchwind. §. 128. folgl.

$$\text{I. durch } Mm = Mm : \sqrt{\frac{(AE^2 - AM^2)}{\sqrt{AB}}} \text{ das iſt}$$

nr. III.

nr. III. $= \frac{Mm \cdot \sqrt{AB}}{\sqrt{(AE^2 - AM^2)}}$

Wenn nun der Bogen AME *Fig.* 26. in eine gerade Linie ausgedehnt, und mit dem Radius AE aus A ein Quadrant ENF beſchrieben wird, und man von M den Perpendikel MN, und aus A den Radius AN ziehet,

ſo iſt $MN = \sqrt{(AN^2 - AM^2)}$ nach dem Pyth. Lehrſ.

$AN^2 = AE^2$

$MN = \sqrt{(AE^2 - AM^2)}$. aber nr. III.

$T.\text{durch } Mm = \frac{Mm \sqrt{AB}}{\sqrt{(AE^2 - AM^2)}}$ folglich den Wehrt

nr. IV. MN ſubſtituirt

$T.\text{durch } Mm = \frac{Mm \sqrt{AB}}{MN \alpha}$

Man ziehe pm parallel mit Mm; ſo iſt

$pn : Nn = NM : NA$

$pn = Mm$

$Mm : Nn = NM : NA = AE$, weil NA und AE Radii,

verſezt;

$Mm : NM = Nn : AE$ oder

nr. V. $\frac{Mm}{NM} = \frac{Nn}{AE.}$ aber nr. IV.

$T.\text{durch } Mm = \frac{Mm}{MN} \cdot \frac{\sqrt{AB}}{\alpha.}$ folgl. den Wehrt von $\frac{Mm}{NM}$ ſubſtit.

$T.\text{durch } Mm = \frac{Nn}{AE} \cdot \frac{\sqrt{AB}}{\alpha}$ es iſt aber

$T.\text{durch } Mm : T.\ Nn = T.\ AM : T.\ FN.$

folglich $T.\ AM = \frac{FN \cdot \sqrt{AB}}{\alpha \cdot AE.}$

und eben ſo $T.\text{durch } AME = \frac{FNE \cdot \sqrt{AB}}{\alpha \cdot AE.}$

nr. VI.

nr. VI. T. durch AME = T. der halben Oſcillation; (*Fig.* 25.) folgl.

$$\text{T. der ganzen Oſcillation} = \frac{2FNE \cdot \sqrt{AB}}{\alpha \cdot AE.}$$

Es iſt ferner weil FNE = 90°,

$$1 : \pi = 2AE : 4FNE \quad :2$$

$$1 : \pi = AE : 2FNE.$$ folgl. wenn äuſſere u. mittlere multipl. werden

$$\pi \cdot AE = 2FNE \quad :AE$$

$$\pi = \frac{2FNE}{AE.}$$

aber nr. VI. $\text{T. der ganzen Oſcillat.} = \frac{2FNE \cdot \sqrt{AB}}{AE \cdot \alpha}$
folgl. den Wehrt π ſubſtituirt, gibt

$$\text{T. der ganzen Oſcillation} = \frac{\pi \sqrt{AB}}{\alpha.}$$ oder

die Zeit der Oſcillation $= \frac{\pi\sqrt{2AC}}{\alpha.}$ weil AB = 2AC.

§. 132. Anmerk. Man hat bey genauen Uhrwerken auſſer einem Pendul, der die Zeit mißt, auch Räder nöthig, welche den Zeiger bewegen. Dieſe Räder müſſen mit ihren Zähnen in Getriebe eingreifen, und man muß Sorge tragen, daß alle Zähne nach und nach an einerley Triebſtok kommen, und nicht gewiſſe Zähne nur immer in ihren eigenen correſpondirenden Triebſtok eingreifen, weil ſonſten die Theile nicht gleich an einander abgeſchliffen werden, und ihre Geſtalt verſchieden bliebe. Wie man diß bewerkſtellige, wollen wir jezo zeigen.

§. 133. Lehrſatz. Wenn man die Anzahl der Zähne des Rads durch die Anzahl der Triebſtöcke dividirt, ſo zeigt der Quotient, wie viel Umdrehungen des Getriebs auf eine Umdrehung des Rads gehen. Dann das ganze Getrieb iſt einmal herum, wenn

wenn ein jeder Triebſtok von einem Zahn fortgeſtoſſen, weil jeder Zahn nur einen Triebſtok fortſtoßt. Folglich wenn das Rad herum iſt, ſo iſt das Getrieb ſo vielmal herum, als der Quotient, der durch die Diviſion der Triebſtöcke in die Anzahl der Zähne Einheiten hat.

§. 134. Exemp. Das Rad habe 30 Zähne, das Getrieb 6 Triebſtöcke, ſo iſt $\frac{30}{6} = 5$; alſo kommt das Getrieb fünfmal herum, wenn das Rad einmal herumkommt.

§. 135. Zuſatz. In dieſem Fall aber greifen immer einerley Zähne in einerley Triebſtok, nemlich der 1, 6, 11, 16 Zahn u. ſ. w. greift immer in den erſten Triebſtok; der 2, 7, 12 u. ſ. w. immer in den zweyten u. ſ. w. Diß iſt wieder die Vollkommenheit der Uhr; man nehme alſo für das Rad 31 Zähne; ſo greifen bey der zweyten Umdrehung der 5, 10, 15 u. ſ. w. bey der dritten der 4, 9, 14 u. ſ. w. bey der vierten der 3, 8, 13 Zahn in den erſten Triebſtok, u. ſ. w. folglich kommen alle Zähne nach und nach in alle Triebſtöcke. Ueberhaupt iſt es gut, wenn die Zahlen der Triebſtöcke und Zähne kein gemeinſchaftliches Maas haben, oder bey der Diviſion nicht gerad aufgehen.

§. 136. Zuſatz. Weil es ſchwer iſt, eine groſſe Zahl Zähne einzutheilen, ohne ſolche Diviſion, ſo ſchlägt de la Hire für den Triebſtok 6, 8, 10, für die Räder 48, 60 vor.

§. 137. Zuſatz. Aus der Zahl der Zähne und Triebſtöcke laſſen ſich die Umdrehungen des lezten Rads in Vergleichung mit der erſten beſtimmen aus §. 133. und eben ſo kann man ein Rad nach eben

dem

dem §. in ſo viel zerfällen als man will und für nöthig findet.

§. 138. Anm. Das bisher geſagte gilt für genaue Uhren; bey Taſchenuhren wird die Bewegung durch eine zuſammengerollte ſtählerne Feder hervorgebracht, die der Cylinder, darinn ſie eingeſchloſſen iſt, indem ſie ſich ausbreitet, herumdrehet, um welche ſich eine Kette an einen abgekürzten Kegel abwindet; die Welle iſt deßwegen Kegelformig, damit die Bewegung, die anfänglich, wenn die Feder ſtark geſpannt iſt, ſchnell, und wenn ſie halb abgewunden, ſchwächer iſt, doch gleichförmig gehe; und eben dieſe Gleichförmigkeit noch mehr zu erhalten, wird noch eine ſchwächere Feder um die Unruhe angebracht, die in das lezte Rad alle Augenblicke eingreift. Bey groſſen Uhren, die auf Thürnen ſind, wird die Bewegung durch Gewichter hervorgebracht; damit aber die Gewichter nicht mit beſchleunigter Bewegung fallen, ſo werden Gegenmaſchinen angebracht, z. E. das Steigrad, wodurch das Gewicht alle Augenblik gehindert, und folglich die Gleichförmigkeit der Bewegung ſoviel möglich erhalten wird. Diß iſt das weſentlichſte, was wir von dieſen nüzlichen Maſchinen ſagen wollten. Weitere Nachrichten findet man in beſondern Werken, z. E. in the artificial Clokmaker, der bey Welpers Gnomonik deutſch überſezt iſt.

§. 139. Anm. Eine der gröſſeſten Hinderniſſen der Bewegung iſt die Friction oder das Reiben, das iſt, der Wiederſtand den eine Fläche von der andern leidet, über die ſie hinfährt; man ſucht ſie zu vermeiden durch Abſchleifen und Poliren, oder auch beſonders dadurch, daß man die Flächen die einander berühren, am kleinſten Theil einander berühren läßt, welches durch cirkelförmige Maſchinen am beſten geſchieht; weil der Cirkel eine Fläche nur in einem Punkt berührt; den Nutzen ſieht man bey den Wagenrädern. Eben ſo iſt auch die Ueberwucht eine Hinderniß der Bewegung, die gleichförmig ſeyn ſoll; um nun die Beſchleunigung zu verhindern, bringt man die Steigräder, Perpendikel und andere Maſchinen an.

§. 140. Anm. Das Geſez der kleinſten Wirkung wollen wir in den dioptriſchen Wiſſenſchaften, welche eigentlich zu deſſen Erfindung Gelegenheit gaben, vortragen und erweiſen, wenn wir das Geſez der Strahlenberechnung erklären. Die Lehre von der Colliſion weicher, elaſtiſcher und harter Cörper wird ſich im Anhang von dem Plan eines Experimentalcollegii am beſten erläutern laſſen. Sie gehören ohnehin nicht in die Statik, ſondern theils in die Mechanik, theils in die Coſmologie und Naturlehre. Doch das Geſez der kleinſten Wirkung kann man ſich ungefähr alſo vorſtellen. Auf der einen Seite von HL *Fig.27.* ſeye der Weg gut, auf der andern ſchlimm, ſo daß ein Both zu gleicher Zeit

jen,

jenſeits m diſſeits aber nur n Meilen, z. E. in einer Stunde jenſeits drey, diſſeits nur 2 Meilen zurüklegen könnte, da alſo die Bequemlichkeit des Wegs wie m zu n iſt. Nun ſey der Ort C oberhalb der Linie gegeben, von welchem der Bothe ausgehen, und nach G laufen ſolle, es fragt ſich, wie er laufen ſoll, daß er ſo bequem und in ſo kurzer Zeit als möglich iſt, dahin komme. Man ziehe die Perpendikel CH, GL, welche HL abſchneiden, man ſucht HE oder den Punkt E wo er durchgehen muß, wenn er den kürzeſten und leichteſten Weg erwählen will. Man nenne nun die Linien

$CH = c$ ſo iſt $EL = HL - HE = h - y.$

$GL = g$ und $CE = \sqrt{CH^2 + HE^2} = \sqrt{(cc + yy)}$

$HL = h$

$HE = y$, $GE = \sqrt{(GL^2 + EL^2)} = \sqrt{(g^2 + h^2 - 2hy + y^2)}$

nach dem Pythag. Lehrſatz.

Man ſetze $\sqrt{cc + yy} = p$, und $\sqrt{(g^2 + h^2 - 2hy + y^2)} = q$;

Nun ſind die Zeiten wie die Räume oder Wege dividirt durch die Geſchwindigkeiten; oder weil §. 128.

$\frac{S}{C} : \frac{s}{c} = T : t.$ auch nach arithm. Gründen

$Sc : sC = T : t.$ folglich in der Anwendung

$\frac{p}{m} : \frac{q}{n} = T : t$ und

$pn : qm = T : t.$

Dieſe zwo Zeiten aber ſollen die kürzeſte Summe ſeyn; folglich iſt $pn + qm = minimo$ oder ein kleinſtes. Dahero differenz. $ndp + mdq = 0$ weil n und m beſtändige Gröſſen und nur der geſuchte Weg veränderlich geſezt werden darf, ehe er auf das kleinſte reducirt wird.

Aber $p = \sqrt{cc + yy}$ und $q = \sqrt{gg + hh - 2hy + yy}$

folgl. $dp = \frac{ydy}{p}$ und $dq = \frac{-hdy + ydy}{q}$

und $ndp = \frac{nydy}{p}$ und $mdq = \frac{-mhdy + mydy}{q}$

Alſo die Summe oder

$$\frac{nydy}{p} - \frac{mhdy + mydy}{q} = 0$$

$$\overline{} : dy$$

$\frac{ny}{p} - \frac{mh + my}{q} = 0$ und wenn man über das Creuz multiplicirt

$nqy \underset{+}{-} mhp \underset{-}{+} mpy = 0$ und mit entgegengeſezten Zeichen auf die andere Seite bringt,

$nqy = mph - mpy$ und in eine Proportion gebracht,

$y : h - y = mp : nq$ das iſt in Linien,

$HE : CL = mCE : n.EG.$

$HE = Cl, \; EL = GK$ folglich ſubſtituirt

$Cl : GK = m.CE : n.EG$ aber nach Trig. Gründen

$Cl : GK = \sin. lEC : \sin. GEK.$

$mCE : nEG = \sin. IEC : \sin. GEK.$

Folglich muß der Both ſo ſchief laufen, daß die Sinus der Winkel, die auf beeden Seiten des Wegs durch die Perpendicularlinie lK, und durch ſeinen Weg CE und EG gemacht werden, ſich verhalten wie m zu n; oder wie die Geſchwindigkeiten. z. E. Wenn er im guten Weg in einer Stund 3 Meilen, im ſchlimmen 2 Meilen macht, ſo iſt m zu n wie 3 : 2; und ſo müſſen ſich die Sinus der Winkel verhalten; dann man darf nur CE = EG ſetzen; oder die Länge oberhalb ſoll gleich ſeyn der Länge unterhalb der Linie, welche Vorausſetzung an ſich klar iſt. Da dann ſin. lEC : ſin. GEK = m : n. oder die Sinus wirklich geſezt lC : GK = m : n, und weil lC = HE, GK = LE; m : n = HE : LE; das iſt, die gegebene Linie HL muß unter der Verhältniß m zu n getheilt werden; im Exempel unter der Verhältniß 3 zu 2; welches das Geſez der Refraction iſt, wie wir in den optiſchen Wiſſenſchaften zeigen werden. Man ſiehet aber ſchon aus dieſer Anmerkung, daß das Geſez allgemein und auf alle Fälle ſich anwenden läßt, wo man fragt, wie man auf die bequemſte Weiſe mit dem geringſten Zeitverluſt, was thun könne. Dieſe Regel, wie ich ſie hier vortrage, hat der Herr von Leibniz in den Actis Erudit. 1697. und aus denſelben Herr Prof. Creiling in Diſſert. oder Methodo de maximis & minimis Tub. 1701. vorgetragen; in neuern Zeiten hat Herr von Maupertuis die allgemeine Anwendung dieſes Geſetzes gezeigt, und ſolches das Geſez der kleinſten Wirkung le principe de la moindre action genannt. Die weitere darüber entſtandene Streitigkeiten gehören nicht hieher; die Wichtigkeit und Allgemeinheit dieſes Geſetzes läßt uns hoffen, daß es unſere Leſer nicht reuen wird, eine ſo lange Anmerkung geleſen zu haben.

Zwey-

Zweytes Hauptſtük,
Von der Hydroſtatik.

§. 141.

Erklärung.

Die Hydroſtatik iſt eine Wiſſenſchaft, welche lehret, wieferne das Waſſer unter ſich und mit veſten Cörpern im Gleichgewicht ſich befinde; man handelt alſo nicht nur vom Gleichgewichte flüſſiger Cörper gegeneinander, ſondern auch vom Gleichgewicht veſter und flüßiger Cörper, nebſt den davon abhangenden verſchiedenen Folgen, in Rukſicht auf die Güte der Metallen und anderer Mineralien. Ehe aber die Lehre ſelbſt vorgetragen wird, ſagen wir etwas von der Geſchichte der Hydroſtatik.

Die Geſchichte der Hydroſtatik.

§. 142. Archimedes iſt unſtrittig der erſte geweſen, dem wir die Unterſuchung der Gründe dieſer Wiſſenſchaft, in ſoferne ſie eine Wiſſenſchaft iſt, zu danken haben. Er hat ſie in ſeinen Büchern de inſidentibus Humido bekannt gemacht, und Vitruvius L. IX. c. 3. erzehlt uns, wie er auf ſei-

ne Erfindungen gekommen ſeye; wir werden im Erfolg ihn mehrmalen zu nennen Gelegenheit haben.

§. 143. Mit dem was Archimedes, und ſein Commentator Marinus Ghetaldi in Archimede promoto vorgetragen hatte, war man zufrieden, bis im vorigen Jahrhundert Mariotte in ſeinem franzöſiſch edirten Traité du mouvement des eaux & des autres corps fluides 1686. auch die hydroſtatiſche Sätze erweitert, und durch Experimente beſtätigt hat; welchem noch Robert Boyle in paradoxis Hydroſtaticis und in Medicina Hydroſtatica beſonders in Rukſicht auf den phyſikaliſchen Gebrauch davon beyzufügen iſt.

§. 144. In neuern Zeiten haben Herr Dan. Bernoulli in Hydrodynamica; Herr d'Alembert in Traitè des fluides, und beſonders Herr Prof. Euler in dieſer Wiſſenſchaft dasjenige geleiſtet, was man von groſſen Geiſtern zu erwarten gewohnt iſt. Vorzüglich hat der leztere, nemlich Herr Prof. Euler, ihre Grenzen ungemein erweitert, und ein groſſes Werk unter dem Titel: Scientia navalis, Petrib. 1736. herausgegeben, worinnen das Gleichgewicht veſter und flüßiger Cörper mit einer mathematiſchen Schärfe auf die Schiffbaukunſt und die ganze Schiffahrt, in ſoferne ſie ein Gegenſtand der Mathematik iſt, angewendet wird.

Allgemeine Begriffe und Sätze vom Druk der flüßigen Cörper.

§. 145. Ein flüßiger Cörper iſt, deſſen Theile mit keiner merklichen Kraft zuſammenhangen. Dahero

hero nicht nur das Waſſer, ſondern auch die Luft, das Queckſilber u. ſ. w. in die Claſſe der flüßigen Córper gehóren.

§. 146. Zuſatz. In der Hydroſtatik betrachtet man das Waſſer nur nach ſeiner Schwere mit Hintanſetzung aller übrigen Eigenſchaften und innern Kräften.

§. 147. Erfahr. Die Oberfläche des in ein Behältniß eingeſchloſſenen Waſſers iſt immer horizontal oder wagrecht, und die Directionslinien der ſchweren Córper ſtehen vollkommen perpendicular darauf, oder machen rechte Winkel mit der Ebene der Fläche.

§. 148. Lehrſatz. Es befinde ſich Waſſer in einer Róhre, deren beede Schenkel eine Geſtalt haben können was man für eine will, ſo wird das Waſſer, wenn es von einem Schenkel in den andern treten kann, in einer horizontalen oder wagerechten Ebene ſtehen, und wenn es in beeden Schenkeln gleich hoch ſtehet, in Ruhe bleiben. Dann man kann ſich ein Gefäß, z. E. einen Becher mit Waſſer vorſtellen, ſo wird das Waſſer oben wagrecht ſtehen; §. 147. man betrachte einen Theil dieſes Waſſers in Geſtalt einer irregulairen communicirenden Róhre, wo das auf beeden Seiten druckende Waſſer gleichſam die Wände der Róhren vorſtellen kann; man ſetze nun wirklich ſtatt dieſes von allen Seiten auf die erdichtete Waſſerróhre druckenden Waſſers eine communicirende Róhre von beliebiger Geſtalt, ſo wird die Oberfläche des Waſſers noch horizontal bleiben, wie ſie in dem Gefäß war, weil die wirkliche Róhre weiter nichts thut, als daß ſie die Stelle

des vorigen von allen Seiten herdruckenden Waſſers vertritt.

§. 149. Anm Man kann den obigen Lehrſatz, darauf ſich die ganze Hydroſtatik gründet, auch als eine Erfahrung annehmen; wenn man eine gläſerne communicirende Röhre ſich machen läßt, deren beede Schenkel noch ſo ungleich und irregulair ausſehen, ſo wird das hineingegoſſene Waſſer in beeden gleich hoch ſteigen, und wenn es wagerecht ſteht, in der Ruhe bleiben. Herr von Wolf hat dieſen Satz folgendermaſſen bewieſen: „Wenn „der eine Schenkel viermal weiter iſt als der andere, ſo müßte „das Waſſer, das in dem einen einen Zoll ſinket, in dem an„dern um vier Zoll ſteigen. Aber in dem weitern Schenkel iſt „viermal ſo viel Waſſer als in dem engern; folglich erfolgt nach „den Gründen der Mechanik keine Bewegung, und das Waſſer „bleibt in Ruhe.„ Dieſer Beweis iſt richtig, aber er gilt nur von cylindriſchen Röhren, die regulair ſind; bey irregulairen Schenkeln, wo das Waſſer eben dieſes Geſez befolgt, findet er nicht ſtatt, wenn er nicht abgeändert oder ergänzt wird; daher hat Herr Dan. Bernoulli in ſeinen Hydrodynam. Sect. II. §. 3. den obigen Beweis §. 148. ausgeführt, und durch die Rechnung des Unendlichen, ſo vorgetragen, daß man bey aller Irregularität der Schenkel Elementen des Waſſers annimmt, worauf andere Elemente nach entgegengeſezten Richtungen ſo wirken, daß keine Bewegung erfolgen kann; ſodann ſezt man durch eine erlaubte Subſtitution in die Stelle der Waſſer-Elemente einer erdichteten irregulairen Waſſerröhre, eine wirkliche gläſerne oder blecherne Röhre, welche die Stelle der erſten vertritt.

§. 150. Zuſatz. Wenn *Fig.* 28. das Waſſer bis F in der kleinen Röhre ſtehet, ſo wird es in Ruhe bleiben, weil AF horizontal iſt; gießt man aber mehr Waſſer ein, ſo daß es über F hinauf geht, ſo muß das Waſſer in A auslaufen, oder wenn ein Deckel da iſt, mit ſolcher Gewalt über ſich drucken, daß er zulezt zerſpringet.

§. 151. Zuſatz. Die Wirkung wird erfolgen, die Röhre DC mag weiter oder enger ſeyn als AB nach den Sätzen §. 148. und in einem wie in dem andern Fall wird die Wirkung herauskommen nach §. cit.

§. 152.

§. 152. Zuſatz. Aus gleichem Grund wird einerley Wirkung erfolgen, wenn in zweyerley Röhren der eine Schenkel ſchief, der andere perpendicular ſteht; nach *Fig.* 29.

§. 153. Zuſatz. Dieſe Wirkung hat alſo ihren Grund in dem perpendicularen Druk des Waſſers auf eine Fläche; und man wird die Gewalt des Waſſers beſtimmen können, wenn man ſeine Höhe, und die Fläche meſſet, auf welche es drukt.

§. 154. Zuſatz. CD ſeye *Fig.* 30. eine enge aber ſehr lange Röhre, welche mit einem breiten aber ſehr niedern Cylinder DB Communication habe, ſo wird die Gewalt des Druks = CD . DB ſeyn; alſo wird es eben ſo viel ſeyn, als wenn ein Cylinder Waſſer, deſſen Diameter DB, und deſſen Höhe CD auf die Fläche DB drukte; dahero man mit wenig Waſſer in einer engen aber hohen Röhre erſtaunende Wirkungen hervorbringen kann.

§. 155. Anm. Dieſes iſt das berühmte Mariottiſche Experiment, kraft deſſen man mit etlich Cubiczoll Waſſer viele Centner in die Höhe bringen kann, von welchen Wirkungen Hr v. Wolf in ſeinen nüzlichen Verſuchen oder Experimentalphyſik ausführlich handelt.

§. 156. Zuſatz. Wenn man einen Cubicfuß von überzinntem Blech ſich machen läßt, und ihn zuerſt leer, hernach wiederum mit Waſſer angefüllt wiegt, ſo wird die Differenz der Gewichte die Schwere eines Cubicfuſſes Waſſers anzeigen. Auf dieſe Weiſe hat man gefunden, daß ein Cubicfuß Brunnenwaſſer 64 ℔. ſchwer ſeye.

§. 157. Anm. Wenn alſo bey dem Mariottiſchen Experiment die Fläche, wohin der Druk geſchieht, 100′ im Quadrat hätte, und die Höhe wäre auch 100′, ſo würde die Gewalt des Druks ſo ſtark ſeyn, als ein Waſſerprißma wiegt, das 10000 Cubicſchuh hat; das iſt 10000 . 64 Pf. und dieſe groſſe Wirkung wird

man, wenn die Röhre ſehr eng, mit einem einigen Cubicfuß Waſſer, das iſt mit 64 Pf. hervorbringen können.

§. 158. Zuſatz. Weil *Fig.* 29. der Cylinder ſchief ſteht, ſo drükt das Waſſer nur nach der Linie ED, auf den Boden C; dieſer Boden heiſſe m, ſo iſt die ganze Gewalt auf m = m . DE. Eben diß läßt ſich auch aus mechan. Gründen §. 86. beweiſen; wo $\frac{DE}{CE} . CE . m = DE . m$.

Das Gleichgewicht der flüßigen Materien untereinander.

§. 159. Erklär. Wie überhaupt Cörper von leichterer oder ſchwererer Art (ſpecifice graviora, leviora) diejenige, die unter einerley Raum (ſub eodem volumine) ſchwerer oder leichter ſind; ſo werden auch die flüßige Cörper nach dieſer Erklärung betrachtet, wie z E. Waſſer von ſchwererer Art iſt als Luft, und Quekſilber von ſchwererer Art als Waſſer; das iſt, ein Cubiczoll Quekſilber *wiegt* mehr als ein Cubiczoll Waſſer, und dieſer mehr als ein Cubiczoll Luft.

§. 160. Zuſatz. Es iſt hieraus leicht begreiflich, daß die eigenthümliche Schwere der flüßigen Cörper von einerley Art ſich wie die Räume verhalten, die ſie einnehmen. (Gravitates ſunt ut volumina) z. E. Zwey Cubiczoll Waſſer ſind noch einmal ſo ſchwer als ein Cubiczoll eben dieſes Waſſers, weil der Raum noch einmal ſo groß als das Waſſer von einerley Art iſt.

§. 161. Zuſatz. Wenn aber die eigenthümliche Schwere verſchieden iſt, ſo muß die Verhältniß

niß auch verſchieden ſeyn; z. E. wenn in dem erſten Cubiczoll Waſſer, und in dem doppelten Cubiczoll Branntenwein, der leichter als Waſſer iſt, wäre, ſo würde der doppelte Cubiczoll mit Branntenwein gefüllt, nicht doppelt ſo ſchwer ſeyn als der einfache mit Waſſer gefüllte Cubiczoll, ob er gleich gerade noch einmal ſo groß iſt, und doppelten Raum erfüllt. Dieſes Geſez ſolle nun unterſucht werden; wie ſich nemlich ſolche Cörper von verſchiedener Art gegeneinander in Rukſicht auf ihre Schwere und den Raum den ſie einnehmen, verhalten.

§. 162. Lehrſatz. Die Gewichte zwoer Materien von verſchiedener Schwere und Ausdehnung oder Räumen, die ſie einnehmen, verhalten ſich wie die Producte aus dem Raum den eine jede einnimmt, in ihre eigenthümliche Schwere. Dann es ſeyen die eigenthümliche Schweren (gravitates) G und p; die Räume (Volumina) V und v; und die Gewichter (Pondera) P und p; endlich die Menge der erſten Materie, ſo viel in den Raum = v davon gehet, habe das Gewicht π, ſo iſt der

Satz.

$$P : p = G . V : g . v.$$

Bew.

$\left.\begin{array}{l}\pi : p = G : g \\ P : \pi = V : v\end{array}\right\}$ nach §. 160. beede Proport. mit einander multiplicirt, geben

$$P\pi : p\pi = G . V : g . v$$

$$\pi : \text{———}$$

$$P : p = G . V : g . v.$$

§. 163. Anm. Dieſer Lehrſatz wird ſonſt ausgedrukt: Pondera ſunt in ratione directa denſitatum & voluminum. Dann die eigenthümliche Schwere heißt auch die Dichtigkeit der Materie.

§. 164. Zuſatz. Wenn ein leichteres flüßiges Weſen mit einem ſchwereren in einer communicirenden Röhre im Gleichgewichte ſtehet, ſo wird jenes höher ſtehen als dieſes.

§. 165. Lehrſatz. Die Höhen flüßiger Weſen von verſchiedener Dichtigkeit in zwey communicirenden Röhren verhalten ſich umgekehrt wie die Dichtigkeiten. (Altitudines ſunt in ratione inverſa denſitatum). Dann es ſey *Fig.* 28. in AB eine dichtere Materie, z. E. Queckſilber, das 14 mal ſchwerer als Waſſer iſt, und in der Röhre CD ſeye eine leichtere, z. E. Waſſer, ſo wird diß vierzehnmal höher ſtehen, als Queckſilber, wenn ein Gleichgewicht iſt. Dann es ſeyen die Dichtigkeiten D und d, die gemeinſchaftliche Grundfläche, wo ſie auf einander in der communicirenden Röhre drucken = b, die Höhen AB, CD, ſo iſt der

Satz.

$$AB : CD = d : D.$$

Der Druk der Materie in AB iſt = AB . b . D, und der in CD = CD.b.d nach §. 162.

iſt nun ein Gleichgewicht, ſo müſſen beede Producte gleich ſeyn, folglich

$$AB . b . D = CD . b . d;$$ daraus ergibt ſich die Prop. $AB : CD = b . d : b . D$

$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad} : b$$

$$AB : CD = d : D.$$

§. 166. Zuſatz. Man kann alſo aus Abmeſſung der Höhen in wagerechtem Stand die eigenthümliche Schweren der flüßigen Materien mit einander vergleichen.

Das

Das Gleichgewicht flüßiger und veſter Cörper.

§. 167. **Erklär.** Ein Cörper, der einen andern unterſtüzt, wendet gerade ſo viel Kraft an, als der Cörper, den er unterſtüzt, ſchwer iſt; z. E. ein Pfund Bley wird auf einen Tiſch gelegt, und darauf erhalten, daß es nicht ſinkt; der Tiſch, darauf er liegt, könnte noch mehr tragen; zu gegenwärtiger Laſt eines Pfundes aber trägt er nicht mehr, und erhält alſo die Laſt; ſezt man anſtatt der ebenen Tiſchfläche eine Queckſilberfläche, ſo wird auch dieſe das Pfund Bley erhalten und nicht ſinken laſſen; dann ſie wendet ſo viel Kraft dagegen an, als das Pfund drukt, und hat noch was übrig an Kraft, das ſie nicht ganz braucht; endlich ſetze man in die Stelle des Tiſches eine Waſſerfläche, ſo wird dieſe auch, ſo viel ſie Kraft hat, das Pfund am ſinken zu hindern ſuchen; weil aber ihre Kraft zu klein, ſo wird ſie es nicht ganz hindern können, ſondern ſolches langſam unter ſich ſinken laſſen, hingegen würde ſie ein Pfund Holz erhalten. Nun fragt man, wie groß die Gewalt ſey, die ein flüßiges Weſen anwendet, einen Cörper am ſinken zu hindern.

§. 168. **Lehrſatz.** Die Gewalt, die ein flüßiges Weſen anwendet, einen veſten Cörper am ſinken zu hindern, iſt dem Gewichte des flüßigen Weſens gleich, das eben ſo viel Raum als der veſte Cörper, einnimmt. Dann man begreift, daß ein Cubicſchuh Waſſer von dem obern, ihn umgebenden und unten ſtehenden Waſſer erhalten und getragen wird; nun ſetze man einen andern Cubicſchuh von

einer andern gleich ſchweren aber veſten Materie in die Stelle des Cubicfuſſes Waſſer, ſo wird alles bleiben wie vorhin; weil in beeden Fällen einerley Raum und einerley Schwere vorhanden iſt. Wenn aber der veſte Cörper unter einerley Raum ſchwerer iſt, ſo wird er ſinken mit einer um ſo viel verminderten Gewalt, als das Waſſer, das gleichviel Raum mit ihm einnimmt, ſchwer iſt; iſt er leichter, ſo wird er in eben der Verhältniß in Waſſer ſteigen.

§. 169. Zuſatz. Wann das Gewicht des veſten Cörpers = p, und das Gewicht des Waſſers, das gleichviel Raum einnimmt = m, ſo ſinkt oder ſteigt er mit der Gewalt = p — m; da dann bey dem Sinken der Ausdruk p — m poſitiv, bey dem Steigen aber negativ iſt.

§. 170. Anm. Dieſe Lehre kann man leicht durch ein Experiment erläutern; dann wenn man ſich einen Cubiczoll machen läßt, und ſolchen zuerſt leer und hernach mit Waſſer gefüllt abwiegt, ſo wird man finden, daß ein Cubiczoll Bley, Eiſen, Zinn, Silber, u. ſ. w. gerade um ſo viel leichter im Waſſer wird, als ein Cubiczoll Waſſer ſchwer iſt.

§. 171. Zuſatz. Man kann alſo die eigenthümliche Schwere verſchiedener flüßiger Materien durch das Abwägen eines veſten Cörpers in denſelben, finden; dann wenn man z. E. einen Cubiczoll Bley zuerſt im Waſſer, dann in der Milch, ferner in dem Wein, und hernach im Weingeiſt u. ſ. w. abwiegt, und bemerkt, wie viel er in jeder der angeführten flüßigen Materie an ſeiner Schwere verlichre, ſo wird dieſer Verluſt anzeigen, wie ſchwer ein Cubiczoll Waſſer, Milch, Wein, Weingeiſt u. ſ. w. ſeye, und wie ſich die eigene Schweren (gravitates ſpecificæ) dieſer Materien gegeneinander verhalten.

§. 172.

§. 172. Die eigene Schwere zwoer Materien verhalten ſich umgekehrt (in ratione inverſa) wie der Verluſt ihrer Gewichter im Waſſer, und gerad (in ratione directa) wie die Gewichter in freyer Luft.

Beweis.

Die eigenthümliche Schwere beeder Materien ſey A, B, ihr Gewicht in freyer Luft a, b, ihr Verluſt im Waſſer α, β; und die eigenthümliche Schwere des Waſſers ſey C, ſo iſt

$$\left.\begin{array}{l} A:C = a:\alpha \\ C:B = \beta:b \end{array}\right\} \text{nach §. 168.}$$

$$\overline{AC:CB = a\beta:\alpha b}$$

$$C: \overline{\qquad\qquad}$$

$$A : B = a\beta:\alpha b.$$

§. 173. Zuſatz. Wenn $a = b$, ſo iſt $A:B = \beta:\alpha$; alſo umgekehrt wie der Verluſt im Waſſer.

§. 174. Anm. Auf dieſe Weiſe ſind die Vergleichungen verſchiedener Cörper nach ihrer eigenthümlichen Schwere gefunden worden; z. E.

Nach Boerhavens Verſuch:

☉	19636	♀	8843
☿	14019	♂	7852
♄	11345	♃	7321
☾	10535	Glas	2805
		Waſſer	1000.

Nach Bions Verſ. in Pariſer Gewichte:

	Pf.	Unz.		Pf.	Unz.
☉	1326,	4	♂	558,	
☿	946,	10	♃	516,	2.
♄	802,	2	Marmor	188,	12.
☾	720,	12	Flußwaſſer	69,	12.
♀	627,	12	Seewaſſer	70,	10.

in welchen Tabellen die Zeichen nach der Ordnung Gold, Queckſilber, Bley, Silber, Kupfer, Eiſen, Zinn bedeuten.

Die Archimedeiſche Gold- und Silberprobe, oder die Probe zweyer vermiſchten Metalle.

§. 175. Anm. Wie man überhaupt dem Archimedes in den hydroſtatiſchen Wiſſenſchaften unter den Alten das meiſte zu danken hat, ſo ſchreiben ſich auch die Kunſtgriffe in Abwägung der Metalle, wenn ſie aus zweyen vermiſcht ſind, von ihme her; wenigſtens wird dieſe Probe, davon wir reden, ihme vom Vitruvius L. IX. c. 3. zugeeignet.

§. 176. Lehrſatz. Wenn zwey Metalle mit einander vermiſcht ſind, und nach der Vermiſchung eben ſo viel Raum einnehmen, als ſie vorher einzel einnahmen, ſo kann man durch Abwägung im Waſſer finden, wie viel von einem jeden in der vermiſchten Maſſe ſeye.

Bew.

Die Metalle heiſſen ☉ und ☽ oder A und B; der vermiſchte Klumpen M; die Gewichter in freyer Luft a, b, m; der Verluſt eines jeden im Waſſer α, β, μ; oder deutlicher

A wiegt in freyer Luft a verliehrt im Waſſer α.
B — — — b — — — β.
M — — — m — — — μ.

Das geſuchte Gewichte von A in dem vermiſchten Klumpen M heiſſe man x, ſo wird das Gewicht von dem andern vermiſchten Theil in M ſeyn $= m - x$. Nun gibt es folgende Proportionen nach §. 168.

A verliehrt im Waſſer α, was verliehrt x?

Das Gewicht B verliehrt β, was verliehrt $m - x$?

das iſt $a : \alpha = x : \frac{\alpha x}{a}$ alſo $\frac{\alpha x}{a}$ der Verluſt von x.

$b : \beta$

$$b:\beta = m - x : \frac{m\beta - \beta x}{b}$$ der Verluſt von m—x.

Dieſe beede geſuchte einzele Verluſte müſſen dem Verluſt μ von dem ganzen Klumpen gleich ſeyn; alſo iſt

$$\frac{\alpha x}{a} + \frac{m\beta - \beta x}{b} = \mu.$$ nun calculirt man, und ſucht x;

$$\overline{}\ .a$$

$$\alpha x + \frac{ma\beta - a\beta x}{b} = \mu a$$

$$\overline{}\ .b$$

$$\alpha bx + ma\beta - a\beta x = \mu ab.$$

$$ma\beta = ma\beta \text{ ſubtr.}$$

$$\alpha bx - a\beta x = \mu ab - ma\beta$$ d. i. ſchikl. ausgedr.

$$(\alpha b - a\beta)x = (\mu b - m\beta)a$$

$$\overline{} : \alpha b - a\beta$$

$$x = \left(\frac{\mu b - m\beta}{\alpha b - a\beta}\right)a.$$

§. 177. Exempel. Es ſey a = 37 ℔. Zinn; ſein Verluſt im Waſſer $\alpha = 5$ ℔. b = 23 ℔. Bley; ſein Verluſt im Waſſer $\beta = 2$ ℔. Der aus beeden vermiſchte Klumpe wiege 120 ℔; alſo m = 120 ℔. und ſein Verluſt im Waſſer $\mu = 14$ ℔. ſo iſt x, wenn nach der obigen Formel ſubſtituirt wird,

$$\left(\frac{14 \cdot 23 - 120 \cdot 2}{5 \cdot 23 - 37 \cdot 2}\right) 37 \text{ ℔.} = 74 \text{ ℔.}$$

wenn man wirklich multiplicirt und ſubtrahirt; folglich das andere Gewicht vom Bley = 120 — 74 = 46.

§. 178. Anm. Was wir vorausgeſezt, in Rukſicht auf den Raum, muß wohl beobachtet werden. Dann die Metallen nehmen nach der Vermiſchung oft weniger Raum ein, als ſie vorher einzel eingenommen haben. Davon Herr Prof. Krafft de denſitate permixtorum nachgeſehen werden kann T. XIV. Comm. Acad. Petrop. Wenn aber der Raum nicht vollkommen einerley bleibt,

vor

vor und nach der Vermiſchung, ſo fehlt es der Rechnung an Genauigkeit. Hernach ſezt man bey der angebrachten Rechnung voraus, daß es nur zwey Metallen ſeyen, die bekannt ſind, dann bey dreyen Metallen kann man die vorgetragene Rechnung nicht gebrauchen. Ueberdas müſſen die beede Metallen bekannt ſeyn, das iſt, man muß wiſſen, ob Gold und Silber, Kupfer und Bley, Zinn und Bley im vermiſchten Cörper ſeye, da man hernach nur die Gröſſe eines jeden der vermiſchten Theile, nicht aber die Theile ſelbſt, wenn ſie vorher unbekannt wären, findet. Archimedes hat die Probe mit vermiſchtem Gold und Silber gemacht, und gezeigt, wie viel der Goldarbeiter Silber zur goldenen Crone des Königs Hiero genommen, oder um wieviel er dieſe goldene Crone durch den Zuſatz von Silber verfälſcht habe. Es iſt die berühmte Erfindung, darauf er, während daß er badete, gefallen ſeyn, und deßwegen ſein Ευρηκα ausgerufen haben ſolle.

Etwas von dem Mathematiſchen bey dem Münzweſen.

§. 179. Anm. Aus dem §. 174. erhellet, daß Gold das vornehmſte und ſchwerſte Metall ſey; neben dieſem hat man noch im Handel das Silber eingeführt; die Gründe dieſer Einführung trägt man in der Moral und Politik vor; hier wollen wir uns nur mit den mathematiſchen Betrachtungen abgeben, und zeigen, wie bey der ſich noch ſo ſehr ändernden Verhältniß des Wehrts dieſer zwey Metalle die Berechnung zu machen, daß man immer einerley Wehrt ohne Verluſt erhält.

§. 180. **Willk. Satz.** Gold und Silber wird nach Marken eingetheilt; und gegenwärtig iſt nach dem Conventions-Thaler das Mark Silber 20 fl. und das Mark Goldes $283\frac{1}{10}$ fl. Das iſt, die Proportion zwiſchen Gold und Silber iſt beynahe wie 1 zu 14; man begreift aber leicht, daß dieſe Verhältniſſe nach den Bedürfniſſen, auch nach den willkührlichen Achtungen der Menſchen gegen dieſe Metallen ſich ändern, und, wie ſie es ſchon geweſen, bald gröſſer bald kleiner werden können.

§. 181.

§. 181. Lehrſatz. Die Verhältniß der zwey Metallen, Gold und Silber, mag ſich ändern wie ſie immer will, ſo wird man immer einerley Ausdruk für die Mark Goldes, und einerley für die Mark Silber finden.

Dann es ſey die Mark Silber $= s$,
die Mark Goldes $= g$,
die Verhältniß zwiſchen beeden $= 1 : p$.
ſo wird ſich das Silber zum Gold verhalten wie s zu g, und umgekehrt; das iſt

$1 : p = s : g$ folglich $g = ps$ Mark Gold.
$p : 1 = g : s$ folglich $s = \frac{g}{p}$ Mark Silber.

Wenn nun Gold und Silber eine andere Proportion bekommen, und die neue Mark Goldes $= x$, die neue Mark Silber $= y$ geſezt iſt, ſo werden ſich folgende Verhältniſſe leicht geben.

I. $ps : x = x : g$
$psg = x^2$ und $\sqrt{}$ extrah.
$\sqrt{psg} = x$ der Wehrt der neuen Mark in Vergleichung mit der alten Verhältniß

II. $\frac{g}{p} : y = y : s$
$\frac{sg}{p} = y^2$
$\sqrt{}$ extr.
$\sqrt{\frac{sg}{p}} = y$ der Wehrt der neuen Mark Silber in Vergl. mit der alten Verhältniß.

§. 182. Zuſatz. Alſo iſt der beſtändige Ausdruk bey allen Veränderungen für die Mark Goldes $\sqrt{psg}$, und für die Mark Silber $\sqrt{\frac{sg}{p}}$.

§. 183. Zuſatz. Eigentlich ſind die Ausdrüke von den vorigen nicht unterſchieden; dann weil ps = g nach §. 181. ſo iſt $\sqrt{psg} = \sqrt{psps} = ps = g$. Eben ſo, weil $\frac{g}{p} = s$, ſo iſt $\sqrt{\frac{sg}{p}} = \sqrt{ss} = s = \frac{g}{p}$. Man zieht aber dennoch die Ausdrücke §. 182. billig vor, weil ein jeder alle drey Glieder p, s, g in ſich enthält, da die andern nur eins, höchſtens zwo, ps oder $\frac{g}{p}$ in ſich begreifen.

§. 184. Zuſatz. Wenn man die Wehrte §. 182. ſich bekannt macht, und nach ſelbigen rechnet, ſo wird man bey einem heimgegebenen hundertjährigen Capital, wenn ſich die Proportion von Gold und Silber noch ſo ſehr verändert hätte, nicht das mindeſte verliehren; dann geſezt, man entlehne von einem nach der Conventions-Proportion 1000 fl. wo die Proportion 1 : 14; nach Verfluß einer gewiſſen Zeit werden ſie ihm heimgegeben, da die Proportion des Silbers zum Gold wie 1 : 12 iſt. Man fragt, wie ſolle er ſich bezahlen laſſen. Man nehme halb Gold und Silber; der Conventions-Wehrt iſt 500 fl. = 25. Mark Silber = 25 . 20 fl. dann 20 fl. iſt eine Mark. Dieſe multiplicirt mit dem Mark, wo die Proportion 1 : 12 iſt, geben nach der Decimalrechnung 543 . 043 fl. Ferner im Conventions-Wehrt iſt 500 fl. Gold = 1,76616 Mark. Dieſe multiplicirt mit dem Wehrt der Mark, wo die Proportion 1 : 12; nemlich mit 260 . 661, nach der Decimalrechnung, ſind 458 fl. $\frac{3}{10}$ fl. Beede Summen addirt geben 1002 fl. $\frac{343}{1000}$ fl. = 1002 fl. 20 kr.

Der

Der Ueberſchuß iſt ſehr gering, den man zurükgeben kann. Läßt man ſich in lauter Silbergeld bezahlen, ſo bekommt man 1068 fl. alſo 68 fl. nach dem wahren oder eingeführten Wehrt, zu viel. Lieſſe man ſich aber in lauter Gold bezahlen, ſo bekommt man 84 fl. zu wenig; nemlich nur 916 fl. Man könnte alles noch genauer berechnen; allein die Sache würde zu weitläuftig; dahero die Helfte jedesmal an Gold und Silber genommen, den geringſten Verluſt gibt, der bey tauſend Gulden, wie wir geſehen haben, kaum etliche Gulden beträgt. Die Regel iſt alſo leicht, und von einem jeden, der den Beweis auch nicht einſieht, oeconomiſch zu gebrauchen, daß er ſich halb in Gold und halb in Silber bezahlen laſſe.

§ 185. Anmerk. Das hier vorgetragene findet man ausführlich, auch in Rukſicht auf die deutſche Münzſtätten, berechnet, in der Abhandlung von den Grundſätzen der Münzwiſſenſchaft mit einer Anwendung auf das deutſche Münzweſen aus der engliſchen Originalhandſchrift überſezt. Tüb. 1761. Der Verfaſſer davon war Herr Chevalier Stuart, der ſich etliche Jahre in Tübingen aufhielt, und wie mit andern alſo auch mit dieſer Arbeit das Publicum beehrte. Zu unſerm Zwek haben wir blos das Mathematiſche daraus angeführt, und hier und da in etwas erläutert.

Das Schwimmen der Cörper, beſonders in Rukſicht auf das Schiffweſen.

§. 186. Lehrſatz. Wenn p die Schwere des veſten Cörpers, m die Schwere des Waſſers bedeutet, das eben ſo viel Raum einnimmt, ſo wird er ſinken, wenn $m < p$, ſteigen, wenn $m > p$, und in Ruhe bleiben, wenn $m = p$. Dann er ſinkt, oder ſteigt, oder bleibt in der Ruhe mit der Kraft

 p—m

$p - m$ nach §. 169. aber wenn $m = p$, ſo iſt $p - m = p - p = o$; folglich bleibt er in der Ruhe; iſt $m > p$, ſo iſt $p - m$ negativ, ein negatives Sinken, das iſt, ein empor Steigen; folgl. $m < p$, gibt poſitiv $p - m$ ein wirkliches Sinken.

§. 187. Lehrſatz. Ein Cörper, der leichter als Waſſer iſt, ſinkt ſo tief, bis der eingetauchte Theil einem mit Waſſer ausgefüllten Raum gleich iſt, der ſo ſchwer wiegt, als der ganze veſte Cörper. Die Gröſſe des eingetauchten Theils vom Cörper, dem Raum nach betrachtet, ſey $= u$, das Gewichte des ganzen Cörpers $= p$, und das Gewicht eines Cubicfuſſes Waſſer $= m$; ſo iſt der Raum u mit Waſſer ausgefüllt, $= mu$, dieſer Raum iſt dem Gewicht p des ganzen veſten Cörpers gleich, folglich $p = mu$.

§. 188. Zuſatz. Weil $p = mu$, ſo iſt $u = \frac{p}{m}$; das iſt, die Gröſſe des eingetauchten Theils vom veſten Cörper iſt gleich dem ganzen Gewicht des Cörpers durch das Gewicht des Waſſers m dividirt.

§. 189. Lehrſatz. Wenn man einen ſchwerern Cörper als Waſſer in einen groſſen Raum bringt, z. E. in die Geſtalt einer hohlen Kugel, ſo wird ſie im Waſſer ſchwimmen, und man wird aus dem gegebenen Gewicht des Cörpers und eines Cubicſchuhes Waſſers die Gröſſe des hohlen Raums beſtimmen können.

Beweis.

Das erſte iſt vor ſich klar; was aber das zweyte betrift, ſo iſt der Raum wie oben §. 188. wo allemal $u = \frac{p}{m}$; man ſetze den geſuchten Raum oder die Höh-

lung

lung $= x$, ſo iſt, wenn alles wie vorhin bleibt, und die Buchſtaben das nemliche bedeuten, $x = \frac{p}{m}$; dann das Gewicht Waſſer, das die ganze Hohlung ausfüllt, iſt mx, und dieſes Gewicht iſt dem Gewicht des ganzen Cörpers p gleich, folglich $mx = p$, und $\frac{p}{m} = x$. Aus dieſem gefundenen Raum hat man nun die Kugel x; aus der Kugel ſucht man den Diameter; nach §. 654. I. Th. und kann hernach den Cörper zubereiten laſſen.

§. 190. Anm. Z. E. 30 Pf. Metall ſoll im Waſſer ſchwimmen; ſo iſt $x = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$, weil $m = 70$ nach §. 174. alſo $\frac{3}{7}$ die Kugel; daraus der Diameter, weil nach §. 654. I Th. $d^3 = 6 \cdot \frac{3}{7} \cdot 0{,}3183098861\,83$, folglich $d = 0{,}935$. Hieraus läßt ſich begreiflich machen, wie die Schiffe, beſonders wo ſie in dem Waſſer gehen, unten eine gewölbte Höhlung bekommen müſſen; und überhaupt wie man aus hydroſtatiſchen Gründen die Schiffbaukunſt herleiten könne; davon Herr Prof. Euler in ſcientia nav. ausführlich handelt.

§. 191. Zuſatz. Ein ſolches ausgehohltes Gefäß, wenn es viel leichter iſt, als Waſſer, wird nicht nur für ſich ſchwimmen, ſondern auch andere daran beveſtigte Cörper vor dem Sinken erhalten.

§. 192. Zuſatz. Wenn ein ſolches hohles Gefäß, durch Einwerfung anderer Gewichte, ſo beſchaffen wird, daß es ſich in verſchiedenen flüßigen Materien, z. E. in Waſſer, Wein, Milch, u. ſ. w. gleich tief eintaucht, ſo bleibt u immer einerley; ſolgl. weil $u = \frac{p}{m}$, bleibt auch $\frac{p}{m}$ immer ei-

nerley; weil es aber verſchiedene flüßige Materien ſind, ſo wird m, und p nicht immer einerley bleiben, man ſetze alſo M, μ, für m, und P, π für p; ſo wird $\frac{p}{m} = \frac{P}{M} = \frac{\pi}{\mu}$ u. ſ. w. folglich $m : M = p : P$, $\mu : M = \pi : P$. Man kann alſo auch hierdurch die eigene Schwere flüßiger Materien gegeneinander unterſuchen.

Drit-

Drittes Hauptſtük, Von der Aerometrie.

§. 193.

Erklärung.

Diejenige flüßige Materie, die den Raum, darinn wir uns befinden, und alle Plätze ausfüllt, wo kein Cörper ſie ausſchließt, ob wir ſie ſchon nicht ſehen, ſolle Luft heiſſen; es kommt darauf an, daß wir zeigen, ob eine ſolche unſichtbare Materie wirklich vorhanden iſt, und wenn ihr Daſeyn erwieſen, was ihre Eigenſchaften nach der mathematiſchen Betrachtung derſelben, ſeyen; die Lehre davon heißt die Aerometrie, ehe wir ſie aber ausführen, wollen wir die Geſchichte kürzlich erzehlen.

Die Geſchichte der Aerometrie.

§. 194. Die Aerometrie iſt zuerſt von dem Freyherrn von Wolf als eine Wiſſenſchaft in der angewandten Mathematik beſonders vorgetragen worden. Im Jahr 1709. arbeitete er ſie nach mathematiſcher Lehrart aus, und rukte ſolche hernach in ſeine Elementa Math. univ. ein; Von welcher Zeit an ſie immer ein Theil der angewandten Mathematik geblieben.

§. 195. Inzwiſchen haben die Alten ſchon lange vor ihm die Lehre von der Luft ſo gar nicht verabſäumt, daß man beſonders im vorigen Jahrhundert diejenige Entdeckungen ſuchen muß, auf welche die Wolfiſche Aerometrie gebauet iſt; der Unterſchied beſteht nur darinnen, daß man vor der Ausgabe der Wolfiſchen Elem. dieſe Wiſſenſchaft zur Phyſik und nicht zur Mathematik gerechnet hat; da ſie aber durch arithmetiſche, geometriſche und algebraiſche Rechnungen ihre Vollkommenheit erſt erreicht, ſo hat ſie nun mit gutem Recht ihren angewieſenen Platz in der angewandten Mathematik.

§. 196. Der erſte, der im vorigen Jahrhundert durch die ſo gemeinnützige Erfindung der Luftpumpe den Grund zu dieſer Wiſſenſchaft gelegt, war ein Deutſcher, Otto von Guerike, Churbrandenburgiſcher Rath und Burgermeiſter zu Magdeburg, der ſeine Experimente ſelbſt im Jahr 1672 unter folgendem Titel herausgegeben: Experimenta nova Magdeburgica de vacuo ſpatio. Die erſte Experimente machte er zu Regenſpurg 1653. woſelbſt er damals auf dem Reichstag als Abgeſandter ſich befand; die gemachte unvermuthete Verſuche ſezten den daſelbſt anweſenden Kayſer, auch Churfürſten, Fürſten und Abgeſandte in die gröſte Verwunderung, welche ſich bald weiter ausbreitete; wie denn der gelehrte Jeſuit, Caſpar Schott, der damals Prof. Math. zu Würzburg war, an unſern Guerike ſchrieb, nähere Nachrichten von ihm ſich ausbat, und dieſe Experimente ſtatt eines Anhangs ſeiner Arti Mechan. Hydraulico-Pneumaticæ 1657. beyfügte. Aus dem Schottiſchen Werk nahm

der

der Engländer Robert Boyle Anlaß, durch Hülſe des groſſen Mechanici Rob. Hooke, eine etwas bequemere Luftpumpe verfertigen zu laſſen, daher es kam, daß nicht nur verſchiedene Engländer, ſondern auch Franzoſen, den Boyle zum Erfinder der Luftpumpe machen wollten, bis endlich Guerike ſelbſt 1672 die ſchon gemeldte Schrift an das Licht treten lieſſe. Nachgehends haben Muſchenbrock unter den Holländern, Jac. Leupold unter den Deutſchen, Hauksbee unter den Engländern, und erſt vor wenigen Jahren Joh. Smeaton, bequemere Pumpen erfunden, davon wir im folgenden reden.

§. 197. Vor dieſen Entdecknngen hat man wenig, auch in der Phyſik, von der Luft ſagen können, das gründlich geweſen wäre; und da die Hydraulik, die doch ohne die Aerometrie nicht gründlich gelehret werden kann, immer ein Theil der angewandten Mathematik war, ſo muß man ſich über die ſeltſame Ausdrücke der Alten wundern, wenn ſie z. E. die Springbrunnen erklären wollten, und ſich bald auf den Schrecken der Natur vor dem leeren Raum, bald auf andere verborgene Eigenſchaften, dabey man nichts denket, und die ſie qualitates occultas nannten, hin und wieder berufen haben.

§. 198. Hingegen kann man auch das nicht läugnen, daß die Alten die Muſik, welche eine beſonders angenehme Modification der Luft iſt, und ganz mathematiſch vorgetragen werden kann, weit mehr als die Neuere beſchrieben, und immer zu den freyen Künſten gerechnet haben; dahero im gegenwärtigen Hauptſtük auch von uns dieſe Wiſſenſchaft nicht übergangen werden ſolle.

§. 199. Was endlich die verſchiedene Luftmeſſer betrift, ſo werden wir das, was zu ihrer Geſchichte gehört, in der wirklichen Ausführung kürzlich anzeigen, und begnügen uns, hier die Geſchichte der Aerometrie im Ganzen, in ſofern ſie überhaupt eine Wiſſenſchaft iſt, vorgetragen zu haben.

Die Exiſtenz der Luft, ihre Schwere und Elaſticität.

§. 200. Lehrſatz. Die Luft exiſtirt wirklich.

Bew.

Wenn man die Hand oder eine andere Fläche, z. E. einen Windfächer ſchnell gegen das Geſicht bewegt, ohne das Geſicht wirklich mit dem Fächer zu berühren, ſo fühlt man doch im Geſicht eine Berührung, ob man ſchon nichts ſiehet, das einen berührt; dieſes unſichtbare uns allenthalben umgebende Weſen haben wir Luft genannt; alſo exiſtirt die Luft.

§. 201. Erklär. Elaſtiſch heißt ein flüſſiger Cörper, wenn er ſich zuſammendrucken läßt, nachgehends aber, wenn der Druk nachläßt, ſich wieder in ſeinen vorigen Zuſtand herſtellet oder ausbreitet, ſo bald er die zuſammendruckende Kraft überwinden kann.

§. 202. Lehrſatz. Die Luft iſt elaſtiſch.

Bew.

Wenn man in ein etwas hohes mit Waſſer gefülltes oben offenes Gefäß ein leeres Glas dergeſtalt hineinſtürzet, daß der Rand des Glaſes ringsherum zugleich die Oberfläche des Waſſers berührt, und ſodann das Glas in dieſer Richtung bis auf den Boden des Gefäſſes

fäſſes hinunter drukt, ſo wird 1) ſehr wenig Waſſer in das Glas kommen, 2) wird es ſogleich ſeine Stelle ändern, wenn der Druk nachläßt, und 3) wird es nicht nur wanken und umſinken, ſondern es werden auch durch das Waſſer Luftblaſen heraufſteigen und auf der Oberfläche des Waſſers zerſpringen. Da nun im Glaſe Luft iſt, nach §. 200. ſo widerſteht die Luft dem Waſſer, das eindringen will; weil aber doch etwas Waſſer hineinkommt, ſo wird die Luft zuſammengedrukt, weil das Glas im Waſſer ſo viel Luft hält als vorhin, und weil das Waſſer den unterſten Raum einnimmt, folglich von der Luft abgeſondert bleibt. Weil ferner das Glas wanket, wenn der Druk aufhöret, ſo muß die eingeſchloſſene Luft, die ſich wieder auszubreiten ſucht, und wirklich ausbreiten kann, wenn der Druk nachläßt, die Urſache davon ſeyn; welches noch mehr erhellt, weil das Glas ſtehen bleibt, wenn die Luft in der Geſtalt einer Blaſen herausgefahren iſt. Alſo ſucht ſich die zuſammengepreßte Luft auszubreiten; das aber iſt die Erklärung der Elaſticität, folglich iſt die Luft elaſtiſch.

Anders: Wenn man einen wohl anpaſſenden Stempel in einen hohlen metallenen Cylinder hineinſtößt, ſo wird er von ſelbſt wieder zurükgehen, wenn der Druk nachläßt; folglich ſucht ſich die im Cylinder befindliche und zuſammengedrukte Luft wieder auszubreiten, das iſt, ſie iſt elaſtiſch.

§. 203. Lehrſatz. Die Luft läßt ſich durch die Wärme ausdehnen.

Bew.

Wenn man eine Lammsblaſe, in welcher etwas weniges

niges Luft iſt, veſt zubindet, und ſolche auf einem Kohlfeuer wármet, ſo wird die eingeſchloſſene Luft ſich ſo ſehr ausbreiten, daß zulezt die Blaſe zerſpringt.

§. 204. Lehrſatz. Die Luft iſt ſchwer.

Bew.

Wenn man eine Róhre, die an beeden Enden offen iſt, in das Waſſer ſtekt, ſo wird es ſo hoch in der Róhre ſtehen, als im Gefáß; man halte das obere End zu, und nehme die Róhre ohne Wanken aus dem Waſſer, ſo wird das Waſſer unten nicht herauslaufen, wenn ſie gleich unten offen bleibt, ſo lang man die obere Oefnung zuhált; da es doch kraft ſeiner Schwere ſinken ſollte; da es nun nicht ſinkt, ſo muß ein anderer Córper es halten; es iſt aber nichts vorhanden, als Luft; folglich muß der Gegendruk der untern Luft das Sinken oder Herauslaufen des Waſſers verhindern. Demnach drukt die Luft in die Hóhe; ſie wúrde aber nicht in die Hóhe drucken kónnen, wenn ſie nicht gegen die Erde gedrukt wúrde; weil ſonſt alle Luft auf der Oberfláche der Erden hinweg und in die Hóhe fliegen, und an deren Statt alle Augenblicke neue múßte erſchaffen werden, welches ungereimt iſt; folglich iſt der Druk der Luft gegen die Erde ſenkrecht; das iſt, nach der Erklárung der Schwere, die Luft iſt ſchwer.

§. 205. Anm. Alle dieſe Sátze kann man unter der Glocke durch die Luftpumpe einem vor die Augen hin demonſtriren; wir haben aber, wie Herr Prof. Káſtner, hier mit Fleiß die allgemeinſte und von jedem Kinde zu machende Erfahrungen zu Grunde gelegt, damit man ſehe, wie man dieſe wichtige Eigenſchaften der Luft auch ohne Luftpumpen hátte erfinden kónnen, und wie nichts leichter ſey, als dieſes zu erfinden, wenn man nur auf das, was man alle Tage tauſendmal ſiehet und thut, Achtung geben will. Allein, wie Voltaire ſagt, die wichtigſte und gemein-

meinnützigſte Erfindungen ſind nicht allemal den ſcharfſinnigen Gelehrten vorbehalten; vielmehr kann man mit ihm ſagen, die gröſte Erfinder waren die gröſte Ignoranten. Er wendet diß auf die Erfindung des Pulvers an; und es iſt bekannt, daß derjenige der das Pulver erfunden hat, ſo kein witziger Kopf war, und mehr durch einen Zufall als Nachſinnen gelehret wurde. Uebrigens iſt das nicht aus Geringſchätzung gegen die Einſichtsvolle Alten geſagt; es geht auch hier wie mit des Columbus Ey; wenn man es ſchon weiß, daß die Luft elaſtiſch und ſchwer iſt, ſo kann man es leicht und auch ohne Luftpumpe erweiſen; vielleicht würden aber die gegebene leichte Beweiſe noch jezo vermißt werden, wenn kein Guerike und Boyle uns durch ungleich gröſſere Umſchweife es gezeiget hätten.

§. 206. Anm. Die Erfahrung von dem lezten Beweis §. 204. gehet nicht an, wenn die Röhre über 32 Rheinl. Schuh lang iſt; dann alsdann fällt das Waſſer heraus, man mag oben die Oefnung zuhalten oder nicht; das hat ein Gärtner zu Florenz zuerſt bemerkt, da ihm ein Verſuch mit einer Pumpe mißlungen, durch welche er das Waſſer über 18 Ehlen hoch empor bringen wollte. Er konnte ſich nicht darein finden, und fragte den weltberühmten Galiläus darüber; dieſer ſo ſcharfſinnige Gelehrte ſagte ihm zwar etwas zu ſeiner Befriedigung, aber in Rukſicht auf die wirkende Urſach davon hegte er noch ſehr falſche Begriffe. Jezo weiß man es auch aus §. 165. daß der Druk der Luft das Waſſer nicht höher als 31′ bis 32′ Fuß hoch erhalten könne, oder daß eine Luftſeule, die bis an die äuſſerſte Atmosphäre hinausgeht, mit einer nur 32′ hohen Waſſerſeule im Gleichgewicht ſeyn könne. Weil das Experiment ſelbſt ſchwer zu machen iſt, ſo nimmt man ſtatt Waſſers das 14 mal ſchwerere Quekſilber, welches alſo nach der Verhältniß gegen dem Waſſer ungleich niedriger ſteht, wenn es das Gleichgewicht mit der Luftſeule haben ſoll. Ein Experiment, das alle Barometer-Männer mit leichter Mühe machen, und davon wir beſonders im folgenden bey den Luftmeſſern reden werden.

Die angenehme Eigenſchaften der Luft nebſt ihren Folgen, und zwar erſtlich die Akuſtik überhaupt.

§. 207. Anm. Man kann die bisher erzehlte Eigenſchaften der Luft zum theil erſchrökliche, im Gegenſatz gegen die angenehme, nennen; dann die Elaſticität der Luft z. E. iſt einer von den Hauptgründen der ganzen heutigen Kriegs- und Artilleriekunſt, vor welcher auch ein ſo unerſchrockener Cäſar, wie Voltaire

ſchreibt,

ſchreibt, ſich fürchten würde, wenn er die Folgen davon ſehen ſollte. Angenehme Eigenſchaften könnte man diejenige nennen, vermittelſt welcher wir überhaupt hören und beſonders die harmoniſche Töne empfinden kann; das Gehör überhaupt hat wenigſtens der groſſe Loke für ein ſo angenehmes Geſchenk GOttes gehalten, daß er, da er im Alter es verlohren, und den ihm beliebten Umgang mit guten Freunden deßwegen miſſen mußte, den Milton, der das Geſicht verlohren, aber das Gehör behalten, wie er ſelbſt ſich ausdrukt, beneidet hatte. Doch man mag dieſe Benennung auch weglaſſen, die Akuſtik und Muſik hat ihr Daſeyn der Luft zu danken, und gehört dahero billig in die Aerometrie. Uebrigens hat ſchon L. C. Sturm, und zwar unter allen dieſer zuerſt, die Akuſtik in Form einer Wiſſenſchaft beſonders vorgetragen.

§. 208. **Erkl.** Die Akuſtik handelt von dem Schall der Cörper; der Schall aber iſt eine zitternde gleichſam oſcillirende Bewegung der Luft, oder nur weniger Lufttheilen, die ſich als eine ſolche dem Ohr nähert; da hingegen der Wind eine Bewegung einer groſſen Luftmaſſe in gerader oder krummer Direction ohne Vibrationen iſt.

§. 209. **Zuſatz.** Daß die Luft zum Schall unumgänglich nöthig, erhellet daher, weil in einem luftleeren Raum eine Glocke, wenn ſie auch noch ſo ſtark geläutet würde, von keinem Menſchen gehöret werden kann; wie im folgenden von der Luftpumpe erwieſen wird.

§. 210. **Anm.** Die Alten haben hier abermal unrichtige Begriffe gehabt, oder vielmehr nichts gewußt. C. Schott ſagt: Sonus eſt qualitas orta ex corporum ſe collidentium virtute ſonativa. Das iſt, Eigenſchaft ſchallender Cörper, oder ſolcher, die mit einer Schall verurſachenden Kraft an einander ſtoſſen. Diß ſchreibt er in P. II. L. I. Magiæ Phonolog.

§. 211. **Erkl.** Man zehlet dreyerley Hauptgattungen des Schalles; der erſte entſteht durch die von harten elaſtiſchen Cörpern der Luft mitgetheilte zitternde Bewegung bey geſpannten Saiten, bey Glocken, Cymbeln, wohin auch alle Stimmen der

Menſchen und Thiere gehören; der zweyte entſteht durch eine gepreßte Luft, die nun wieder plözlich ſich ausbreitet, wie bey dem Donner, dem groben Geſchüz, u. ſ. w. der dritte durch plözliche Druckung und nach Belieben vergönnten bald grösseren bald kleineren Ausdehnung, wie in Pfeiffen und blaſenden Inſtrumenten.

§. 212. **Erfahr.** Nach Newtons Bemerkungen bewegt ſich der Schall in Zeit einer Secunde 1088 Londn. Schuh. Andere haben ihn anders gefunden, doch belauſt ſich die Verſchiedenheit nicht über 100 Schuh, wenn man ſie alle auf einerley Maas reducirt.

§. 213. Anm. Die Unterſuchung, ob die Strahlen des Schalles wie die Lichtſtrahlen in gerader Linie fortgepflanzt werden, gehört in die Naturlehre; Herr Prof. Euler hat das erſte aus ſehr wahrſcheinlichen Gründen behauptet.

§. 214. **Lehrſatz.** Aus dem gehörten Schall und geſehenen Licht kann man wiſſen, wie weit der entfernte Cörper, der zugleich leuchtet und ſchallet, von einem ſeye. z. E. Ein losgebranntes Stuk, oder ein Donnerwetter. Dann das Licht ſieht man, ſo bald es exiſtirt, in einer Weite auf dem Erdboden, wo die Zeit, die es braucht, den Weg zurük zu legen, unmerklich und für nichts zu achten, weil das Licht von der faſt unermeßlichen Weite der Sonne auf die Erde, wie wir hören werden, nur 8 Minuten Zeit braucht. Man theile die Zeit zwiſchen dem Anblik des Lichts und dem Hören des Schalls in Secunden ein; und zehle ſo viel Secunden als man kann, bis man den Schall hört; eine Secunde rechne man zu 1080', und multiplicire damit die Anzahl der Secunden, die man gemerkt, ſo hat man die Weite des ſchallenden Cörpers gefunden.

§. 215.

§. 215. Erkl. Ein Sprachrohr iſt ein Inſtrument, durch welches man den Schall verſtärket.

§. 216. Anm. Der erſte Erfinder der Sprachröhren iſt Sam. Morland, ein Engländer, geweſen, der es 1670 bekannt gemacht; dann was man von Alexanders Sprachrohr ſagt, mit welchem er ſeine Soldaten zuſammen gerufen, wird unrichtig ausgelegt; es war kein Sprachrohr, ſondern eine Trompete. Das Morlandiſche hat unten eine circulare Oefnung, und oben bey dem Mund eine enge; er hat damit 2550 engl. Fuß weit deutlich ſprechen können. Caſſegrain hat es hernach 1672 verbeſſern wollen, und die Geſtalt einer gleichſeitigen Hyperbel zwiſchen ihren Aſymptoten dazu erwählt; man hat aber die Wirkung nicht nach Wunſch gefunden. Nachgehends hat Herr Haſe zu Leipzig 1719 den Vorſchlag in einer Diſſert. gethan, man ſolle die elliptiſche Figur wählen, weil die Strahlen des Schalls hernach allein im gegenſeitigen Brennpunkt wieder vereiniget werden, nach dieſem ſolle man die Länge der Röhre paraboliſch machen, da die Strahlen alle in ziemlicher Dichtigkeit parallel ausgehen werden. Man kann aber mit den paraboliſchen allein, wie Graveſand ſchreibt, eben das leiſten. Ueberhaupt iſt die Theorie davon noch ſehr mangelhaft.

§. 217. Erklär. Ein Sprachgewölb iſt ein elliptiſches Gewölb, in deſſen einem Brennpunkt derjenige der redet, im andern der Hörer ſtehet.

§. 218. Zuſatz. Wenn der Redner auch nicht laut redet, ſo wird der Hörer im entgegengeſezten Brennpunkt doch ſtarke Töne hören, weil alle Radii des Schalls ſich reflectiren und dahin zuſammen ſtoſſen.

§. 219. Zuſatz. Wer im Mittelpunkt eines Cirkelgebäudes redet, hört ſich ſelbſt am ſtärkſten wieder; weil hier beede Brennpunkte im Mittelpunkt zuſammen ſtoſſen.

§. 220. Anm. Man könnte hieraus zeigen, wie ein Gebäude, darinn man viel reden muß, z. E. eine Kirche, bequem zu bauen, und wo die Canzel am beſten ſtehe.

§. 221. Anm. Die Lehre vom Wiederhall oder Echo könnte hier auch noch angebracht werden. Man hat aber noch mehr Grund in der Naturlehre davon zu handeln, weil die blos mathematiſche Beſtimmungen ſich nicht allein hier anwenden laſſen.

Die

Die Muſik, oder das Mathematiſche bey der Muſik.

§. 222. Anm. Um die Geſchichte der Aerometrie nicht allzu weitläuftig vorzutragen, haben wir etwas von der Geſchichte der Muſik beſonders hieher verſpart. Man ſchreibet die Entdekung der erſten Gründe davon insgemein dem Pythagoras zu. Dieſer berühmte Weltweiſe und Geometra dachte der Sache lange nach, woher es komme, daß den Menſchen gewiſſe Töne gefallen, andere aber nicht, und gieng einmal ungefähr vor einer Schmidte vorbey, in welcher fünf Schmiedknechte ihre Hämmer auf dem Ambos hören lieſſen; er empfand einen Wohlklang, und hörte die Quinte, Terz und Octav, wie wir dieſe Töne heutzutag heiſſen, untereinander ſpielen; eine einige Diſſonanz bemerkte er bey dem fünften Hammer; Er begab ſich deßwegen in die Werkſtatt hinein, und ließ jeden Knecht ſeinen Hammer mit des andern verwechſeln, weil er glaubte, der Uebelklang des fünften rühre von der Schwäche oder Stärke des hammernden Knechtes her; allein dem ungeachtet blieb die Diſſonanz; dahero fiel er auf die Gedanken, jeden Hammer wägen zu laſſen; die Gewichte der vier wohlklingenden waren 6, 8, 9 und 12 Pf. der fünfte hatte ein gegen die vorhergehende unproportionirliches Gewicht; dieſen lieſſe er dahero ganz weg; aus den Gewichtern ſchloß er bald die Gründe des Wohlklangs; dann der erſte 6pfündige verhielte ſich zum vierten 12pfündigen wie 1 : 2, und gab die Octav, (δια πασων) eben dieſer erſte verhielte ſich zum dritten 9pfündigen wie $6 : 9 = 2 : 3$, und gab die Quint (δια πεντε) und noch einmal der erſte verhielte ſich zum zweyten achtpfündigen, und der folgende zum zwölfpfündigen wie $6 : 8 = 9 : 12 = 3 : 4$, und gaben alſo beede die Quart (δια τεσσαρων zu dem Ende hat er nachgehends zu Haus vier Saiten von gleicher Länge und Dicke ausgeſpannt, und an die eine 6, an die andere 8, an die dritte 9, und an die vierte 12 Pf. Gewichte aufgehängt, worauf die Saiten ſo geſpannt waren, daß ſie eben den harmoniſchen Wohlklang gaben, den er in der Schmidte gehört hat. Dieſe Erzehlung kann man ausführlich in Herrn Bruckers Hiſt. Crit. Philos. T. I. p. 1057 finden. Pythagoras machte den Schluß, das Angenehme in der Muſik gründe ſich auf die kleine Verhältniſſe, die unſere Seele leicht und ohne viele Rechnung überſchauen könnte, wie z. E. 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4; und wurde darüber vom Ariſtoxenus, einem groſſen Muſikus ſelbiger Zeit, und von ſeinen Schülern ausgelacht, indem Ariſtoxenus behauptete, es komme daher, weil man es einmal ſo gewohnt ſeye. Al-

lein Pythagoras hat nun bey der Nachwelt längſtens über den Ariſtoxenus triumphirt, und kein vernünftiger Muſikus wird heutzutag die Grundmaximen des Pythagoras verachten. Die muſikaliſche Inſtrumenten der Alten zu erzehlen, wäre zu weitläuftig; wie dann das Tetrachordum ſehr alt, und von Mercurio ſchon ſoll gebraucht worden ſeyn. Auch ſind wir nicht geſonnen, die Muſik der Alten beſonders zu beſchreiben oder ihren Vorzug zu preiſen, wodurch ſich Meibom an dem Hof der Königin Chriſtina in Schweden ſo lächerlich gemacht, als er ein Concert nach dem Geſchmak der Alten aufführete, und ſelbſt der Director davon war. Hingegen war das nicht überflüßig, was wir von dem Pythagoras hier vorgetragen haben, von welchem wir bis auf unſere Zeiten nun zurükgehen, und unter den neuern nur den Herrn Prof. Euler nennen, der alles, was mathematiſch bey der Muſik nach unſerm Geſchmak vorkommt, ſo gründlich als ausführlich erläutert hat in ſeinem Tentam. novæ Theoriæ Muſices.

§. 223. **Erkl.** Die Unterſchiede oder Differenzen der Töne, z. E. eines zarten und ſtärkern, kann man **Intervalle** nennen. Wenn ein Ton noch einmal ſo ſtark iſt als der andere, ſo heißt das Intervallum eine **Octav**; diejenige Intervalle, die zwiſchen einerley Octav fallen, heißt man **einfache**, und diejenige, welche über eine Octav hinaus reichen, heißt man **zuſammengeſezte Intervalle**; (ſimplicia & compoſita intervalla).

§. 224. **Erfahr.** Das Ohr kann von einer Octav zur andern wenigſtens 43 verſchiedene Töne noch unterſcheiden. Wie ſolche Erfahrung zu Paris gemacht worden nach den Memoir. de l'Acad. de Paris 1700.

§. 225. **Lehrſatz.** Die Oſcillationen oder Vibrationen der Saiten verhalten ſich umgekehrt wie ihre Längen, wenn ſie einerley Dicke haben, und gleich ſtark geſtählet ſind.

Bew.

Nach §. 131. verhalten ſich die Oſcillationen eines Pen-

Penduls, wenn q die eigene Schwere des Penduls, p das unten angehängte Gewicht, und a die Länge des Penduls iſt, wie $\frac{\sqrt{p}}{aq}$; wo die Verhältniß des Cirkels zur Peripherie und die Länge eines Penduls das alle Secunden oſcillirt, für beſtändig angenommen wird. Folglich wenn zwey Saiten C und c heiſſen, ihre Gewichte P, p, ihre eigene Schwere Q, q, und ihre Länge A, a, ſo iſt

$C : c = \sqrt{\frac{P}{AQ}} : \sqrt{\frac{p}{aq}}$ aber nach der Vorausſetzung iſt $P = p$ einerley Spannung.

$C : c = \sqrt{\frac{1}{AQ}} : \sqrt{\frac{1}{aq}}$

Weil die Saiten ferner nach der Vorausſetzung einerley Dicke haben, ſo verhalten ſich ihre eigene Schweren Q, q, wie die Längen A, a, das iſt, eine, die noch einmal ſo lang iſt, wird noch einmal ſo ſchwer ſeyn, u. ſ. w. folglich kann man für Q, q ſetzen A, a. Alſo

$C : c = \sqrt{\frac{1}{AA}} : \sqrt{\frac{1}{aa}}$ das iſt, wirkl. extrahirt

$C : c = \frac{1}{A} : \frac{1}{a}$ das iſt

$C : c = a : A.$

das iſt, die Saiten verhalten ſich in dieſem Fall umgekehrt wie die Längen.

§. 226. **Willkührl. Satz.** In den Clavieren, Orgeln und dergleichen Inſtrumenten ſind heutzutag gemeiniglich von einer Octav zur andern 13 Töne bemerkt; welche nach §. 223 folgende Verhältniß haben, und nach willkührlicher Bemerkung vor die Buchſtaben des Alphabeths, wo man mit Gan-

fangt, und bis auf F zehlet, ſodann A, B, H noch hinzuſezt bis zur zweyten Octav, oder andern c bezeichnet werden.

Nahmen.	Verhältn. der Längen.	Nahmen.	Verhältniſſe.
C — —	384	G —	576
Cs oder Cis	400	Gs —	600
D — —	432	A —	640
Ds — —	450	B —	675
E — —	480	H —	720
F — —	512	c —	768
Fs — —	540	cs —	800

u, ſ. w. alle nach der vorhergehenden Octav duplirt.

§. 227. Zuſatz. Man kann aber wegen verſchiedenen zuſammengeſezten Tönen eine geſchiktere Tafel zur mathematiſchen Rechnung ausfindig machen, welche in ihren kleinſten Verhältniſſen, nach Herrn Eulers Theorie folgende iſt, und wovon ſich der Nutzen ſogleich zeigen wird.

Nahmen der Intervallen, nach den Ausdrücken der Alten.	Verhältniſſe
Diaſchisma : : :	2025 : 2048
Comma : : : :	80 : 81
Dieſis, Διεσις : : :	125 : 128
Hemitonium minus : :	24 : 25
Limma majus : : :	25 : 27
Tonus minor : : :	9 : 10
- - major : : :	8 : 9
Tertia minor ημιδιτονος : :	5 : 6
- - major διτονος : :	4 : 5
Quarta, δια τεσσαρων : :	3 : 4

Tri-

Tritonus, quarta major quinta minor, quinta falſa, haben folgende Verhältniſſe	18	:	25
	32	:	45
	45	:	64
	25	:	36
Quinta δια πεντε	2	:	3
Sexta minor	5	:	8
- - major	3	:	5
Septima minor	9	:	16
	5	:	9
Septima major	27	:	50
	8	:	15
	135	:	256
	25	:	48
Octava, δια πασων	1	:	2
Vnitonus	1	:	1

§. 228. Zuſatz. In dieſer Tabell ſind die übliche und gewöhnliche Intervalle ausgedrukt, es ſind aber auch noch verſchiedene darinnen, an die man nicht ſogleich denkt, und die doch bey der mathematiſchen Betrachtung der Muſik unentbehrlich ſind, z. E. das Diaſchisma, Comma, u. ſ. w. wie wir zeigen werden.

§. 229. Zuſatz. Auf dem Clavier hält man den Ausdruk Bf für eine reine Quint; nemlich das B in der einen Octav und das f in der andern; ſie iſt es aber nicht, ſondern vielmehr eine unreine und falſche Quint; denn ihre Verhältniß iſt zuſammengeſezt aus der reinen Quint und aus dem Diaſchismate. Das erhellt auf folgende Weiſe; nach §. 226. duplire man die Verhältniß oder die Zahl bey F = 512, ſo hat man in der andern Octav das f = 2. 512 = 1024; das B bleibt, und hat nach §. cit.

die Zahl 675; folglich iſt die Verhältniß B : f = 675 : 1024. Das iſt gewiß kein reiner Quint, oder der Verhältniß 2 : 3 nicht gleich. Wenn man aber 2 : 3 mit 2025 : 2048, das iſt, die reine Quint mit dem Diaſchisma §. 227. multiplicirt, ſo bekommt man 2 . 2025 : 3 . 2048 = 675 : 1024 die wahre Verhältniß für B : f; und ſo gibt es noch verſchiedene.

§ 230. Zuſatz. Man merkt übrigens, daß die obige Intervalle ein Diaſchisma, Comma, Dieſis, welche das Ohr faſt gar nicht unterſcheiden kann, in der Muſik nirgend wirklich und einzel vorkommen, ſondern nur wegen den mathematiſchen Berechnungen der Töne, wie wir ſchon gemeldt, zu Hülfe genommen werden.

§. 231. Grundſatz. Alle kleine Verhältniſſe, z. E. 1 : 2, 2 : 3, 3 : 4 u. ſ. w. ſind ſchön, und in der Muſik beſonders angenehm.

§. 232. Zuſatz. Dieſer Grundſatz läßt ſich beweiſen, und iſt nicht nur aus der Erfahrung, ſondern aus der Natur der menſchlichen endlichen Seele hergenommen, welcher das gefallen muß, was ſie bald einſieht und begreift, oder auf einmal überſchauen kann; wie deßwegen auch in der Baukunſt aus einerley Grund die kleine Verhältniſſe, die das Aug ſogleich überſchauet, die ſchönſte ſind, wie wir an ſeinem Ort zeigen werden.

§. 233 Anm. Es gibt verſchiedene Stufen des Schönen und Angenehmen in der Muſik, und dieſe Stufen laſſen ſich nach Claſſen berechnen, und der Grund ihrer Rechnung wird durch die Induction und allgemeine Erfahrung beſtätigt.

§. 234. Lehnſatz. Das Product zweyer kleinſten Zahlen, die eine Verhältniß gegeneinander haben,

ben, iſt das kleinſte Product, das ſich durch die gegebene Zahlen dividiren läßt; z. E. 32 : 45 iſt eine Verhältniß, die ſich nicht kleiner ausdrucken, oder ein Bruch, der ſich nicht durch eine dritte Zahl aufheben läßt; das Product dieſer zwo Zahlen 32.45 = 1440 iſt das kleinſte, das ſich durch 32, 45 dividiren läßt. Man kann es auch bey mehrern Zahlen nach Euclid L. VII. 36. erweiſen. Es ſeyen drey Zahlen ab, bc, cd; ſo iſt ihr Product abbccd; und der kleinſte Dividuus iſt abcd; weil er ſich durch ab, bc, cd dividiren läßt.

§. 235. Zuſatz. Ein ſolches Product läßt ſich in ſeine am meiſten einfache Factores nach §. 234. reſolviren; ſo iſt $1440 = 32 . 45 = 2.2.2.2.2.3.3\ 5 = 2^5 . 3^2 . 5$, dann $2^5 = 32$; $3^2 = 9$ und $5 = 5$, aber $5 . 9 = 45$.

§. 235. Lehrſatz. Die Grade der Annehmlichkeit der Töne in der Muſik werden beſtimmt, wenn man des kleinſten Products der in Verhältniß ſtehenden Zahlen (communis dividui minimi) einfache (maxime ſimplices) Factores ſucht, und von ihrer Summe die Anzahl der einzeln Factorum weniger eins ſubtrahirt: die Differenz iſt der Grad der Annehmlichkeit. Den Beweis hat Herr Prof. Euler durch Induction gegeben.

§. 237. Exemp. Man verlangt den Grad der Annehmlichkeit des Tritonus, welche die Verhältniß 32:45 hat, zu wiſſen: das Product iſt 1440; die einfache Factores 2.2.2.2.2.3 3 5 an der Zahl = 8, oder es ſind 8 einfache Factores; die Summe dieſer 8 Factorum iſt 21; von dieſer Summe ſubtrahirt man die Anzahl der Factorum 8 weniger eins, alſo $8 - 1 = 7$; ſo hat man $21 - 7 = 14$. Alſo hat der Tritonus den 14 Grad der Annehmlichkeit. Eben ſo hat die Octav den zweyten; denn die Verhältniß iſt 1 : 2; das Product 2; die zwey Diviſores 1 . 2 ihre Summe 3. davon die Anzahl der Diviſorum weniger eins, das iſt $2 - 1 = 1$, ſubtrahirt; gibt $3 - 1 = 2$. den zweyten Grad

der Schönheit, die doppelte Octav hat den dritten; die Quint den vierten Grad; dann bey ihr iſt die Verhältniß 2:3 das Product 6, dann 2 . 3 = 6. Die drey einfache Diviſores 1 . 2 . 3 ihre Summe 6, davon ſubtrahirt die Zahl der Diviſorum weniger eins, das iſt 3 — 1 = 2; folglich 6 — 2 = 4 der vierte Grad der Annehmlichkeit für die Quint. Diß ſtimmt nun alles mit der Erfahrung überein; und daraus darf man auf die Richtigkeit der Regel einen Schluß machen.

§. 238. Zuſatz. Eben ſo laſſen ſich die Grade der Schönheit beſtimmen bey aufeinander folgenden Tönen; z. E. wenn zwey Quinten aufeinander folgen, wo man die Töne vorher in Zahlen ausdrukt.

§. 239. Exemp. Auf dem Clavier haben die beede Quinten C, G und D, A auf einander folgend, den vierzehenden Grad der Schönheit. Die correſpondirende Zahlen ſind für C, G, A, D nach §. 226. folgende: 384, 432, 576, 640, oder ihre Verhältniß durch 16 dividirt, 24, 27, 36, 40 der kleinſte Dividuus $2^2 . 3^3 . 5$ oder 2 . 2 . 2 . 3 . 3 . 3 . 5, zuſammen ſieben Factores; ihre Summe iſt 20, davon 7 — 1 = 6 ſubſtituirt läßt 14; alſo haben zwo Quinten auf einander nur den 14ten Grad der Schönheit, eine allein aber den 4ten Grad. In der Muſik iſt es auch eine Regel, daß man nicht zwo Quinten unmittelbar aufeinander anbringen ſolle; dieſe blos auf das Gehör ſich gründende Regel iſt nun aus den Proportionsregeln hier erwieſen.

§. 240. Zuſatz. Wenn man die Verhältniß der zwölf Töne §. 226. zwiſchen C und c ſo klein ausdrukt als es möglich iſt, ſo wird man finden, daß ihre einfachſte Factores 2^6, 3^2, 5^1, oder 2 bis zur 6ten Dignität 3 zur zweyten, und fünf in der erſten Dignität ſeyen; aus deren Multiplication untereinander alle Verhältniſſe entſtehen.

§. 241. Anm. Diß iſt das Mathematiſche bey der Muſik; ſo viel in einem Auszug davon zu wiſſen nöthig iſt. Durch die bloſſe mathematiſche Betrachtung wird man aber nicht allemal die beſte in das Gehör fallende Muſik hervor bringen; hingegen wird auch die Compoſition eines Muſikverſtändigen ohne Mathematik nicht ſo gut als diejenige ſeyn, wo beede Wiſſenſchaften in dem Componiſten ſich vereinigen. Das ſagen wenigſtens die gröſte Kenner, die den Nahmen der Virtuoſen in der Muſik verdie-

dienen, daß durch die mathematiſche Einſicht die muſikaliſche Compoſitionen erſt ihre Vollkommenheit erreichen.

Die Luftpumpe, und die durch die Luftpumpe gemachte weitere Entdeckungen.

§. 242. Anm. Den erſten Erfinder der Luftpumpe haben wir genannt; was für Verbeſſerungen nach und nach hinzugekommen, iſt auch zum Theil gemeldet worden. Heutzutag hält man die ſtehende oder Vertikal-Cylinder für die beſte, und zieht ſie den ſchiefliegenden, wie die Leupoldiſche iſt, vor. J Smeaton hat Transact. Philos. Vol. 47 art. 69. neue Verbeſſerungen angegeben, welche Herr Prof. Käſtner beſchreibt T. II. Anfangsgr. der Mathem. p. 120 folg. weil aber die Leupoldiſche in Deutſchland die bekannteſte iſt, ſo wollen wir nur von dieſer Nachricht geben.

§. 243. Erklär. Die Luftpumpe *Fig.* 31. beſteht aus einem metallenen Cylinder und genau hineinpaſſenden Stempel, der um eine eiſerne Stange AI beveſtiget iſt, durch welche der Stempel aus- und eingezogen wird vermittelſt der Zähne an der Stange, in welche ein Rad eingreift, nach den Gründen des Räderwerks §. 73. An dem untern Theil des Cylinders B befindet ſich eine kleine Röhre, die mit dem Cylinder bey B zuſammenhangt, und unter einem rechten Winkel bey C gebogen oben mit dem Teller DF, auf welchem die Glocke EF ſtehet, folglich mit der Luft unter der Glocke Communication hat. Von der kleinen Röhre iſt bey L ein Hahn LH angebracht, welcher auf zweyerley Weiſe durchbohret iſt, einmal, daß ein Weg durch ihn von der Glocke in den Cylinder, und von dieſem in jene gehe, hernach daß ein Weg vom Cylinder durch ihn in die freye Luft bey H nicht aber wieder in die Röhre ge-

he. Stellt man nun den Hahnen ſo, daß der erſte Weg offen bleibt, ſo wird die Luft unter der Glocke, wenn man den Stempel auswarts zieht, in den Cylinder tretten, das iſt, kraft ihrer Elaſticität ſich ausbreiten; das iſt, die Luft in EL wird nun den ganzen Raum ELK einnehmen: richtet man aber nachgehends den Hahn ſo, daß die Communication mit LE aufhöret, ſo wird, wenn der Stempel hineingetrieben wird, die Luft in dem Raum LK durch H in die freye Luft hinaus gejagt werden. Dieſes hin und her Bewegen des Stempels geſchiehet nur ſo lang, bis unter der Glocke die Luft um ein merkliches verdünnt wird; und dieſe verdünnte Luft heißt insgemein das Boyleiſche, oder vielmehr das Guerikiſche Leere (Vacuum), indeme Guerike, wie ſchon gemeldt, der erſte Erfinder dieſer Maſchinen war.

§. 244. **Lehrſatz.** Die Verdünnung der Luft unter der Glocke nach einer gegebenen Zahl Auspumpungen, z. E. nach zehen Zügen hin und her, läßt ſich durch Rechnung beſtimmen; wobey man vorausſezt, daß ſich die Luft durch den ganzen Cylinder bey jeder Auspumpung gleichförmig ausbreite.

Bew. *Fig.* 31.

Die Luft im Raum FL unter der Glocke und Röhre, bis zum Hahnen HL hin, iſt, ehe man pumpet, mit der äuſſern Luft einerley; man heiſſe ſie die erſte Luft, und ſetze die erſte Luft im Raum EL = f. Die Luft, die nach einer gewiſſen Anzahl Auspumpungen ſich durch den ganzen Raum ELK ausbreitet = p. Die Luft, die in dem Raum EL nach der Verdünnung zurük bleibt = r; den Raum von EL = a,

den

den Raum LK = b; ſo iſt der ganze Raum ELK = a + b, und die Proportion, bey einförmiger Ausbreitung der Luft, folgende

$$a + b : a = p : r, \text{ folglich } r = \frac{ap}{a+b}$$

Kürze halber ſetze man den Ausdruk $\frac{a}{a+b} = c$, ſo iſt

bey der erſten Auspumpung $r = cp$
$p = f$ folgl. ſubſt.

aber in dieſem erſten Fall $r = cf.$

nr. II. In der zweyten Auspumpung wird ſich die zurükgebliebene Luft in der Glocke, nemlich r, die wir cf gefunden haben, wenn der Stempel herausgezogen wird, in den Cylinder ausbreiten, und wie vorher die erſte Luft den ganzen Raum ELK einnehmen, folglich die Luft p dem Raum und der Ausdehnung nach werden. Alſo wird $r = p$
aber nr. I. $r = cf$

folglich wird $p = cf.$

Nun ſuche man wieder die zurükgebliebene Luft r, wie nr. I. ſo iſt

$a + b : a = p : r$ aber
$p = cf$

$a + b : a = cf : r$ folgl. $r = \frac{a}{a+b} . cf$
aber nr. I. $\frac{a}{a+b} = c$ alſo ſubſtituirt

hier $r = c^2 f.$

nr. III. Bey der dritten Auspumpung wird wie nr. II. $p = c^2 f$, und nach vollkommen ähnlicher Proportion $r = c^3 f$. Bey der vierten wird $r = c^4 f$ u. ſ. f. da ſich das Geſez der Reyhe ſchon entdekt; es

es iſt alſo nr. IV. nach n Auspumpungen die unter der Glocke verdünnte übriggebliebene Luft

$r = c^n f.$ Nun calculire man, so iſt

$$\frac{r}{f} = c^n$$

aber $c = \frac{a}{a+b}$

$$\frac{r}{f} = \left(\frac{a}{a+b}\right)^n$$ und umgekehrt

$$\frac{f}{r} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^n$$ und logarithmiſch ausgedrukt

$$l\frac{f}{r} = n\,l\left(\frac{a+b}{a}\right)$$

§. 245. Anm. Wenn der Raum unter der Glocke bis E, dem Raum von E bis in den Cylinder, ſo weit der Stempel herausgezogen wird, gleich, alſo $a = b$, folglich $a + b = 2a$; $n = 10$, oder zehen Züge des Stempels hin und her; ſo iſt $l\left(\frac{f}{r}\right) = 10 . l. 2 = l. 1024$. Alſo die Luft nach zehen Zügen 1024 mal dünner geworden.

§. 246. Anm. Mit der Luftpumpe werden verſchiedene Experimente gemacht, welche die Elaſticität und Schwere der Luft erläutern, auch weiter bewieſen, wie zum Schalle die Luft das vornehmſte beytrage; u. ſ. w. wir werden ſolche Experimente am Beſchluß des Werks in der Experimentalphiloſophie anführen.

Vom Druk der Atmosphäre auf die Erde, und von dem Torricelliſchen Vacuo.

§. 247. Erfahr. Eine Waſſerſäule 32 Fuß hoch iſt mit der Luft, ſo hoch ſie über die Erde ſtehet, im Gleichgewicht. Das Experiment iſt koſtbar und

ſchwer zu machen; dahero man ein leichteres dafür mit Queckſilber ſubſtituirt.

§. 248. Lehrſatz. Eine 28 Zoll hohe Röhre mit Queckſilber gefüllt, ſteht im Gleichgewicht mit einer 32′ hohen Waſſerſäule, und hält aus gleichem Grunde der Luft das Gleichgewicht.

Bew.

Das Queckſilber iſt 14 mal ſchwerer als Waſſer. Alſo wird es durch den Druk der Luft 14 mal niedriger gehalten; man muß alſo 32′ durch 14 dividiren, damit man die Queckſilberſäule bekommt; man verwandle zu dem Ende die Schuhe in Zoll, Rheinländ. Maas, ſo iſt

$$\frac{32 \cdot 12''}{14} = \text{Quckſilberſäule}$$

$$: 2$$

$$\frac{32 \cdot 6''}{7} = \text{Queckſilberſäule.}$$

Das iſt, wenn man wirkl. multipl. und dividirt

$$\begin{array}{r|l} 53 & \\ 192 & 27\tfrac{3}{7}''. \\ 77 & \end{array}$$

Alſo hält eine Queckſilberſäule $27\frac{3}{7}$ oder ungefähr 28″ hoch nach Rheinl. Maas der Luftſäule das Gleichgewicht, und wirkt ſo ſtark als die 32′ hohe Waſſerſäule.

§. 249. Zuſatz. Wenn ein Cubicfuß Waſſer 70 ℔. wiegt, ſo wird 32 . 70 = 2240 ℔. dem Drucke gleich ſeyn, den die Luft auf einen Quadratfuß ausübet.

§. 250. Zuſatz. Weil die Luft unter der Fläche eben ſo ſtark über ſich drukt, nach §. 204. ſo ſcheint es, als ob ſie gar nicht gedrukt würde.

§. 251. Zuſatz. Daher kommt es, daß der menſchliche Cörper, unerachtet er von oben und den

Sei-

Seiten her ringsherum mit einer Kraft über 20000 ℔. gepreßt wird, es nicht empfindet, weil die innere Luft in uns eben ſo ſtark entgegen drükt; würde aber dieſe innere Luft hinweggenommen, ſo würde der Druk empfindlich genug werden.

§. 252. Zuſatz. Die Urſache, daß die Gloke bey Auspumpung nicht von der äuſſern Luft verdrukt wird, hängt von der kugelförmigen Geſtalt ab, welche wie ein Gewölb ſich ſelbſt erhält; da im Gegentheil ein flacher Boden ſogleich bey dem erſten Zug zerſpringen würde.

§. 253. Zuſatz. Wenn man die Oberfläche der Erde nach geom. Gründen berechnet, ſo kann man den Druk finden, den die Luft auf die ganze Erde ausübet.

§. 254. Erklär. Das Torricelliſche Leere (Vacuum Torricellianum) iſt derjenige von Luft leere Raum, der in einer mit Quekſilber gefüllten Röhre, wenn man ſie umkehrt, oben wo ſie zugeſchloſſen iſt, übrig bleibt.

§. 255. Zuſatz. Das Torricelliſche Leere iſt alſo reiner als das Guerikiſche und Boyleiſche, weil in jenem alle Luft hinweg kommt, in dieſem aber immer noch etwas zurük bleibt, man mag ſo oft pumpen als man will. §. 245.

§. 256. Anm. Die Benennung rühret von Evangeliſta Torricellius, einem Schüler des Galiläus, her; welcher zuerſt den Verſuch §. 248. angeſtellt hat.

§. 257. Anm. Wenn man ein genau beſtimmtes Geſez wüßte, nach welchem die Luft zuſammengedrukt wird, ob ſie nemlich nach Verhältniß der druckenden Kraft, oder nach einer andern Verhältniß zuſammen gepreßt werde, und einen kleinern Raum einnehme, ſo würde man die Höhe der Atmoſphäre oder des ganzen Luftkraiſes beſtimmen können. Dieſes Geſez aber iſt noch nicht entdekt. Mariotte, Boyle und andere haben durch

Hülfe

Hülfe des Queckſilbers, Verſuche, aber nur mit ſchwachen Zuſammendruckungen, weil keine ſehr ſtarke uns möglich ſind, angeſtellt, und gefunden, daß die Zuſammendruckungen ſich verhalten wie die druckende Kräfte, wenn ſie $1\frac{1}{2}$, 2, 4 mal ſo groß als der Druk der Atmoſphäre ſind. Aber dieſe Verſuche laſſen ſich nicht auf die ganze Atmoſphäre anwenden, wo man den Einfluß der Wärme und Kälte, wie Dan. Bernoulli anmerkt, ferner das noch unbekannte Geſez der Dichtigkeit der Luft, nach d'Alemberts Erinnerungen, u. ſ. w. in Betracht zu ziehen hat. Inzwiſchen kann man doch gewiß ſagen, daß die Atmoſphäre höher als 32.800′ ſeyn müſſe, weil ein Cubicfuß Luft nach Wolfens Experiment nur 585 Gran Apotheker Gewicht wieget, welches man durch ein einen Cubicfuß halten es hohles Gefäß erfahren kann, das man ſo viel möglich von Luft, vermittelſt eines Hahnes, auspumpet, hernach wieget, die Differenz des Gewichts vor und nach der Auspumpung wird das Gewicht des Cubicfuſſes Luft ſeyn; das vergleicht man mit einem Cubicfuß Waſſer; und ſagt, wenn die Anzahl der Cubicſchube Luft = x iſt, weil ein Cubicſchuh Waſſer 70 Pf. wiegt, 32 . 70 Pf. = x . 585 Gran; verwandelt man die Pfunde nun in Gran, und dividirt das Product durch 585 Gran, ſo hat man x, und daraus die Höhe der Luftſäule; die aber noch weit höher ſeyn muß, weil die obere Luft immer dünner als die untere wird.

Die Luftmeſſer, oder das Barometer, Thermometer, Hygrometer und Manometer, auch Anemometer oder Windmeſſer.

§. 258. Erklär. Durch eine Torricelliſche Röhre, die unten offen in ein Gefäß mit Queckſilber geſtellt wird, oder deren unterer offene Theil gebogen, und über ſich ſtehet, daß das Queckſilber nicht herauslauft, entſteht ein Barometer, das iſt, ein Inſtrument, wodurch der Druk der Luft oder der Atmoſphäre angezeigt wird. Herr von Wolf wollte daher das Barometer lieber ein Baroſcopium nennen.

§. 259. Erfahr. Das Quekſilber ſteht in einerley Barometer an einem und eben demſelben Ort, zu verſchiedenen Zeiten bald höher bald niedriger; folglich muß die Schwere der Luft veränderlich ſeyn.

§. 260. Zuſatz. Wenn die Schwere der Luft nicht veränderlich wäre, ſo würde das Barometer unterwarts geöfnet frey hangen können, ohne daß das mindeſte Quekſilber verſchüttet würde; weil aber die Schwere ſich ändert, ſo muß man die Röhre entweder beugen, oder ſie, wie gemeldet, in ein Gefäſſe mit Quekſilber ſtellen.

§. 261. Zuſatz. Je gröſſer der Diameter dieſes Gefäſſes iſt, oder je gröſſer die Oberfläche iſt, deſto merklicher wird man die Veränderung der Schwere ſpüren.

§. 262. Anm. Z. E. Wenn das Gefäß 50 mal weiter als die Röhre, und das Quekſilber ſinkt 1 Zoll; ſo trägt die Atmosphäre $1, \frac{50}{51}$, das iſt nun nach der Decimalrechnung 1″02 weniger als vorhin. Von der Verfertigung guter Barometer in Rukſicht auf das bereits gemeldte, haben die gröſten Kenner, F. E. Bilſinger, Hollmann, Rühmann Nachricht gegeben.

§. 263. Zuſatz. Um einen veſten Punkt zu beſtimmen, wo die Veränderungen hinauf- oder hinabwärts anfangen, muß man vieljährige Beobachtungen anſtellen, die gröſte und kleinſte Höhe bemerken, und die mittlere dazwiſchen zum Beſtimmungspunkt machen. Herr Prof. Krafft fand zu Petersburg die gröſte Barometerhöhe 30″95 und die kleinſte 28″18 Londner Maas, 12″ auf einen Fuß gerechnet; alſo iſt die mittlere Höhe zu Petersburg 29″565; und die gröſte Veränderung 2″77 nach Decimalbrüchen. Man ſiehet hieraus, daß die

die gekaufte Barometer, ohne vorhergängige Beobachtungen, dieſer Art wenig nutzen.

§. 264. Zuſatz. Weil die Luftſäule auf hohen Bergen um ſo viel abgekürzt wird, als die Höhe des Berges betrift, ſo drükt ſie in der Höhe weniger, folglich ſtehen die Barometer auf hohen Bergen niedriger als in tiefen Thälern. So hat Fenillee auf der Spitze des Pic von Teneriffa gegen die untere Ebene des Meeres eine Verſchiedenheit von 10″ bemerkt.

§. 265. Zuſatz. Eben ſo wird das Barometer ſteigen, je tiefer man in Bergwerken unter die Erde kommt.

§. 266. Zuſatz. Folglich dient das Barometer auch, die verſchiedene Höhen der Berge und Gegenden zu beſtimmen, wenn man die Beobachtungen richtig anſtellt; wiewohl es immer an Genauigkeit fehlen wird, weil das Geſez der Dichtigkeit der Luft noch unbekannt iſt.

§. 267. Erklär. Das Thermometer iſt eine gläſerne Röhre, an welcher unten eine kleine Kugel, die mit gefärbtem Waſſer, oder Weingeiſt, oder auch Queckſilber gefüllt iſt; da dann dieſe flüßige Materie bey warmem Wetter in der Röhre ſteigen, und bey kaltem fallen wird; es zeigt alſo die Veränderung der Kälte und Wärme der Luft an; weil nach der gemeinſten Erfahrung flüßige Weſen von der Wärme ausgedehnt, und von der Kälte dichter gemacht werden; nur muß man die Luft aus der Röhre ſo viel möglich hinwegbringen, und ſie hernach zuſchmelzen, damit das flüßige Weſen deſto ungehinderter ſteigen kann.

§. 268. Anm. Das Drebbeliſche Thermometer von ſeinem Erfinder Drebbelius iſt das älteſte, aber auch das unrichtigſte. Nach dieſem iſt das Florentiniſche und das Queckſilber-Thermometer das gewöhnlichſte; jenes iſt mit gefärbtem Weingeiſt, dieſes mit Queckſilber gefüllt, ſo weit es nöthig iſt; das Queckſilber-Thermometer heißt das Fahrenheitiſche, Reaumüriſche, de l'Isliſche u. ſ. w. je nachdem es nach Fahrenheits, Reaumürs, de l'Isle und anderer Manieren eingerichtet iſt. Woraus man zugleich ſiehet, daß wie mit dem Barometer, alſo auch mit dem Thermometer die gröſte Kenner ſich beſchäftiget haben. Inzwiſchen verdienen ſie den Nahmen Thermometer mit eben ſo wenig Recht als die Barometer; dann ſie zeigen nur die Veränderung, nicht aber den Grad der Wärme an, das iſt, ob die Luft zwey, drey, viermal wärmer ſey, als ſie zu einer andern Zeit war; wie diejenige, die ihre Thermometer ohne Kenntniß kaufen, ſich einbilden.

§. 269. Erklär. Das Hygrometer (*Fig.* 32.) iſt ein Inſtrument, durch welches die Trockenheit und Feuchtigkeit der Luft angezeigt wird; die ſchon gemeldte Figur iſt die ſimpelſte die man davon geben kann. Sie beſteht nemlich aus einer Schnur, an deren Ende ein Gewicht hängt, mit einem Zeiger, welcher ſich auf eine beygeſezte Scalam bezieht; damit die Schnur halte, wird ſie mit ihrem andern Ende an einem Nagel beveſtiget, und weil ſie lang ſeyn muß, damit die Veränderung der Luft deſto merklicher ſich zeige, ſo wird ſie um Rollen herumgewunden, wie die angezeigte Figur weiſet.

§. 270. Zuſatz. Damit die Veränderung merklich werde, ſo nimmt man lieber Schafdärme als hänfene Schnüre, weil jene mehr als dieſe aus- und eingehen.

§. 271. Anm. Herr von Wolf hat in ſeinen lat. Elementis verſchiedene andere Methoden erzehlt und in Kupfer ſtechen laſſen; die angeführte aber iſt die leichteſte, die ein jeder nachmachen kann. Herr Prof. Knuzen zu Königsberg hat eine künſtliche Beſchreibung davon in das Hamb. Magaz. IV. B. mit dem dazu gehörigen Kupferſtich einrücken laſſen; die Maſchine iſt ein allgemeines Wetterglas, und enthält ein Barometer, Thermo-

mometer, Hygrometer und Manometer. Uebrigens hat der ehemalige Herr Hofprediger in Zeiz, Gottfried Zinn, eines der ſinnreichſten Hygrometer in den Actis Erudit. a. 1687. angegeben.

§. 272. Erklär. Das Manometer iſt ein Inſtrument, die Dichtigkeit der Luft, die wir athmen, ſo viel möglich zu meſſen. Es beſteht nach *Fig.* 33. aus einem Wagbalken, an deſſen einem Ende eine von Luft ausgepumte Kugel, am andern ein gleich ſchweres Gewicht hängt; in dem Zünglein der Waage bringt man oberhalb einen Quadranten oder nur Septanten an, an welchem die Grade durch die Bewegung des Züngleins abgeſchnitten werden; denn je nachdem die Luft dünner oder dichter iſt, wird die Kugel nach den Gründen der Hydroſtatik ſinken oder ſteigen, und alſo aus ihrem Gleichgewicht kommen.

§. 273. Anm. Inzwiſchen muß man auch von dieſen wie von den vorher beſchriebenen es ſagen, daß ſie die Endigung, die ſie haben, nicht verdienen, und keine richtige Maaße in Vergleichung mit dem Zuſtand der Luft zu andern Zeiten ſeyen; auch iſt beſonders, wie wir angemerkt, von dem Manometer zu wiſſen, daß es nur auf unſre untere Luft, in der wir athmen, ſich erſtrecke; deren Dichtigkeit es einigermaſſen anzeigt; dann zu Beſtimmung eines Geſetzes der abnehmenden oder ſich verändernden Dichtigkeit der Luft iſt es, ſo wie man es bisher zu machen gewohnt war, nicht wohl brauchbar. Varignon iſt zuerſt auf die bezeichnete Art eines Manometers verfallen, welches hernach Wolf verbeſſert, und wie ſchon gemeldt, in ſeinen Elementen beſchrieben hat.

§. 274. Erklär. Das Anemometer iſt ein Inſtrument, die ſtärkere Bewegung der Luft, das iſt, den Wind zu meſſen; es ſiehet faſt wie eine Windmühle aus; nur daß an der Axe ein Quadrant mit einem Zeiger angebracht wird, welcher die Grade des Windes beſtimmen ſolle.

§. 275. Anm. Herr von Wolf hat dieſes Inſtrument angegeben, und in ſei nen lat. Elementen nebſt dem daſelbſt befindlichen Kupferſtich davon, beſchrieben. Es iſt aber weniger brauch-

bar als die bisher genannte; dahero wir die Zeichnung davon übergehen könnten. Wenigſtens iſt es in der Ausübung von demjenigen Nutzen nicht, den man verhofte; dahero es auch eher in Kupferſtiche als in wirklichem Holz und Metall zu ſehen iſt.

§. 276. Anm. Man hat noch verſchiedene Erfindungen je und je gemacht, z. E. weil die Metalle ſich von der Wärme ausdehnen, ſo iſt man auch auf metallene Thermometer verfallen, wo kleine Veränderungen durch Räderwerke ſehr empfindlich gemacht werden; die Engländer haben ſie beſonders zu vieler Vollkommenheit zu bringen geſucht. Man verfertigt ſie auch in Oberſachſen zu Reinharz; ihr Nutzen iſt bey geometriſchen und aſtronomiſchen Inſtrumenten, die bekannter maſſen insgemein von Metall ſind, auch bey Uhrwerken, nicht gering. Doch diß alles gehört mehr in die Naturlehre als in die angewandte Mathematik; dahero wir das weitere der ſchon gemeldten Wiſſenſchaft überlaſſen dörfen.

Vier-

Viertes Hauptſtük, Von der Hydraulik.

§. 277.

Erklärung.

Die Hydraulik iſt nach der Bedeutung des Nahmens eine Wiſſenſchaft von der Bewegung des Waſſers. Will man davon einen gründlichen und vollſtändigen Unterricht haben, ſo muß man die Schwere, den Fall, die Geſchwindigkeit der flüßigen Cörper, nach allen Directionen berechnen, und alſo auſſer den ſtatiſchen Wiſſenſchaften noch die höhere Mechanik wiſſen; man iſt aber in den gewöhnlichen Anfangsgründen der angewandten Mathematik bisher nur bey der Statik geblieben, dahero wir die Hydraulik nur ſo weit abhandlen werden, als man in Schriften dieſer Gattung es verlanget.

Die Geſchichte der Hydraulik.

§. 278. Wie man dem Archimedes in der Hydroſtatik vieles zu verdanken hat, ſo darf man ihn auch in der Geſchichte der Hydraulik unter den erſten nennen. Die Archimedeiſche Waſſerſchnecke oder Waſſerſchraube iſt bekannt genug; Vitruvius be-

behauptet, Archimedes ſey ihr Erfinder. L. X. Perrault aber will in ſeinem Comment. über den Vitruv ihre Erfindung weiter zurükſetzen, weil diß Inſtrument vor dem Archimedes bekannt geweſen seyn müßte, wenn man in der Bewegung des Waſſers das gethan hat, was die Geſchichte lehret.

§. 279. Nach dem Archimedes iſt unter den Alten Heron von Alexandrien berühmt, von welchem wir den ſogenannten Heronsball und den Heronsbrunnen, und andere hydrauliſche Spielwerke noch jezo in Experimental-Collegien zu ſehen bekommen. Heron hat von der Hydraulik was ſchriftliches, unter dem Titel Libri ſpiritalium, hinterlaſſen, worinnen er die Inſtrumente anzeigt, durch welche das Waſſer wider ſeine Natur zum Steigen gebracht werde.

§. 280. Wenn ich die wichtige und koſtbare Kunſt der Waſſerleitungen, worinnen die Carthaginenſer und Römer ſo groſſe Meiſter waren, unerachtet ich ſonſt keinen groſſen Mathematiker unter den Römern weiß, in Rukſicht auf die alte Zeiten, ausnehme, ſo hat man in der Hydraulik nichts beſonders gewußt, bis im vorigen Jahrhundert der ſchon genannte Mariotte in ſeinen Traitè du Mouvement des eaux dieſe Wiſſenſchaft zu einer gröſſeren Vollkommenheit gebracht.

§. 281. Man erfande im vorigen Jahrhundert und zu Anfang des gegenwärtigen auch allerhand künſtliche Heber, z. E. auſſer dem Stechheber, den Wolfiſchen anatomiſchen Heber, der das Mariottiſche Experiment im kleinen vorſtellt, ferner den Wirtembergiſchen oder Stuttgartiſchen Heber, da von

von wir im folgenden handeln u. ſ. w. doch ſind dieſe Erfindungen wie Spielſachen zu nennen, gegen die Theorie, die man im gegenwärtigen Jahrhundert zu immer weiterer Vollkommenheit zu bringen ſucht.

§. 282. Hieher gehören nun unter den theoretiſchen Schriften der Neuern Herrn Dan. Bernoulli Hydrodynamica; Joh. Bernoulli Hydraulica Op. T. IV. Herr d'Alembert de l'Equilibre & du mouvement des fluides; und beſonders Herrn Prof. Eulers unter eben dieſem Titel in den Mem. de l'Acad. Roi. de Pruſſe 1755. worinnen die wichtigſte Rechnungen aus der höhern Geometrie auf die Hydraulik angewandt, zugleich aber von dieſen groſſen Kennern gezeigt wird, daß die Theorie der Hydraulik ihre Vollkommenheit noch nicht ganz erreichet habe.

Die Bewegung des Waſſers durch Pumpen, Drukwerk und andere Maſchinen.

§. 283. Erkl. Man hat verſchiedene Maſchinen, das Waſſer in die Höhe zu bringen, dahin gehören die Paternoſterwerke, welches lederne in kleinen Diſtanzen von einander abſtehende ausgefüllte Eyformige Kugeln ſind, welche durch eine enge Röhre, wo ſie genau anpaſſen, das Waſſer von der Tiefe in die Höhe treiben; wenn ſie durch einen Haſpel getrieben werden. Ihre Benennung haben ſie von der Geſtalt, weil ſie wie im kleinen die Kugeln in einem Paternoſter ausſehen. Die Schöpfwerke ſind in gewiſſer Diſtanz von einander abſtehende Schöpf-

eymer, welche durch Ziehen um den Haſpel das Waſſer aus der Tiefe empor heben. In den Wolfiſchen Anfangsgründen ſind ſie in Kupfer geſtochen; man kann ſich aber ohne Riß einen Begriff davon machen, und ſie in der Natur bey allen Schöpfbrunnen ſehen.

§. 284 Anm. Diejenige Maſchinen, wo die mathematiſche Kenntniß ſich mehr zeiget, ſind die Pumpen, wenn das Waſſer durch Pumpen in die Höhe getrieben wird; von dieſen wollen wir etwas ſagen. Man muß aber vorher wiſſen, was Klappen und Ventile ſeyen.

§. 285. Erkl. Eine Klappe für das Waſſer iſt z. E. ein dichter abgekürzter Kegel, der in eine Höhlung paſſet, und unten einen Quernagel hat, wie *Fig.* 34. ſezt man ihn mit ſeiner Höhlung ins Waſſer, ſo wird das Waſſer von unten ihn über ſich heben, und durch die Höhlung durchdringen; der Quernagel hindert, daß er nicht vom Waſſer umgekehrt wird, iſt nun das Waſſer eingedrungen, ſo wird es, vermöge ſeiner Schwere, abwärts drücken, und zugleich den Kegel in ſeine alte Richtung bringen; folglich wird das Waſſer oben bleiben, und die Oefnung wird ſich wieder ſchlieſſen.

§. 286. Zuſatz. Dieſe Methode iſt die beſte und dauerhafteſte für Klappen oder Ventile; man hat auch blecherne, welche an der Röhre unten wie ein angehängter Deckel bey einer Kanne, aber einwärts, können geöfnet werden; wenn nun das Waſſer eindringen will, ſo öfnen ſie ſich, und ſchlieſſen ſich nachgehends wieder durch den Druk des hineingedrungenen Waſſers.

§. 287. Erklärung. Ein Pumpbrunnen, der *Fig.* 35. *a* vorgeſtellt wird, iſt eine hohle im

Waſ-

Waſſer ſtehende Röhre, welche unten wo ſie im Waſſer ſteht, eine ſolche Klappe hat; eine andere iſt an einem Hauptſtok beveſtiget, die man durch Pumpen in die Höhe hebt und niederläßt; durch das Niederlaſſen wird das Waſſer in die Höhlung der Klappen dringen, und durch das empor heben des Pumpſtoks zugleich empor gehoben werden, bis es in der bequemen Oefnung der Röhre durch die kleinere Horizontalröhre zum Gebrauch nach geſchehenem Pumpen herauslauft; wie die *Fig.* 35. ohne weiteres, deutlich davon den Augenſchein gibt.

§. 288. Zuſatz. Man begreift von ſelbſt, daß man mit einem Pumpſtok, wo viel Waſſer vorhanden iſt, zugleich zwey Brunnenröhren in den Lauf bringen könne.

§. 289. Erkl. Ein Drukwerk iſt nach *Fig.* 35. *β*. eine Maſchine von zwo hohlen Röhren, die man Stiefel nennt, am Boden mit Klappen verſehen; jede hat einen Stempel, (Kolben) deren Kolbenſtangen oben durch einen gleicharmigen Hebel verbunden werden, daß wenn der eine Stempel niedergedrukt wird, der andere über ſich geht. Vom Boden jeden Stiefels geht eine kleine Röhre in den mitten ſtehenden Cylinder, durch welche das Waſſer in den Cylinder getrieben wird; wo ſie in den Cylinder gehen, bringt man Klappen an; die obere Oefnung des Cylinders iſt eine Röhre, die auch wegen den oft nöthigen Beugungen, ein lederner Schlauch ſeyn kann, daraus das Waſſer ſprizt.

§. 290. Zuſatz. Wenn alſo der eine Stiefel ſich füllt, wo der Kolben in die Höhe gehet, ſo wird der andere, wo der Kolben, kraft des Hebels,

zu gleicher Zeit niedergedrukt wird, ſich leeren und Waſſer ſpritzen; daß alſo das Spritzen beſtändig wechſelsweiſe fortgeſetzet wird.

Die Bewegung des Waſſers durch Luft, und die verſchiedene Gattungen der Heber, beſonders auch der Wirtembergiſche.

§. 291. **Erkl.** Ein Heber oder Sipho iſt eine Röhre, worinnen das Waſſer vermittelſt des Druks von der Luft in die Höhe getrieben wird.

§. 292. Zuſatz. Weil der Druk der Luft das Waſſer nicht höher als 32′ treibet, ſo kann kein Heber dieſer Art über 32′ hoch ſeyn.

§. 293. Lehrſatz. Wenn eine gebogene Röhre *Fig.* 36. mit ihrem kurzen Schenkel im Waſſer ſteht, an der andern aber die Luft durch Saugen hinweggeſchaft wird, ſo wird das Waſſer hineintretten, und auf der andern Seite auslaufen, und der Druk von C nach E wird der Höhe GD gleich ſeyn.

Bew.

Das Waſſerbarometer oder die 32′ hohe Waſſerſäule, die der Luft das Gleichgewicht hält, ſeye $= a$; ſo wird nach hydroſtatiſchen Gründen der Druk von

C nach E $= CD - a$, der Druk von
C nach A $= CF - GF - a$
$\quad - \quad + \quad +$ ſubtrah.

Diff. des Druks $= CD - CF + GF$ d. i. in der Fig.
$= DF + GF = GD$.

§. 294. Zuſatz. Wenn alſo $GD = 0$, ſo hört der Heber auf zu flieſſen; nicht aber, wenn $GD = GF$

= GF wird, oder wenn die Oefnung des andern Schenkels in H, oder wenn der Schenkel CH $\leqq$ CA wäre; wie einige vorzeiten ſich einbildeten; übrigens iſt es dennoch gut, wenn der Schenkel CE länger iſt als CA.

§. 295. Zuſatz. Der Beweis §. 293. kann auch folgendermaſſen gegeben werden. Die Luftſäule heiſſe wie vorhin a, ſie wird alſo auf das Waſſer gegen die Röhre CA nach der Oefnung A mit der Gewalt a — CF; und gegen die Oefnung E mit der Gewalt a — CD drucken; da nun *Fig.* 36. a — CD < a — CF, ſo muß das Waſſer bey E herausflieſſen, ſo lang die Oefnung A im Waſſer ſteht; dann bey dem Druk der Luftſäule kommt es bey einerley Grundfläche blos auf die Höhe an, nach hydroſt. Gründen.

§. 296. Erkl. Der Stechheber iſt eine unten etwas engere Röhre als oben, die man in die flüßige Materie, z. E. Wein, Bier, Waſſer perpendicular tauchet, hernach die obere Oefnung verſchließt, und ſodann das flüßige Weſen trägt, wohin man will, ohne daß was verſchüttet werde. Der Grund davon ſteht in der Aerom.

§. 297. Erkl. Der Wirtembergiſche Heber iſt ein Heber von zwey gleichen Schenkeln, die aber zweyfach eingebogen ſind, wie *Fig.* 37. ausweißt; der ſich ohne Pumpe füllt, auch auſſer dem Gebrauch nicht fortlauft; dann wenn man den Heber *Fig.* 37. bey dem einen Ende in ein Faß ſtekt, und nach und nach immer umkehrt, ſo wird er ſich ſo füllen, daß in B die flüßige Materie auslauft, und je nachdem man den Heber wendet, wieder zu laufen aufhört.

§. 298. Anmerk. Dieſe Erfindung wird einem Bürger in Stuttgart, Nahmens Jordan, zugeſchrieben, welcher aber anfänglich ſie geheim gehalten. Doch wurde das Geheimniß entdekt, und Papin in England beſchrieb einen ſolchen Sipho oder Heber, wie dieſer geheim gehaltene, in den Transact. Anglic. 1685 ehe noch Salom. Reiſel, Herzogl. Leibarzt, auf Herzoglichen Befehl die Beſchreibung des Stuttgartiſchen Hebers bekannt machte. Die Reiſeliſche Beſchreibung kam 1690 heraus, und hat den Titel: Sipho Wirtembergicus per majora experimenta firmatus. Er hat von ihm auch den Nahmen Sipho Reiſelianus; des Erfinders Nahme iſt vergeſſen; wenigſtens iſt er nicht unter dem Nahmen des Jordaniſchen Hebers bekannt.

§. 299. Erkl. Hieher gehören auch die ſogenannte Vexierbecher, die nie auslaufen, als wenn ſie voll ſind; dann *Fig.* 38. ſeye in dem Gefäß oder Durchſchnitt des Bechers mitten die oben und unten offene Röhre DE; dieſe Röhre ſey mit einer andern Röhre FGH bedekt; und dieſe leztere gebogene Röhre ſeye nirgend offen, als in H; wenn man nun Waſſer hineingießt, ſo wird die Luft durch ED ausgetrieben, und das Waſſer wird im Gefäß auſſen und innerhalb der Röhre FGH gleich hoch ſtehen; wird er aber über E hinaus angefüllt, ſo wird es durch ED auslaufen, bis der Kelch leer iſt, weil die äuſſere Luft auf die Fläche des Waſſers dringt, und ſolche durch die Röhre HGF ſteigen und ſodann durch DE auslaufen macht; welches nicht geſchieht, wenn der Becher nicht ganz voll iſt.

§. 300. Erkl. Der anatomiſche Heber läßt ſich aus der *Fig.* 30. nach hydroſtatiſchen Gründen des Mariottiſchen Experiments im Kleinen einigermaſſen erkennen. Man ſpannt auf die Oberfläche von dem blechenen Cylinder DE Blaſen, Häute der Thiere u. ſ. w. auf, füllet die kleine Röhre mit Waſ-

ſer

ſer, daß die Häute ausgedehnt, und ihre Beſtandtheile deſtomehr ſichtbar werden. Der Freyherr von Wolf hat 1709. die erſte Probe damit angeſtellt, und das Inſtrument hernach in ſeinen Elementen wie auch in ſeinen nüzlichen Verſuchen T. III beſchrieben.

Die Springbrunnen und Waſſerſpritzen.

§. 301. Erfahr. Nach den Experimenten, die Mariotte von der Bewegung des Waſſers gemacht, findet man, daß, wenn das Waſſer wieder ſo hoch ſpringen oder ſteigen ſolle, als es gefallen iſt, wegen dem Wiederſtand der Luft und ſeiner eigenen Schwere folgende Verhältniß ſtatt finde:

Höhe des ſteigenden Waſſers	Höhe des ſtehenden Waſſers	
5′	5′	1″
10	10	4
20	20	16
50	50	100
80	80	256
90	90	324
100	100	400.

Alſo ein Steigen oder Springen 100 Schuh hoch, erfordert die Höhe eines ſtehenden Waſſers von 100′ 400″, das iſt, 133 Schuh und 4 Zoll.

§. 302. Zuſatz. Wenn man die Menge des Waſſers Q, die Oefnung woraus es ſteigt, F, die Zeit oder Währung T, die Höhe des ſtehenden Waſſers A nennt, ſo wird die Menge deſto gröſſer ſeyn, je gröſſer die Oefnung, je länger die Zeit,

und

und je ſchneller die Geſchwindigkeit iſt; die Geſchwindigkeit eines fallenden Cörpers aber, wenn A die Höhe iſt, iſt $\sqrt{A}$ nach §. 127. folglich iſt $Q = TF\sqrt{A}$. und $\frac{T = Q}{T\sqrt{A}}$.

§. 303. Zuſatz. Wenn einerley Oefnung, folglich auch zu gleicher Zeit einerley Menge Waſſers ausſprizt, ſo iſt $Q = T\sqrt{A}$. Man ſetze $Q = 1$ oder einen Cylinder einen Fuß lang, ſo iſt $1 = T\sqrt{A}$ und $T = \frac{1}{\sqrt{A}}$.

§. 304. Zuſatz. Bey dem ſpringenden Waſſer muß man auch auf die Friction ſehen; die nach der Verhältniß der innern Fläche der Röhre, darinn das Waſſer umfließt, ſich mehret oder mindert; ſind nun die Röhren von gleicher Länge, ſo verhalten ſich die Frictionen wie die Peripherien, und dieſe wie die Diameter; ferner die Mengen des hervorſchieſſenden Waſſers ſind wie die Cirkelflächen, und dieſe wie die Quadrate der Diam. §. 577. I. Th. folglich wann die Friction in zwey gleich langen Röhren f, F, und das herausſchieſſende Waſſer q : Q; ſo iſt

$f : F = d : D.$ wo d, D die Diam. bedeuten

$q : Q = d^2 : D^2$ alſo

$\frac{f}{q} : \frac{F}{Q} = \frac{d}{d^2} : \frac{D}{D^2}$ das iſt

$= \frac{1}{d} : \frac{1}{D}$ oder umgekehrt, multiplicirt durch d und D.

$\frac{f}{q} : \frac{F}{Q} = D : d.$ Das iſt, je kleiner die Oefnung iſt, deſto gröſſer iſt die Friction.

§. 305.

§. 305. Anm. Dieſe Lehren muß man vorausſetzen, wenn man von den Springbrunnen und ähnlichen Maſchinen etwas nicht blos handwerksmäßig verſtehen will; es kommt auf den Fall des Waſſers, auf die Oefnung der Röhre, und beſonders wegen der Friction auf die Geſtalt dabey an; wie dann deßwegen die coniſche oder kegelförmige, oben ſich zuſpitzende die allerungeſchikteſte Röhren zu Springbrunnen ſind, unerachtet ſie die gemeinſte ſind.

§. 306. Erkl. Springbrunnen ſind Waſſerbehältniſſe, worinnen das Waſſer vermittelſt engern Röhren in freyer Luft in die Höhe ſpringen kann.

§. 307. Zuſatz. Sie werden zum Springen gebracht durch den Fall insgemein, welches aus §. 301. leicht erhellet, durch die Heber §. 291. durch die zuſammengedrukte Luft nach §. 204. und auch durch die erwärmte und ausgedehnte oder zum Theil ausgepumpte Luft nach §. 203.

§. 308. Zuſatz. Um eine angenehme Veränderung zu machen, kann man dem Waſſer allerhand Farben geben, ferner verſchiedene Oefnungen machen, daß es in Geſtalten von allerhand Figuren u. ſ. w. ſpringt.

§. 309. Zuſatz. Weil gemeiniglich bey den Springbrunnen mehr auf ein kurzes Vergnügen geſehen wird, ſo hat man die mathematiſche Schärfe dabey nicht ſo nöthig.

§. 310. Zuſatz. Die verſchiedene Gattungen von Springbrunnen gehören in die Experimentalphiloſophie, davon wir am Beſchluß reden; ſie ſind unter den Alten der Heronsbrunn, der Heronsball, der Diabetes; unter den Neuern iſt beſonders Comiers Springbrunnen zu nennen, der nicht naß macht, indeme er innerhalb einer Glocke ſpringt, und alſo zur Luſt auf den Tafeln groſſer Herren kann aufgeſtellt werden.

§. 311.

§. 311. Erkl. Waſſerſpritzen ſind Inſtrumente, wodurch man eine flüßige Materie auch mit Gewalt, wenn es nöthig iſt, wie eine Kugel an einen entfernten Ort treiben kann; die nüzlichſte ſind die Feuerſpritzen; womit die von dem Vitruv L. X. ſo hoch gerühmte inſtrumenta Cteſibiana übereinkommen. Sie ſind mit einem Saug- und Drukwerk verſehen, welches doppelt iſt, damit ſowohl wenn man mit dem Kolben ſtoſſet, als wenn man neues Waſſer ſauget, Waſſer ſpritzet; wodurch ſie ſich von den jedermann bekannten Handſpritzen unterſcheiden. Auch dieſe Inſtrumente ſind ſo bekannt, daß eine Zeichnung davon überflüßig wäre, da man ſie aller Orten weit beſſer ſelbſt, als in einem perſpectiviſchen Riß ſehen und ihre Structur ſich bekannt machen kann. Der Grund der Feuerſpritzen iſt §. 289. vorgetragen, und die 35 *Fig. β.* enthält das weſentlichſte, das zur Zeichnung davon gehört.

§. 312. Anm. Wir haben hier nur das nöthigſte von der Hydraulik geſagt; und glauben doch mehr, wie in dieſer alſo auch in den vorhergehenden Wiſſenſchaften auf eine überzeugende Weiſe geſagt zu haben, als man in vielen andern mathematiſchen Handbüchern dieſer Art finden wird. Dahero wir jezo, ohne was wichtiges übergangen zu haben, die optiſche Wiſſenſchaften abhandeln dörfen.

Die

Die
optiſche
Wiſſenſchaften,
oder
die Optik, Catoptrik, Dioptrik und Perſpectiv.

Erſtes Hauptſtük,
Von der Optik beſonders.

§. 313.
Erklärung.

Man rechnet zu der Optik insgemein vier Wiſſenſchaften: dann man kann die Sachen entweder in gerader Linie ſehen, wann nemlich von dem leuchtenden Punkt ein Strahl in gerader Linie in unſer Auge fällt; oder man kann ſie durch reflectirte Linien ſehen, wann eine polirte Fläche die Strahlen unter dem nemlichen Winkel wieder zurük wirft, unter welchem ſie einfallen; oder man kann die Sachen durch gebrochene Linien ſehen, wann die Strahlen aus einer dünnern in eine dichtere Materie oder umgekehrt fallen, da dann der Strahl im erſten Fall gegen den Perpendicul, im zweyten aber von dem Perpendicul weggebrochen wird; oder man kann endlich auch die Sachen in einer gewiſſen Entfernung ſehen, wie ſie uns erſcheinen nach dem Geſichtspunkt, den wir annehmen, und hernach ſelbige unter dieſem Geſichtspunkt abzeichnen, zu welcher Zeichnung die Geometrie und die Optik unumgänglich nöthig iſt.

 §. 314.

§. 314. Nach dieſen vier Beſtimmungen gibt es alſo vier optiſche Wiſſenſchaften, nemlich die Optik im beſondern Verſtand; zweytens die Catoptrik, die von den Spiegeln handelt, oder vom Sehen unter reflectirten Winkeln, und von der Kraft der Strahlen, die reflectirt werden; drittens die Dioptrik, welche die Lehre vom Sehen unter gebrochenen Strahlen erkläret; viertens die Perſpectiv, welche die Gegenſtände, ſo wie ſie unter einem gewiſſen Geſichtspunkte erſcheinen, ſchiklich zeichnen lehrt.

§. 315. Wir reden von der Optik überhaupt, in ſofern ſie alle vier Scientien unter ſich begreift: was aber die Optik insbeſondere betrift, ſo iſt ſie eine Wiſſenſchaft, in ſofern man etwas nach Strahlen, die in gerader Linie von dem leuchtenden Cörper ausgehen, zu ſehen pflegt; und dieſe macht das erſte Hauptſtük aus.

Die Geſchichte der Optik beſonders.

§. 316. Die Optik, in ſoferne ſie den erſten Theil der optiſchen Wiſſenſchaften ausmacht, iſt ſchon von den alten Mathematikverſtändigen, z. E. vom Euclides und hernach vom Ptolemäus, der den Euclides weiter erläuterte, nach den Umſtänden ſelbiger Zeiten, das iſt, mit keiner ſo groſſen Genauigkeit und Richtigkeit, wie z. E. die Euclideiſche Geometrie, vorgetragen worden. Allein dieſe Schriften ſind verlohren. In ſpätern Zeiten haben Alhazen und Vitellio optiſche Werke geſchrieben; aus welchen in Honorati Fabri Synopſi optica ein guter Auszug gemacht worden iſt. Auch hat Keppler in

Rukſicht auf die Aſtronomie ſich um die Optik verdient gemacht in Paralipomenis ad Vitellionem.

§. 317. Doch muß man allen dieſen Bemühungen die Newtoniſche Arbeit vorziehen, der in ſeiner Theoria lucis & colorum den Grund zu derjenigen vollſtändigen Optik gelegt hat, die man in unſern Tagen wiſſen und lernen kann. Man hat ſich allerhand Begriffe vom Licht ſowohl als von den Farben gemacht; Ariſtoteles hielt es unter den Alten für was accidentelles; Epicur für eine Subſtanz; unter den Neuern war Carteſius mehr für den Ariſtoteles, indeme er das Licht durch die Bewegung des Aethers erklärte; Newton behauptete wirkliche Ausflüſſe des Lichts. Dem ſey wie nun wolle, ſo hat man die Theilung der Lichtſtrahlen mit andern daraus gezogenen Folgen, dem Newton, als dem Erfinder davon, zu danken. Auch hat man in neuern Zeiten durch einen Dänen, Nahmens Römer, zuerſt den Unterricht bekommen, daß das Licht nach und nach ſich fortpflanze, welche Entdeckung er aus Betrachtung der Jupiterstrabanten und ihrer Finſterniſſe gemacht; woraus ſich nachgehends der Schluß gab, daß das Licht von der Sonne auf die Erde zu kommen wenigſtens 8 Minuten Zeit gebrauche. Aus dieſer Entdeckung ſchloß hernach Bradley in Rukſicht auf die Fixſterne weiter, und hob eine den Aſtronomen unauflößlich geſchienene Schwürigkeit ſo glüklich, als man nur immer wünſchen konnte, wie wir im folgenden in den aſtronomiſchen Wiſſenſchaften zeigen werden.

§. 318. Unter den neueſten und vorzüglich brauchbaren Schriften über die Optik iſt noch Rob.

Smiths, eines Engländers, Lehrbegriff der Optik mit den Anmerkungen Herrn Prof. Kästners den Leſern zu empfehlen.

Die Ausbreitung der Stärke des Lichts in verſchiedenen Entfernungen.

§. 319. Lehrſatz. Das Licht, das von einem leuchtenden Cörper ausgeht, nimmt in ſeiner Stärke ab, wie die Quadrate der Diſtanzen zunehmen, das heißt: Ein Lichtkrayß, der näher iſt, verhält ſich zu einem entfernteren Lichtkrayß umgekehrt, wie die Quadrate der Diſtanzen oder Radiorum.

Beweis.

Man beſchreibe *Fig.* 39. einen halben Cirkel, und mache darein einige concentriſche Krayſe, in dem Mittelpunkt C denke man ſich einen leuchtenden Cörper, von dem das Licht in die ganze Peripherie ausflieſſe, ſo iſt klar, daß es in dem nähern concentriſchen Crayß heller ſeyn müſſe, als in dem entferntern, folglich daß das Licht abnehme, je gröſſer die Diſtanz werde; man ſieht alſo, daß die Abnahme des Lichts in den Lichtkrayſen nach Verhältniß der Diſtanzen wachſe, folglich die Helle ſelbſten in einer umgekehrten Ordnung der Diſtanzen ſich verhalte; wie nun dieſe umgekehrte Ordnung beſchaffen ſeye, wird ſich leicht beweiſen laſſen.

Man nenne *Fig.* 39. den kleinern Cirkel cdefgh = c, den gröſſern CDEFGH = C, den kleinen Radium = r, und den groſſen Radium = R, ſo wird nach denen Gründen der Geometrie ſeyn:

$$C : c = R^2 : r^2$$

ferner

ferner nach optiſchen Gründen:

$$C:c = \text{lumen in } c : \text{lum. in } C,$$ foliglich

$$\text{lumen in } c : \text{lum. in } C = R^2 : r^2$$

das iſt umgekehrt wie die Quadrate der Diſtanzien.

§. 320. Anm. Dieſer Lehrſatz heiſſet lateiniſch alſo: Denſitates luminis ſunt in ratione inverſa quadratorum diſtantiarum.

§. 321. Anm. Eben dieſer Lehrſatz kann auf eine andere Art noch bewieſen werden. Man beſchreibe *Fig.* 40. eine gleichſeitige Pyramide CDEF, in der Mitte mache man einen Durchſchnitt def, und gedenke ſich einen leuchtenden Cörper in C, ſo werden die Strahlen, die von C ausflieſſen, zuerſt auf def fallen, und hernach auf DEF, es fallen aber nicht mehr Strahlen auf DEF als auf def, nur ſind die Punkte auf DEF mehr von einander entfernt als auf def, folglich iſt in Anſehung der Menge der Lichtſtrahlen DEF = def, hingegen in Anſehung der Gröſſe ſelbſt zeigt ſich eine ziemliche Verſchiedenheit; es muß alſo um ſo viel dunkler auf DEF ſeyn als auf def, um ſo viel weiter DEF von C entfernet iſt als def. Die Gröſſe dieſer Dunkelheit kann man nun beſtimmen, wann man ein gleiches Dreyeck auf dem groſſen DEF mit def abſchneidet, ſo daß Def = def, die Menge des Lichts auf Def = λ, die auf DEF = L; ſo iſt

$$def : DEF = cd^2 : CD^2$$ nach geom. Gründen

$$def = Def$$

$$Def : DEF = cd^2 : CD^2$$ aber

$$Def : DEF = \lambda : L.$$

$$\lambda : L = cd^2 : CD^2$$

$$L = \text{Lum. in } def = \text{Lum. in } DEF$$

folglich verhält ſich das ausgebreitete Licht umgekehrt wie die Quadrate der Diſtanzen vom leuchtenden Punkt.

§. 322. Anm. Man ſetzt hiebey voraus, daß das Licht weder durch die Luft noch durch eine andere Materie an ſeiner Ausbreitung gehindert werde; und unter dieſer Bedingung kann man auch ein leichtes Experiment im Kleinen machen: Wenn man bey einem Licht ein Blatt in einem Buch deutlich leſen kann, und geht noch einmal ſo weit hinweg, ſo wird man zu gleich deutlichem Leſen nicht zwey ſondern vier Lichter gebrauchen; geht man dreymal ſo weit hinweg, ſo wird man neun Lichter nöthig haben; wenn die Helle bey dieſen verſchiedenen Diſtanzen einerley ſeyn ſolle.

Betrachtung des Schattens, beſonders wenn eine dunkle Kugel von einer hellen erleuchtet wird.

§. 323. Lehrſatz. Wann *Fig.* 41. die Länge eines Cörpers ST gegeben iſt, und der Winkel, den der Strahl LV mit dem Horizont macht, ſo kann man die Länge des Schattens finden.

Beweis.

Tang. V : r = ST : TV.

§. 324. Lehrſatz. Man kann dieſes auf die Sonne und die Erde oder den Mond leicht anwenden, wenn man folgende Figur ſich bekannt macht, (*Fig.* 42.) in welcher man den groſſen Cirkel HCF vor die Sonne, den kleinern GDM vor die Erde annimmt. Man ziehe hernach die Tangente CDE, welche beede Cirkel in C und D berührt, ſo werden die Radii AC und BD auf die Tangente perpendicular fallen. Man ziehe ferner die Linie NB parallel mit CD, ſo hat man 2 ähnliche Triangel ANB und ACE. Nun nenne man den Radium der Sonne AF = AC = p, den Radium der Erde GB = BD = q, und die Diſtanz der Sonne von der Erde AB = a, ſo wird ſeyn

I. Satz. $\sin. ABN = \frac{(p-q)r}{a}$

Beweis.

Es ſeye AF = p
GB = q
AB = a ſo iſt

AB : AN = r : ſin. ABN oder in Buchſtaben
a : AC − CN = r : ſin. ABN das iſt, weil

AC

$AC = p, \; CN = BD = q$

$a : p - q = r : \left(\frac{p-q}{a}\right) r = \text{ſin. } ABN.$

II. Satz. $CAF = 90° - ABN.$

Beweis.

$CAF = 180° - ABD$, dann

$C + A + GBD + D = 360°$

$C + D = 180°$

$A + GBD = 180°$

$GBD = GBD$ ſubtr.

$A = 180° - GBD$

$GBD = NBD + ABN$

$A = 180° - NBD - ABN$

$NBD = 90°$

$A = 180° - 90° - ABN$ das iſt

$A = 90° - ABN.$

III. Satz. $AE = \frac{pa}{p-q}.$

Beweis.

$AN : AB = AC : AE$

$p - q : a = p : \frac{pa}{p-q}$

IV. Satz. BE, oder die Axe des Erdſchattens $= \frac{aq}{p-q}.$

Beweis.

$BE = AE - AB = \frac{pa}{p-q} - a$ aber unter einerl. Benennung

$\frac{pa}{p-q} - a = \frac{pa - a(p-q)}{p-q} = \frac{aq}{p-q}$

§. 325. Anm. Dem zufolge wollen wir jezo ein Exempel von der Sonne und der Erde nehmen. Der halbe Diameter der Son-

Sonne verhält ſich zum halben Diameter der Erde beynahe wie 100 : 1, alſo iſt $p = 100$, $q = 1$, die Diſtanz der Erde von der Sonne, nemlich $AB = 22000$, folglich $a = 22000$. Da nun $\frac{r.p - q}{a} = \sin. ABN$, ſo iſt logarithmiſch: $l.r + l.(p - q) - l.a = l.\sin. ABN = 7.6532125$, welchem in den Tabellen ein Bogen von 15 Minuten correſpondirt, alſo iſt $ABN = 15'$, und der von der Sonnen beſchienene Theil $GD = 90° + 15'$, ferner der beſcheinende Theil der Sonnen CA iſt $90° - 15' = 9° + 45'$ Eben ſo iſt die Linie BE oder die Länge des Erdſchattens vom Mittelpunkt der Erde an gerechnet $= \frac{aq}{p-q} = \frac{22000}{100-1} = \frac{22000}{99}$ $= 222 + \frac{22}{99}$.

Kurze Beſchreibung des Auges.

§. 326. Anm. Die Lehre von dem Aug gehöret eigentlich in die Dioptrik: weil aber Hr v. Wolf hier ſchon davon handelt, ſo wollen wir, was zum Sehen nöthig iſt, kürzlich anführen.

§. 327. Anm. Die beſte Scribenten ſind nach Zahns oculo artific. Winslow im 4ten Buch ſeiner Anatomie p. 202. und Herr Prof. Zinn zu Göttingen in deſcriptione anatomica oculi humani.

§. 328. Erklär. Der Augapfel (Bulbus oculi) beſtehet aus veſten Theilen, nemlich aus Häuten (tunicis) und flüßigen, die man humores nennet. Die Häute ſind an der Zahl drey: 1. Sclerotica, oder die harte Haut, deren vorderſter Theil cornea heißt. 2. Die aderichte Haut (choroidea) an welcher zu innerſt im Aug die nezförmige Haut (retina) iſt. 3. Die adnata oder gemeinſchaftliche Haut des Auges, welche an die albugineam, davon das Weiſſe im Aug herkommt, angewachſen iſt. Die flüßige Theile oder Feuchtigkeiten ſind 1. die wäſſerigte, welche bey neugebohrnen Kindern noch nicht ſtatt finden ſolle, und erſt 8 bis 14 Tag hernach ſich zeiget, auch beſtändig verändert wird; lat. humor aqueus. 2. Die cryſtallene; humor cryſtallinus. 3. Die glasartige; humor vitreus.

§. 329.

§. 329. Zuſatz. Es kommen hier verſchiedene Fragen vor. Erſtlich: Woher es komme, daß wir die Sachen aufrecht ſehen, da ſie doch im Aug verkehrt abgemahlt werden? Die beſte Antwort iſt, wenn man ſagt, die Seele ſeye nicht der Zuſchauer in der camera obſcura des Auges, dann ſie ſieht das Bild auf dem nezförmigen Häutlein nicht wieder mit andern Augen, wie der Zuſchauer in der camera obſcura. Zweytens fragt man: Woher es komme, daß man einerley Sache mit zwey Augen nicht doppelt ſehe? Die Antwort iſt, weil eine jede Empfindung in einem wie im andern Auge einerley iſt, folglich in der Seele nur einerley Vorſtellung verurſacht. So bald die Empfindung verſchieden wird, wenn man z. E. die Augen verdrehet, ſo ſieht man auch doppelt.

§. 330. Dieſes vorausgeſezt, wollen wir einige Lehrſätze anführen.

Betrachtung der Erſcheinungen entfernter Cörper nach ihrer Gröſſe und Bewegung.

§. 331. Lehrſatz. Alles dasjenige, was unter einerley Winkel dem Auge erſcheinet, das erſcheinet ihm gleich groß.

Beweis.

Der Winkel, unter welchem ein Gegenſtand geſehen wird, heißt der Sehwinkel (angulus opticus,) und die Gröſſe, welche unter dieſem Winkel erſcheinet, heiſſet die ſcheinbare Gröſſe; (magnitudo apparens) je gröſſer nun der Winkel iſt, deſto gröſſer

iſt

iſt die ſcheinbare Gröſſe, und je kleiner der Winkel iſt, deſto kleiner iſt die ſcheinbare Gröſſe.

§. 332. Lehrſatz. Die Tangenten der ſcheinbaren Gröſſen ſind in ratione compoſita magnitudinum directa, & diſtantiarum inverſa, oder in ſolcher Verhältniß, welche aus der ordentlichen Verhältniß der wahren Gröſſen und der verkehrten Verhältniß der Entfernungen zuſammengeſezt iſt.

Beweis. *Fig.* 43.

I. $\triangle NMQ \backsim OPQ$ alſo

$$MQ : NM = r : T.Q$$

$$\frac{NM.r}{MQ} = T.Q$$

II. $$OQ : OP = r : T.Q$$

$$\frac{OP.r}{OQ} = T.Q \quad \text{alſo}$$

$$\frac{NM.r}{MQ} = \frac{OP.r}{OQ} \quad \text{folglich}$$

$\frac{NM}{MQ}$ und $\frac{OP}{OQ}$ die Tangenten; man heiſſe ſie T und t;

ſo iſt $T : t = \frac{NM}{MQ} : \frac{OP}{OQ}$ oder nach arithm. Gr.

$$T : t = NM.OQ : MQ.OP.$$

§. 333. Lehrſatz. Die Sehne eines Krayſes erſcheinet allen Augen gleich groß, die in der übrigen Peripherie ſich befinden, oder wann ein Amphitheater gebaut werden ſolle, wie es die Alten wohl wußten, ſo werden alle Zuſchauer gleichviel ſehen, wann das Amphitheater ein Cirkel, und die Chorde AB eine Scene iſt.

Bew.

Beweis. *Fig.* 44.

ADB = AEB = AFB = AGB. nach geom. Gr. aber ADB, AEB, AFB, AGB als anguli optici oder Sehewinkel ſind alle einander gleich, dahero AB allen Zuſchauern gleich groß vorkommt.

§. 334. Lehrſatz. Wann *Fig.* 45. zween Cörper E und B durch einerley Raum, mit einerley Geſchwindigkeit, folglich zu gleicher Zeit ſich bewegen, ſo verhalten ſich die Tangenten des Sehewinkels umgekehrt wie ihre Entfernungen (Tangentes anguli optici ſunt in ratione inverſa diſtantiarum.) Bew. *Fig.* 45.

Es ſey der Tangens von EOG = T, und von BOC = t, ſo iſt

$$\frac{EG}{EO} : \frac{BC}{BO} = T : t.$$

$$EG = BC$$

$$\frac{BC}{EO} : \frac{BC}{BO} = T : t$$

$$\overline{\qquad\qquad} : BC$$

$$\frac{1}{EO} : \frac{1}{BO} = T : t.$$

$$\overline{\qquad\qquad} . EO$$

$$1 : \frac{EO}{BO} = T : t$$

$$\overline{\qquad\qquad} . BO$$

$$BO : EO = T : t.$$

§. 335. Lehrſatz. Wann ſich das Aug des Zuſchauers gegen einerley Gegend ſchneller bewegt, als der Cörper ſelbſt, ſo kommt es dem Auge vor, als ob der Cörper, der doch vorwarts geht, zurük gienge.

Bew.

Bew. *Fig.* 45. *β.*

Das Aug ſey Anfangs in O, der Cörper in V, ſo ſieht man ihn in S; das Aug bewege ſich bis P, der Cörper bis u, ſo ſieht man ihn in Q nach der Linie PQ; alſo ſcheint es, der Cörper ſey indeſſen von S nach Q zurükgegangen, da er doch ſich wirklich vorwarts von O nach P beweget hat.

§. 336. Lehrſatz. Eben ſo ſcheinet es, daß ein Cörper in Vergleichung mit einem andern langſamer gehe, der doch in der That ſich fortbewegt.

Bew. *Fig.* 45. *β.*

Das Aug ſey in O, der erſte Cörper Anfangs in V, der andere in T, ſo ſieht man beede in S. Der Cörper V bewege ſich aus V in u, und der Cörper T aus T in t; ſo wird es ſcheinen, als ob V ſich aus S bis N, T aber nur aus S bis M beweget hätte.

§. 337. Anm. Dieſe Lehrſätze hat man in der Aſtronomie nöthig, wo von dem Stillſtand, Zurükgehen, langſamern und ſchnellern Bewegung der Planeten die Rede iſt.

Die Farben.

§. 338. Erklär. Wann Sonnenſtrahlen durch eine Oefnung, die etwa den dritten Theil eines Zolls im Durchmeſſer hat, in ein verfinſtertes Zimmer fallen, und von einem dreyeckigten gläſernen Priſma *Fig.* 46. unter einem rechten Winkel gebrochen werden, ſo zeigt ſich an der Wand hinter dem Priſma ein farbichtes Bild, in welchem 7 Farben in folgender Ordnung ſtehen: 1. Roth. 2. Orange. 3. Gelb. 4. Grün. 5. Blau. 6. Indig. 7. Violet; folglich beſteht ein jeder Sonnenſtrahl aus ſieben einfachen Farben, welche zuſammen genommen einen einigen weiſſen Strahl ausmachen.

§. 339. Erfahr. Wann man die einfache Farbenſtrahlen aufs neue durch ein Priſma brechen will, ſo bleiben ſie unverändert; roth bleibt roth, grün bleibt grün u. ſ. w. folglich kann die bisherige Kunſt dieſe Strahlen nicht mehr zertheilen; man kann ſie alſo inzwiſchen als die einfache Theile des Strahls anſehen, welche wieder einen weiſſen Strahl geben, wann man ſie durch ein Brennglas wieder vereinigt. Dieſe Entdeckung haben wir dem Newton zu danken, welcher in ſeiner Optik ausführlich davon gehandelt. Algarotti hat die ganze Theorie, ſo viel ſichs thun ließ, auf eine angenehme und faßliche Art vorgetragen; ſein Buch iſt auch ins Deutſche überſezt. Uebrigens gehört von Rechtswegen dieſe Lehre in die Dioptrik, weil der Grund davon die Brechung der Strahlen iſt; dahero der Freyh. von Wolf auch dißfalls etwas zu bald vorgetragen hat, was er nicht ſo bald vortragen ſollte.

§. 340. Zuſatz. Man kann aus dem geſagten begreifen, wie die Farben der Cörper entſtehen; nemlich die ſchwarze Farbe, wann der Cörper alle Strahlen durchläßt, und keinen einigen reflectirt; die weiſſe Farb, wann alle 7 Strahlen reflectirt werden, und der Cörper keinen einigen durchläßt; dahero weiß und ſchwarz die Grenzen der Farben ſind, und einander entgegengeſezt werden.

§. 341. Zuſatz. Die rothe Farb entſteht, wenn alle Strahlen auſſer dem rothen Strahl vom Cörper durchgelaſſen werden, oder wann der Cörper nur allein den rothen Strahl reflectirt. Wie der

Cörper beſchaffen ſeyn müſſe, daß er dieſen oder jenen Strahl beſonders reflectire, das gehört zur Phyſik oder Naturlehre. So viel ſiehet man ſchon, daß die Lichtſtrahlen zu den farbichten Cörpern unentbehrlich ſeyen, weil alle Farben in der Finſterniß ſchwarz und unſichtbar bleiben.

Zwey=

Zweytes Hauptſtük,
Von der Catoptrik.

§. 342.

Erklärung.

Die Catoptrik oder Spiegelkunſt lehret, durch reflectirte oder zurükgeworfene Strahlen theils etwas ſehen, theils auch ein Feuer hervorbringen. Ehe wir davon weiter handeln, tragen wir die Geſchichte vor.

Die Geſchichte der Catoptrik.

§. 343. Die Catoptrik oder Spiegelwiſſenſchaft iſt nach ihren erſten Anfängen ſehr alt. Einen natürlichen Spiegel ſtellt ein ſtillſtehendes Waſſer vor; wovon Virgil. Ecl. II. 25.

Nec ſum adeo informis, nuper me in littore vidi
Cum placidum ventis ſtaret mare — —

Die künſtliche ſind alle polirte Oberflächen der Cörper, die einen dunkeln Grund haben, ſie mögen Glas, Holz, Stein oder Metall ſeyn.

§. 344. Von dieſen künſtlichen Spiegeln ſchreibt Cicero, de nat. Deorum C. III. der Aeſculapius habe ſie erfunden; und nach dem Zeugniß

des Plinius L. 33, 9. ſolle Praxiteles zur Zeit Pompejus des Groſſen die erſte ſilberne Spiegel gemacht haben. Ueberhaupt ſcheinen die metallene Spiegel älter als die gläſerne zu ſeyn. Bias, der 608 Jahr vor Chriſto lebte, hat den Denkſpruch geführt: **Betrachte deine Handlungen wie in einem Spiegel.**

§. 345. Im fünfzehenden Jahrhundert hat man die gläſerne Spiegel ſtatt der metallenen eingeführt, weil das Glas auch nach dem Zeugniß der Alten, z. E. des Plinius L. 36, 26. am bequemſten dazu iſt.

§. 346. Was die Brennſpiegel betrift, ſo ſind die Hiſtorien vom Archimedes und Proclus bekannt; jener ſollen damit die römiſche Flotte unter dem Marcellus zu Syracuß, dieſer die Schiffe des Vitalianus zu Conſtantinopel angezündet haben. Allein der ſyracuſaniſche Spiegel müßte eine Brennweite von 60′ und alſo einen Diameter von 360′ gehabt haben; dergleichen Spiegel noch kein Menſch verfertigt hat. Man ſehe Herrn Bilfingers Diſſert. de Spec. Archimedis.

§. 347. Die berühmteſte Brennſpiegel zu unſern Zeiten haben verfertiget erſtlich Manfr. Septala, ein Mayländer, der damit Bretter in einer Weite von 15 Schritten verbrannt hat; die Spiegel ſollen paraboliſch geweſen ſeyn, woran aber einige zweifeln. Zweytens Villette, aus Lyon, hat vier ſolche Spiegel gemacht, davon einen Tavernier dem König in Perſien überreicht; den zweyten hat der König von Dännemark gekauft, und den dritten und vierten der König in Frankreich als ein Geſchenk

ſchenk erhalten. Auf dem Obſervatorio zu Paris befindet ſich einer, den Garouſte verfertigt hat. Den gröſten Nahmen mit Verfertigung der Brennſpiegel hat ſich drittens Tſchirnhauſen gemacht; Er hat ſich aber beſonders Mühe gegeben, dieſe Spiegel von Glas mit eben der Wirkung zu machen. Einer der beſten iſt in Dresden aufbehalten; wo auch Gärtners hölzerne und in der Cavität übergüldete Brennſpiegel zu ſehen ſind; die Academie del Cimento von Florenz hat einen cryſtallenen, den Bregenz aus Dresden verfertigt, und womit man die Experimente mit Edelſteinen gemacht, davon Herr Prof. Le Bret in der auf das Geburtsfeſt Sr. Herzogl. Durchl. zu Wirtemberg 1764 gehaltenen Rede de gemmarum ſoliditate ad ſpeculum uſtorium examinata Nachricht gibt.

§. 348. Die vornehmſte Schriftſteller von der Spiegelkunſt unter den Alten waren Euclides, Alhazen, und aus ihnen Vitellio; die Schriften des Euclides aber ſind verlohren gegangen; aus dem, was man noch hie und da angeführt hat, erhellet, daß Euclides, ſo ein groſſer Geometra er war, in der angewandten Mathematik viele Fehler begangen. Dann z. E. den Brennpunkt eines Hohlſpiegels ſezt er in den Mittelpunkt, das iſt, gerade in den ſchwächſten Ort, wo am wenigſten Hitze iſt. Specularium Theor. 31. Unter den Neuern hat der Jeſuit Andr. Tacquet ſich um dieſe Wiſſenſchaft verdient gemacht. Beſonders aber iſt der ſchon gerühmte Lehrbegriff der Optik von Rob. Smith nach der deutſchen Ueberſetzung, mit Herrn Prof. Käſtners Anmerkungen hier zu empfehlen.

Allgemeines Geſez der reflectirten Strahlen.

§. 349. Es gibt zweyerley Gattungen von Spiegeln, erſtlich ebene oder flache Spiegel, zweytens krumlinigte Spiegel, unter welchen leztern zu Hervorbringung eines Feuers die paraboliſche am allerbeſten und dienlichſten ſind: ſie ſind aber auch zugleich in Rukſicht auf ihre Polirung die allerſchwereſte, und erfordern die meiſte Kunſt.

§. 350. Die Materien, aus welchen die Spiegel beſtehen, ſind entweder Glas und Metall, oder auch hartes Holz und Steine. Zum Brennen ſind die metallene Spiegel am beſten zu gebrauchen. Zum Sehen bedient man ſich der gläſernen Spiegel. Dieſe leztere haben den Vortheil, daß ſie ganz weiß ſind, und mit keinen fremden Farben ſpielen. Hingegen iſt das ein Fehler, dem man nicht abhelfen kann, daß, wann ſie dicke ſind, die Strahlen nicht blos von der Oberfläche reflectirt werden, ſondern auch von der hinterſten Fläche, die mit einer Folie bedekt iſt; will man ſie aber ſehr dünne machen, ſo ſind ſie gar bald verbrochen.

§. 351. **Erkl.** Dieſes vorausgeſezt, ſo heißt der Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Spiegel macht, angulus incidentiæ (der Einfallungswinkel) und der Winkel, den der zurükgeworfene Strahl mit dem Spiegel macht, angulus reflexionis.

§. 352. **Erfahr.** Dieſe beede Winkel nun ſind einander gleich.

§. 353. Anm. Man kann ſich davon auch durch Experimente verſichern, z. E. in einer verfinſterten Cammer (Camera ob-

obſcura) auch mit einer jeden Steknadel; welche, wenn ſie perpendicular auf dem Spiegel ſteht, verlängert ſich zeigt; folglich einerley Winkel macht; das iſt, der Strahl fährt unter eben dem Winkel zurük, unter welchem er auf den Spiegel fällt.

Von den ebenen Spiegeln.

§. 354. Lehrſatz. Das Bild eines Cörpers präſentirt ſich ſo weit hinter dem Spiegel, als der Cörper vor dem Spiegel ſteht; oder in der *Fig.* 47. wann von A die Strahlen ausgehen, und MH der ebene Spiegel iſt, ſo iſt AM = aM.

Satz. *Fig.* 47.

$$Ma = MA.$$

Bew.

		oder		
$MCA = HCD$			$o = x$	
$HCD = aCM$			$x = y$	
$MCA = aCM$			$o = y$	
$CM = CM$			$n = m$	
$aMC = AMC$			$MC = MC$	
$\Delta aCM = \Delta ACM$			$\Delta MCA = MCa$	
$aM = AM$			$MA = aM.$	

§. 355. Lehrſatz. Alle Augen der Zuſchauer, ſie mögen ſtehen wo ſie wollen, ſehen das Bild eines Gegenſtandes A hinter dem Spiegel hinter dem Punkt a an eben demſelbigen Ort.

Bew. *Fig.* 48.

Das eine Aug ſeye in B, das andere in b, ſo wird von dem Bild A der radius incidentiæ ſeyn AC, und der radius reflexionis CB; eben ſo in Rukſicht auf den Zuſchauer in b iſt der radius incidentiæ Ac, und der radius reflexionis cb, für den Zu-

ſchauer in cb iſt der radius incidentiæ AD, und der radius reflexionis Dd. Wenn man nun alle radios reflexos, durch welche man ſiehet, hinter die Spiegelfläche verlängert, ſo werden ſie in a zuſammen ſtoſſen, folglich muß das Bild im Spiegel an dem Ort a erſcheinen, der Zuſchauer mag ſtehen wo er will.

§. 356. Zuſatz. Der Punkt a iſt alſo die Spitze des Kegels oder der Pyramiden von allen reflectiren Strahlen im ebenen Spiegel.

§. 357. Lehrſatz. Ein flacher Spiegel darf nur halb ſo groß ſeyn, als der Gegenſtand iſt, deſſen Bild man ganz darinnen ſehen will. Das iſt, in einem 3 Schuh langen Spiegel kann ſich eine 6 Schuh lange Perſon ganz ſehen, oder in Buchſtaben, nach *Fig.* 49.

Satz. $DE = \frac{1}{2}FG$.

Beweis.

Es ſeye FG die Länge eines Menſchen, O ſein Aug, MN der ebene Spiegel, ſo iſt fg das Bild hinter dem Spiegel, und die äuſſerſte Strahlen von f und g, die in das Aug fallen, ſind fO und gO, dieſe gehen durch die Fläche des Spiegels in D und E; man kann alſo die Stücke MD und NE vom Spiegel hinwegnehmen, und wird durch den Reſt DE eben ſo viel ſehen als vorhin, nemlich das ganze Bild fg. Es iſt aber $DE = \frac{1}{2}FG$, weil

$$fg : DE = fO : DO$$
$$fg = FG$$

$$FG : DE = fO : DO$$
$$fF : mF = fO : DO$$

$$\begin{array}{l} FG:DE = fF : mF \\ fE : mF = 1 : 2 \\ \hline FG:DE = 1 : 2. \end{array}$$

§. 358. Lehrſatz. Ein Perpendicul, der auf den Spiegel fällt, hat ein Bild, das mit ihm in gerader Linie fortgeht.

Beweis.

Man nehme eine Nadel, und halte ſie auf den Spiegel perpendicular, ſo wird das Bild davon eben ſo perpendicular hinter dem Spiegel ſtehen, als der Gegenſtand vor dem Spiegel ſtund. Der Grund davon iſt leicht einzuſehen, dann weil der Einfalls- und Reflexionswinkel allemal gleich ſind, hier aber in eine Linie zuſammen fallen, weil die Winkel beederſeits rechte Winkel ſind, ſo iſt ganz natürlich, daß der verlängerte Reflexionsſtrahl eine einige verlängerte Perpendicularlinie wird.

§. 359. Lehrſatz. In einem ebenen Spiegel iſt allemal das Bild dem Gegenſtand vollkommen gleich und ähnlich, oder mit ihme congruent.

Beweis.

Weil ein jeder Punkt des Gegenſtandes gegen die vordere Seite des Spiegels eben diejenige Lage hat, welche das Bild dieſes Punktes gegen die hintere Seite des Spiegels hat, ſo muß auch die Summe aller Punkte vor dem Spiegel einerley Lage haben mit der Summe aller Punkte hinter dem Spiegel. Die Summe dieſer Punkte aber iſt das Bild ſelbſten, alſo hat das Bild einerley Lage mit dem Gegenſtand; folglich iſt es ihm gleich und ähnlich.

Von den ſphäriſchen, paraboliſchen und andern Spiegeln.

§. 360. Erklär. In den ſphäriſchen, und überhaupt in allen krumlinigten Spiegelflächen gilt das Reflexionsgeſez, wie bey den ebenen Spiegeln; nemlich der angulus inclinationis iſt dem angulo reflexionis gleich. Dieſes vorausgeſezt, laſſen ſich einige Lehrſätze erweiſen.

§. 361. Lehrſatz. Wann auf einen gegebenen Punkt eines hohlen Kugelſpiegels (ſpeculi concavi) ein Strahl mit der Axe parallel einfällt, ſo kann man den Punkt beſtimmen, in welchem der zurükgeworfene Strahl die Axe ſchneidet.

Satz. *Fig.* 50.

$$LO = \tfrac{1}{2}\frac{a \cdot r}{e}$$

Beweis.

Es ſey gegeben der Winkel MLA = o, ſo iſt auch ſein Coſinus gegeben = e, der Halbmeſſer (radius) des Spiegels LA = a, der Sinus totus = r. Aus dieſen datis ſuche man OL = x. Man ziehe OQ perpendicular auf ML, ſo iſt erſtlich

LO : LQ = r : e = ſin. tot. cos. o.

Man findet LQ folgender maſſen:

n = o nach geom. Gr.
m = n ex lege reflexionis

m = o

△MOL = △ æquicrur. folglich

MO = OL auch
LQ = QM = ½LM = ½LA = ½a

da

da nun nr. I. $e:r = LQ:LO$, ſo iſt, wenn man ſubſtit. $e:r = \frac{1}{2}a:LO$ folglich

$$LO = \frac{1}{2}\frac{a \cdot r}{e}.$$

§. 362. Lehrſatz. Woferne der Bogen AM = 60° iſt, ſo fällt der zurükgeworfene Strahl in A, folglich iſt der Brennpunkt im Spiegel ſelbſt.

Beweis.

Es ſeye $AM = 60°$, ſo iſt der Coſinus von $o = \sin. 30° = \frac{1}{2}r$; alſo

$$e = \frac{1}{2}r$$

nun iſt $x = \frac{1}{2}\frac{ar}{e}$ nach

hier aber $e = \frac{1}{2}r$ folglich ſubſtituirt

$$x = a$$

§. 363. Lehrſatz. Wann AM gröſſer als 60° iſt, ſo fällt der zurükgeworfene Strahl hinter den Spiegel, und wann AM gar 90° iſt, ſo geht der Strahl in gerader Linie fort. Der Beweis fließt unmittelbar aus den beeden vorigen Sätzen.

§ 364. Lehrſatz. In Abſicht auf die ganze Kugel *Fig.* 31. wann AM faſt unendlich klein wird, ſo daß er etwa 2 bis 3 Grade nur enthalte, welche aber doch einen ziemlichen Raum einnehmen, weil der Spiegel ein Segment von einer ſehr groſſen Sphär ſeyn muß, ſo werden die zurükgeworfene Strahlen nahe bey der Mitte des Radii V in dem Raum, davon OV der Diameter iſt, ingleichem VS, zuſammen fallen.

Beweis.

Wann AM = inf. parv. ſo iſt $Coſ. o = r$, das iſt $e = r$, nun ſeye $LV = \frac{1}{2}a$, ſo wird LV und LO

um einen unendlichen kleinen Theil VO unterſchieden ſeyn. Dieſer Theil $OV = OL - VL$, das iſt $OV = \frac{1}{2}\frac{a.r}{e} - \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}a.\left(\frac{r-e}{e}\right)$. Nun iſt $OV : VS = OP : PM$, weil $OPM \backsim OVS$, ferner weil OV und AP unendlich klein, ſo iſt PO beynahe $= AV = \frac{1}{2}a$, folglich

$$OV : VS = \tfrac{1}{2}a : PM$$
$$\tfrac{1}{2}a > PM$$
$$\overline{}$$
$$OV > VS.$$

Folglich iſt der Focus in einem ſphäriſchen Brennſpiegel unter den gegebenen Bedingungen, beynahe um den vierten Theil des Diameters von dem Scheitel des Spiegels entfernt, und der Focus ſelbſten ſtellt eine etwas elliptiſche Figur vor, deren Axen OV und VS ſind.

§. 365. Lehrſatz. In einem paraboliſchen Brennſpiegel werden alle mit der Axe parallel einfallende Strahlen in einem einigen Punkt reflectirt, nemlich in dem ſogenannten Brennpunkt, dahero die Figur der paraboliſchen Spiegeln allen andern weit vorzuziehen iſt.

Satz. *Fig.* 52.

$$TMF = mMR.$$

Der Beweis ſtehet in dem erſten Theil S. 405. §. 1038.

§. 366. Zuſatz. Man ſiehet hieraus, daß andere Collectivgläſer, welche die Strahlen näher zuſammen bringen ſollen, bey paraboliſchen Spiegeln ganz überflüßig ſeyen; weil die Strahlen vorhin alleſamt in einen Punkt ſich ſammlen, welches bey ſphäriſchen Spiegeln nicht geſchieht.

§. 368.

§. 367. Zuſatz. Wann alſo ein paraboliſcher Spiegel gegen die Sonne gehalten wird, daß die Strahlen alle parallel einfallen, ſo werden alle reflectirte Strahlen MF, NF, SF, OF, in dem Punkt F zuſammen fallen, folglich in F die allergröſte Hitze verurſachen.

§. 368. Zuſatz. Wenn man den Theil SF vom Spiegel abſchneidet, und eine Fläche daſelbſt ankůttet, ſo wird der Spiegel ſich ſelbſten verbrennen.

§. 369. Anm. Der Vortheil von den paraboliſchen Spiegeln beſtehet darinnen, daß man eine ſehr groſſe Hitze dardurch zuwegen bringen kann, die Figur mag groß oder klein ſeyn, wann ſie nur paraboliſch iſt; folglich unterſcheidet ſich dieſer Brennſpiegel von den ſphäriſchen, welche nur alsdann ihre Wirkung thun, wann ſie Stůcke oder Segmente von ſehr groſſen Kugeln ſind, und zweytens ihren Brennpunkt nicht in einem einigen untheilbaren Punkt haben, ſondern eine gewiſſe Gröſſe demſelbigen geben, wie im vierten Lehrſatz gezeiget worden iſt; hingegen haben die paraboliſche Spiegel auch dieſes, daß man an ihnen tadelt, daß ſie nemlich, wann die Figur am mindeſten abweicht, ihre Wirkung nicht thun, und hernach die Erwartung des Zuſchauers betriegen; die Figur ſelbſten aber in der Ausůbung iſt ungleich ſchwerer zu beſtimmen, als die ſphäriſche.

§. 370. Anm. Was die Bilder betrift, welche in den ſphäriſchen Hohlſpiegeln und Converſpiegeln erſcheinen, ſo iſt folgendes zu merken: 1.) Erſcheint das Bild in einem Converſpiegel innerhalb dem Spiegel. 2.) Iſt es nur ein einiges Bild. 3.) Erſcheint es aufrecht. 4.) Iſt es kleiner als der Gegenſtand. 5.) Iſt das Bild eines entfernten Gegenſtandes kleiner als eines nahen. 6.) Iſt das Bild eben deſſelben Gegenſtandes in einem kleinern Kugelſpiegel kleiner als in einem gröſſern. Was aber die hohle und concave Spiegel betrift, ſo werden 1.) die Bilder groſſentheils in freyer Luft auſſer dem Spiegel repräſentirt. 2.) Je näher ſie an dem Spiegel ſtehen, deſto gröſſer erſcheinen ſie.

Drit=

Drittes Hauptſtük,
Von der Dioptrik.

§. 371.

Erklärung.

Die dioptriſche Wiſſenſchaften haben erſt ſeit hundert Jahren einen nahmhaften Theil der Optik auszumachen angefangen; dann vorhero wußte man wenig davon, wie wir ſogleich in der Geſchichte zeigen werden; man hat dahero um ſo eher darauf zu achten, je vielfacher ihr Nutzen iſt. Ihre allgemeine Erklärung iſt nach dem obigen Plan ſchon gegeben, da wir ſie eine Wiſſenſchaft nannten, durch gebrochene Strahlen zu ſehen, und die Gröſſe der Erſcheinung unter dieſer Bedingung zu beſtimmen.

Geſchichte der Dioptrik.

§. 372. Man kann nicht läugnen, daß die Alten von der Strahlenbrechung manches gewußt, welches ich eben nicht aus dem Wort anaclaſtica beweiſen wollte, dann Ανακλασις hieſſe bey den Alten nicht nur Refractio, ſondern auch und zwar vornemlich Reflexio; alſo iſt Anaclaſtik die Lehre vom reflectirten Strahl; das iſt, die Catoptrik. Eben ſo wenig wollte ich auf des Ariſtophanes Comödie mit

mit dem Herrn de la Hire mich berufen, wo ein hieher gehöriger Ausdruk vorkommt; man kann ihn auch anders erklären. Hingegen iſt das ein Grund, dem wir ein Gewicht geben, daß unter den Problemen des Ariſtoteles eines vorkommt, wo von der gebogenen Figur der Ruder im Waſſer gefragt wird, welches wirklich eine dioptriſche Frage iſt; wie z. E. ein gerader Stab in dem Waſſer gebogen erſcheint. Auch ſolle Ariſtoteles ein Buch de annulo ſub aquis viſo geſchrieben haben, das aber verlohren iſt. Inzwiſchen iſt alles diß mehr etwas hiſtoriſches zu nennen, als daß man den Alten die Dioptrik als eine Wiſſenſchaft laſſen ſollte.

§. 373. Die nachfolgende Optici, z. E. der ſchon mehrmalen von uns genannte Araber Alhazen, und hernach der Vitellio wußten ſchon mehr. Doch lieſſen ſie es bey bloſſen Erfahrungen bewenden. Auch ſelbſt Keppler gieng nicht weiter; wie man dann bis auf die Zeiten der wiederhergeſtellten Aſtronomie nichts von der Refraction des Lichts durch die Atmoſphäre wußte, und die Holländer faſt ein Wunderwerk daraus machten, da ſie die Sonne in Nova Zembla 17 Tag früher ſahen, als ſie aufgehen ſollte.

§. 374. Der erſte, der dem Geſez der Refraction aus mathematiſchen Gründen nachgedacht hat, war Willebrordus Snellius, ein Niederländer, welcher die beſtändige Verhältniß des einfachen zum gebrochenen Strahl zuerſt entdekt, und den Willen GOttes zum Grund angeführt, daß dieſe Verhältniß was beſtändiges ſeyn ſolle. Nach dieſem haben Fermat, Leibniz und andere der Sache nachgedacht, und ſichere Gründe zu geben geſucht; denen beſonders

Leib-

Leibniz in Act. Erud. 1697. nahe gekommen. Endlich hat vor wenigen Jahren Herr von Maupertuis durch den Grundſatz der kleinſten Wirkung das Geſez der Strahlenbrechung aus einem allgemeinen Naturgeſez hergeleitet, welches allgemeine Naturgeſez, nemlich das Principium minimæ actionis auch von dem freyen Willen GOttes abhängt; der Unterſchied von der Erklärung des Snellius beſteht nur darinn, daß dieſer den Willen GOttes bey einem beſondern Fall der Optik anführt; wodurch die Phyſik bald demonſtrirt würde, wenn man in allen beſondern Fällen das antworten dörfte. Aber auf die allgemeine von GOtt beſtimmte Naturgeſetze darf ein Philoſoph eher ſich berufen, wenn er nur zeigen kann, wie daraus ſein Satz hergeleitet werde.

§. 375. Die groſſe Brenngläſer gehören auch hieher, um welche ſich Tſchirnhauſen vorzüglich verdient gemacht hat. Eines von dieſen groſſen Brenngläſern wird zu Petersburg bey der Academie gezeigt; es beſteht aus zwey Gläſern; nemlich dem Hauptglas und Collectivglas. Ein anders von den Tſchirnhauſiſchen Gläſern iſt zu Caſſel zu ſehen.

§. 376. Um die Vergröſſerungsgläſer, in ſoſern Teleſcopia daraus werden, haben ſich Galiläus, Newton, Gregorius und andere verdient gemacht; wie wir im folgenden zeigen; die Gelegenheit dazu ſolle ein Zufall geweſen ſeyn, da ein Brillenmacher ungefehr zwey Brillengläſer auf einander gelegt, und die Sache vergröſſert geſehen habe; wodurch Galiläus bewogen wurde, weiter nachzudenken. Das iſt wenigſtens die gemeinſte Meynung. Herr Carl Lamotte will zwar, die Ferngläſer ſeyen ſchon von

den

den alten Druiden in England zu Alexanders des Groſſen Zeiten gebraucht worden; weil im Diod. Siculus eine Stelle aus dem Hecatäus angeführt worden, wo er ſagt, auf dieſer Inſel könne man den Mond ſo nahe ſehen, daß man Berg und Thäler, Meere und Flüſſe darinnen wahrnehme. Man ſehe ſeine Abhandlung von Erfindung der Ferngläſer aus dem Engl. überſezt, Hamb. Magaz. I. Th. p. 182 folgg. Sollte es gegründet ſeyn, ſo würde doch nachgehends die Wiſſenſchaft verlohren gegangen ſeyn, und die Dioptrik bleibt dahero immer eine entweder ganz neu erfundene oder wieder erfundene Wiſſenſchaft. Die Microſcopia haben ihre Vollkommenheit einem Leuwenhoeck, Muſchenbröck, Culpeper beſonders zu danken. Das ſind lauter neue Entdeckungen. Auch ſelbſt unſere gewöhnliche Brillen ſind nicht ſonderlich alt; Ein Mönch, Alexander Spina, ſolle ſie im Jahr 1285 erfunden haben; wie im Journal des Savans 1679. p. 52 ſtehet. Wenigſtens haben die Alten nichts davon gewußt, und den Fehlern der Augen im Alter durch keine Brillen, wie in unſern Tagen geſchieht, einigermaſſen aufhelfen können.

Allgemeines Geſez der Refraction.

§. 377. Alle Lichtſtrahlen, wann ſie aus einer dünnen Materie in eine dichtere kommen, oder umgekehrt, wann ſie aus einer dichtern in eine dünnere kommen, werden aus ihrem vorigen Weg gebracht. Dieſes nennet man die Refraction, wobey man folgendes zu bemerken hat: Die Figur BCDA (*Fig. 53.*) ſey ein gläſerner Würfel, aus S falle ein Strahl SC

auf

auf dieſen Würfel, ſo werden die Linien, wann ſie fortgezogen werden, wie die Figur ausweiſet, folgendermaſſen benennt:

I) CD heißt der Perpendicul, gegen welchem oder von welchem der Strahl gebrochen wird. Man nennt ihn auch Cathetum incidentiæ vel inclinationis.

II) Der Winkel TCD heißt angulus inclinationis (der Neigungswinkel.)

III) Der Winkel VCD heißt angulus refractus (der gebrochene Winkel.)

IV) Der Winkel TCV, den der gebrochene Strahl mit dem gerad fortgehenden macht, heißt angulus refractionis, oder Brechungswinkel.

§. 378. Man merket vornemlich den angulum inclinationis und angulum refractum, welche in den Beweiſen gar oft vorkommen, daher man auch ihre Sinus beſonders zu bemerken hat. Folgende Lehrſätze werden uns davon überzeugen.

§. 379. Lehrſatz. Wann ein Strahl aus der Luft in Glas fährt, ſo wird er gegen den Perpendicul ſo gebrochen, daß der Sinus vom Neigungswinkel, (angulus inclinationis,) ſich verhält zum Sinus des gebrochenen Winkels, wie 3 : 2, und wann er aus Luft in Waſſer fährt, wie 4 : 3, und beederſeits auch umgekehrt.

Satz. *Fig.* 27. 53.

Sin. Inclin. zum ſin. Refr. umgekehrt wie die Geſchwindigkeiten.

Beweis.

Fig. 27. der einfallende Strahl ſey CE, der gebrochene GE; von C und I ziehe man die Perpendikel CH,

CH, GL auf LH; dieſe Linie LH ſetze man $= a$, $EH = x$, ſo iſt $LE = a - x$; ferner ſeye $CH = b$, $LG = c$; ſo wird nach dem Pythag. Lehrſatz

$$EC = \surd(b^2 + x^2)$$
$$GE = \surd(c^2 + a^2 - 2ax + x^2)$$

Die Geſchwindigkeit in CE ſey $= m$, die in GE ſey $= n$; ſo wird nach dem Satz der kleinſten Wirkung (Princ. minimæ actionis) ſeyn

$$m.\surd(b^2 + x^2) + n.\surd(c^2 + a^2 - 2ax + x^2) = \text{Min.}$$

differ. §. 992. I. Th.

$$\frac{mxdx}{EC} = \frac{n(adx + xdx)}{GE} = 0$$ folglich

$$\frac{mxdx}{EC} = \frac{n(adx - xdx)}{GE}$$

: dx

$$\frac{mx}{EC} = \frac{n(a - x)}{GE}$$ das iſt, in der Figur

$$\frac{m.EH}{EC} = \frac{n.LE}{GE}$$ und in der Proport.

$$\frac{EH}{EC} : \frac{LE}{GE} = n : m.$$

aber EA = ſin. Inclin. und LE = ſin. Refractionis

ſin. Inclinat. : ſin. Refr. $= n : m$ oder umgekehrt wie die Geſchwindigkeiten (in ratione inverſa celeritatum).

§. 380. Zuſatz. So iſt *Fig.* 53. ſin. TCD zu ſin. VCD $= 3 : 2$ bey Glas, und $= 4 : 3$ bey Waſſer.

§. 381. Anmerk. Man könnte noch mehrere Fälle anführen, als Glas und Waſſer, z. E. wann der Strahl aus dem Aether oder einem Vacuo in die Luft fährt, in welchem Fall die Refraction wieder anders ſeyn würde; allein die angeführte Fälle ſind die häufigſte, und in der Dioptrik für alle Aufgaben und Lehrſätze hinlänglich.

§. 382. Lehrſatz. Wann einem die Lage des einfallenden Strahls SCT gegeben iſt, ſo läßt ſich die Lage des gebrochenen Strahls durch Zeichnung und Rechnung finden.

Satz. *Fig.* 54.

CV = radio refracto in vitro.

Bew.

$Tt = \sin. TCA$

$ut = \frac{2}{3} Tt$

$ut = \frac{2}{3} \sin. TCt$

$ut = vV$

$vV = \frac{2}{3} \sin. TCt$

$vV = \sin. VCv$

$\frac{2}{3} \sin. TCt = \sin. VCv.$

$2 \sin. TCt : \sin. VCv = 3 : 2$ alſo

CV = radio in vitro refracto.

§. 383. Lehrſatz. Wann die Strahlen auf dem Glas wiederum in die Luft fahren, ſo iſt die Verhältniß umgekehrt. *Fig.* 53.

Beweis.

Weil VW mit CD, und ZV parallel mit CT, ſo iſt $\sin. TCD : \sin. VCD = \sin. ZVW : \sin. QVW$.

$TCD = ZVW$

$VCD = QVW$

$\sin. TCD : \sin. ZVW = \sin. VCD : QVW.$

Die dioptriſche Gläſer und die Erfindung der Brennweite durch Zeichnung.

§. 384. Erkl. Die dioptriſche Gläſer haben 6 verſchiedene Nahmen, je nachdem die Krümme be=

beſchaffen iſt, die ſich an ihnen zeiget, dann entweder iſt die eine Seite erhaben, und die andere flach, in welchem Fall die Gläſer plan convexe Gläſer heiſſen; oder eine Seite iſt hohl, und die andere flach, in welchem Fall die Gläſer plan concav genannt werden; oder es ſind beede Seiten erhaben, da es dann convex convexe Gläſer gibt; oder es ſind beede Seiten hohl, daher die concav concave Gläſer entſtehen; oder es iſt eine Seite convex, und die andere hohl, ſo daß die Höhlung der Convexität concentriſch iſt, da es dann convex concave Gläſer gibt; oder es iſt endlich die eine Seite erhaben und die andere hohl, aber dergeſtalten, daß der Bogen von der concaven Seite ein gröſſerer Cirkelbogen iſt, der ſich an das End des andern anſchließt, in welchem Fall die Gläſer meniſci oder Lunulæ genannt werden.

§. 385. Lehrſatz. In einem plan convexen Glas hat zwar die convexe Seite einen wirklichen Radium, aber die ebene nicht; inzwiſchen kann doch eine ebene Seite angeſehen werden als eine Circularfläche, deren Radius unendlich groß iſt, und vor welchem der Radius der entgegengeſezten convexen Seite verſchwindet.

Beweis.

Auf einer ebenen Fläche ſtehet die Axe ſenkrecht oder perpendicular, und eben die Axe kann daher als ein Radius angeſehen werden; weil aber kein Ziel angegeben werden kann, wo die Axe aufhöret, ſo darf man ſie, folglich auch den Radium unendlich groß annehmen. Da aber eine endliche Gröſſe gegen eine unendliche wie nichts zu rechnen iſt, ſo wird bey der

Addition der beeden Radiorum der endliche vor dem unendlichen verſchwinden.

§. 386. Lehrſatz. Wann der Radius eines convexen Glaſes poſitiv angenommen wird, ſo muß man den Radium eines hohlen oder concaven Glaſes negativ annehmen, oder umgekehrt.

Beweis.

Der Radius von einer hohlen Seite iſt dem Radio von einer convexen Seite gerade entgegen geſezt; von Gröſſen aber, die einander gerade entgegen geſezt ſind, iſt allemal die eine poſitiv, und die andere negativ, wie aus der Trigonometrie erhellet; folglich wenn der Radius des convexen Glaſes poſitiv iſt, ſo muß der Radius des concaven Glaſes negativ werden.

§. 387. Lehrſatz. Die Brennweite, das iſt, diſtantia foci, oder die Weite des Brennpunktes von der hinteren Fläche des Glaſes läßt ſich durch Zeichnung in allen Gläſern bey allen Fällen beſtimmen.

Beweis. *Fig.* 55.

Es ſey D ein ſtrahlender Punkt, und DP der einfallende Strahl, ſo würde er nach PV in gerader Linie fortgehen, wann er nicht vom Glas MPA gebrochen würde. Er wird aber hier gegen den Perpendikel gebrochen, welcher der Radius von dem Bogen MPA iſt, den man aus dieſem gegebenen Bogen nach der Geometrie finden kann, dieſer Radius ſoll nun PC ſeyn. Hat man nun dieſen Perpendikel, ſo weißt man auch den radium refractum PQ zu ziehen aus der Verhältniß der Sinuum der Refraction, wie 2 : 3. Aus Q würde der Strahl gera-

gerade nach φ zufahren, weil er aber aus dem Glas in die Luft fährt, und wiederum gebrochen wird, ſo nimmt er einen andern Weg. Hier wird er nun von dem Perpendikel weggebrochen; man muß dahero den Perpendikel vor allen Dingen ſuchen, er wird aus dem Bogen MQB wie der obige gefunden, und ſolle QK ſeyn, folglich läßt ſich auch leicht der radius retractus QF finden, weil man die Verhältniß der ſinuum refractionis weißt, als welche die obige nur umgekehrt iſt.

§. 388. Zuſatz. Daher hat man auch die Brennweite ſelbſten, nemlich FB, welches die Weite des Brennpunktes F von der hintern Fläche des Glaſes iſt; man kann alſo den Weg des gebrochenen Strahls in allen Gläſern durch Zeichnung geometriſch beſtimmen.

§. 389. Zuſatz. Es iſt gleichgültig, von welcher Fläche des Glaſes man die Weite rechnet, weil die Dicke des Glaſes gegen den Diameter für nichts geachtet wird und verſchwindet.

§. 390. Zuſatz. Mechaniſch ſucht man die Brennweite der Gläſer, wenn man ſie gegen das Fenſter hält, und den Ort auf der Hand bemerkt, in deſſen Entfernung die Fenſterſcheiben durchs Glas ſich am deutlichſten repräſentiren. So ſuchen die Glasſchleifer die Brennweite, wenn ſie Fernröhre, Microſcopia u. ſ. w. verfertigen, ohne einen merklichen Fehler; dahero die practiſche Dioptrik nicht ſonderlich ſchwer iſt.

Die Erfindung der Brennweiten durch Rechnung.

§. 391. Lehrſatz. Eben ſo läßt ſich auch dieſe Brennweite durch Rechnung beſtimmen und erweiſen, daß die Brennweite allemal dem doppelten Product der Radiorum dividirt durch die Summe der Radiorum gleich ſeye, oder nach der Figur $= \frac{2(KB.CA)}{KB+CA}$ *Fig.* 55.

oder wann $KB = \varrho$, $AC = r$ ſo iſt die Brennweite allemal

$$= \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$$

Satz.

Diſtantia foci a vitro, oder die Brennweite

$FB = \frac{2r\varrho}{r+\varrho}$ oder $\frac{2ab}{r+b}$ *Fig.* 56. wenn a, b die Radii ſind.

Beweis.

Es ſey *Fig.* 56.

CH = m = ſin. inclin.

CI = n = ſin. refract.

FB = d = diſtantia puncti radiantis; die Entfernung des ſtrahlenden Punkts.

BC = a der Radius;

AB = AK = x = foci diſtantia, die Brennweite;

AC = AB + BC = a + x

FC = FB + BC = a + d

BK, craſſities vitri, die Dicke des Glaſes = o, wird für nichts geachtet.

Man mache BP : PC = n : m; ſo iſt, weil

AC

$$AC:AB = CI:KD \qquad FC:TB = CH:KD$$ in Buchſt.

$$a+x:x = n:\frac{nx}{a+x} \qquad a+d:d = m:\frac{dm}{a+d}$$ da nun

$$KD = \frac{nx}{a+x}$$

$$KD = \frac{dm}{a+d}$$ folglich

$$\frac{nx}{a+x} = \frac{dm}{a+d}$$ daher

$$nx:a+x = md:a+d$$ und multiplicirt

$$nax + ndx = adm + mdx$$

$$mdx = mdx$$ ſubtr.

$$nax + ndx - mdx = adm$$ daraus die Proportion

$$na + (n-m)d : ma = d:x$$ das iſt, in der Figur

$$nBC + (n-m)FB : mBC = FB:AB$$ nr. I. aber

$$BP:PC = n:m,$$ ex conſtructione auch

$$BP - PC : PC = n-m:m$$ das iſt

$$BC:PC = n-m:m$$ nr. II.

Es iſt ferner

$$BP - PC : BP = n-m:n$$ nr. III. das iſt

$$BC:BP = n-m:n$$ oder

$$n-m:n = BC:BP = \frac{nBC}{n-m}$$ da aber auch nr. II.

$$n-m:m = BC:PC = \frac{mBC}{n-m}$$ ſo iſt, weil

nB

$$FP = FB + BP = FB + \frac{nBC}{n-m}$$ alſo

$$FP:PC = FB + \frac{nBC}{n-m} : \frac{mBC}{n-m}$$

$$\overline{FP}:\overline{PC}=\overline{(n-m)FB}+\overline{nBC}:\overline{mBC}\,.\,n-m$$ aber nach nr. I.

$$FB:AB=(n-m)FB+nBC:mBC$$

$$FP:PC=FB:AB$$

$$FP:FP-PC=FB:FB-AB$$

$$=FP:FC$$

$$=FB:FA$$ und invertendo

$$PP:FC=FB:FA$$ nr. IV.

Kehrt man nun die Figur um wie in *Fig.* 57. wo wir die Buchſtaben, die Herr von Wolf in ſeinen lat. Elementen hat, beybehalten, ſo iſt

$$GD:GK=GO:GF$$ nr. V.

$$EG:GC=3:2$$

$$EG-GC:EG=3-2:3$$

$$=EC:EG$$

$$=1:3$$

alſo $EG=3EC$

$$DK:DO=3:2$$

$$DK-DO:DK=3-2:3$$

$$=OK:DK$$

$$=1:3$$

alſo $DK=3OK$

$GD:GK=GO:GF$ das iſt, weil die Dicke des Glaſes wie nichts zu achten, oder $=0$,

$DK+EG:EG=EG+KO:GF$ und weil $DK=3KO$, $EG=3EC$

$$3KO+3CE:3CE=3CE+KO:GF$$ nr. VI.

$$\overline{KO}+\overline{CE}:\overline{CE}=\overline{3CE}+KO:GF\,:3$$ d. i. in Buchſt.

$$a+b:b=3b+a:GF$$

$$GF=\frac{3b^{h}+ab}{a+b}$$

$$EF = EG - GF \text{ oder weil } EG = 3CE$$
$$EF = 3CE - GF$$
$$EF = 3b - \left(\frac{3bb + ab}{a + b}\right) \text{ das iſt nach §. 140. I Th.}$$
$$EF = 3b - \frac{3bb - ab}{a + b} \text{ unter einerley Benenn.}$$
$$EF = \frac{3ab + 3bb - 3bb - ab}{a + b} = \frac{2ab}{a + b} = \frac{2r\varrho}{r + \varrho}$$

§. 392. Lehrſatz. In einem plan convexen Glas, das auf der einen Seite erhaben, und auf der andern flach iſt, iſt der Brennpunkt dem doppelten Radio der erhabenen Seite gleich, das iſt

Satz.

$$FB = 2r$$

Bew.

$$FB = \frac{2r\varrho}{(r+\varrho)}$$
$$\varrho = \infty$$
$$r + \varrho = \varrho$$
$$FB = \frac{2r\varrho}{\varrho} = 2r$$

§. 393. Lehrſatz. In einem concaven oder hohlen Glas, wann es auf beeden Seiten hohl iſt, iſt die Brennweite negativ.

Satz.

$$FB = -\frac{2r\varrho}{r+\varrho}$$

Bew.

$$-r . -\varrho = r\varrho \quad \text{daher}o$$
$$-\frac{2r\varrho}{(r+\varrho)} = -\frac{2r\varrho}{r+\varrho}$$

§. 394. Lehrſatz. In einem convex concaven Glas, das auf der einen Seite erhaben, und auf der andern hohl iſt, iſt der Focus wie bey dem convex convexen, nemlich, wenn die hohle Seite ein Stük eines gröſſern Cirkels iſt als die erhabene; das iſt, in einem meniſco iſt

Satz.

$$FB = \frac{-2r\varrho}{-r+\varrho}$$

Beweis.

$$-r.+\varrho = -r\varrho$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : 2$$
$$-2(r.+\varrho) = -2r\varrho$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad} : -r+\varrho$$
$$\frac{-2(r.+\varrho)}{-r+\varrho} = \frac{-2r\varrho}{-r+\varrho}$$

§. 395. Exemp. Es ſeye $r = 6''$
$\varrho = 4''$

ſo iſt der Focus $= \frac{-2.6.4}{-6+4} = \frac{-48}{-2} = 24.$

§. 396. Lehrſatz. In einem plan concaven Glas iſt der Focus gleich dem doppelten negativen Radio, das iſt Satz.

$$FB = -2r.$$

Bew.

$$\varrho = \infty$$
$$\frac{-2r\varrho}{-r+\varrho} = \frac{-2r\varrho}{+\varrho}$$
$$= -2r$$

§. 397. Lehrſatz. Wann die ſtrahlende Punkten unendlich weit von dem Glas entfernt ſind, ſo

ſo muß man, um die Brennweite zu beſtimmen, folgenden Lehrſatz wiſſen, daß

Satz. *Fig.* 59.

$$GF = \frac{nar}{(n-m)a-mr}.$$

Beweis.

Es ſey $AB = AG = a$
$BF = GF = x$
$BH = y$
$CB = rad = r$
die Verhältniß der Strahlenbrechung $n:m$,

ſo iſt I. $ABH \backsim ACD$
$AB : BH = AC : CD$
$a : y = a + r : CD$ alſo $\frac{ay+yr}{a} = CD$

II. $BFH \backsim CFE$
$BF : BH = CF : CE$
$x : y = x - r : CE$
$\frac{yx - yr}{x} = CE$ und vergl. Nr. I.

$\frac{ay+yr}{a} : \frac{yx-yr}{x} = CD : CE$ aber
$CD : CE = n : m$

$\frac{ay+yr}{a} : \frac{yx-yr}{x} = n : m$ folgl. die mittlere und äuſſere Glieder mult. gibt

$$\frac{may+myr}{a} = \frac{nyx-nyr}{x}$$
$: y$
$$\frac{ma+mr}{a} = \frac{nx-nr}{x}$$
$. x$
$$\frac{max+mrx}{a} = nx - nr$$
$. a$
$max + mrx = nax - nar$ und
$nar = nax - max - mrx$
$= (na - ma - mr)x$

nar

$$\frac{nar}{na - ma - mr} = x$$

$$\frac{nar}{(n - m)\,a - mr} = x$$

§. 398. Lehrſatz. Weil die Sonne als unendlich weit von uns entfernt angeſehen werden kann, ſo wird der Focus bey einem Glas, deſſen Diameter gegeben ſeyn muß, mit der Axe hinter dem Mittelpunkt zuſammen fallen, oder in Buchſtaben:

Satz.

$$\frac{nr}{n - m} = FG$$

Beweis.

$$\frac{nar}{na - ma - mr} = FG$$

$$a = \infty \quad \text{alſo}$$

$$\frac{nar}{na - ma} = FG$$

$$: a$$

$$\frac{nr}{n - m} = FG.$$

§. 399. Zuſatz. Je weiter alſo der ſtrahlende Punkt entfernt iſt, deſto näher wird das Bild davon hinter dem Glas ſich vorſtellen; und je näher der ſtrahlende Punkt am Glas iſt, deſto mehr wird ſich das Bild hinter dem Glas entfernen und vergröſſern.

Von den Fernröhren, oder Teleſcopiis, nemlich den aſtronomiſchen, den Erdröhren, (Tubis terreſtribus) den Newtoniſchen und Gregorianiſchen Teleſcopiis, wie auch dem Polemoſcop oder Operngucker.

§. 400. Erklär. Man kann die Fernröhren in

in zwo Claſſen eintheilen, dann entweder ſind ſie blos aus Gläſern zuſammen geſezt, oder es können zu ihrer Zuſammenſetzung neben den Gläſern auch noch Spiegel gebraucht werden. Von der erſten Claſſe gibt es dreyerley Fernröhre, nemlich das Holländiſche oder Galiläiſche, zweytens das Aſtronomiſche, drittens das Erdrohr oder Tubus terreſtris. Von der zweyten Claſſe hat man ebenfalls drey, nemlich 1) das Newtonianiſche Fernrohr, 2) das Gregorianiſche, und 3) den Operngucker, oder das Polemoſcopium. Die Fernröhren von der erſten Gattung ſind bekannt. Das Holländiſche wurde zuerſt erfunden, und zwar in Holland, daher es dieſen Nahmen hat. Galiläus, der überhaupt die optiſche Wiſſenſchaften mit neuen Diſciplinen vermehret hat, hörte kaum was davon, als er ſogleich dieſes Fernrohr nach ſeinen groſſen Einſichten verbeſſerte, daher es auch das Galiläiſche genannt wird. Das Aſtronomiſche Fernrohr iſt mit dem Galiläiſchen einerley, nur daß es ungleich länger iſt, und vornemlich, welches der Hauptunterſchied vom Erdrohr iſt, die Sachen verkehrt vorſtellt. Denn man hat nicht nöthig, in der Aſtronomie darauf zu ſehen, weil ein verkehrter Cirkel eben ſo ausſieht, als einer der aufrecht ſteht, und durch das aſtronomiſche Fernrohr weiter nichts geſehen werden ſoll. Sonne, Mond, und Planeten ſehen ja durch die Fernröhre als Cirkel aus, und die Fixſterne als Punkte.

§. 401. **Erklär.** Das Erdrohr oder der ſogenannte Tubus terreſtris ſtellt alle Sachen aufrecht vor, weil es daran gelegen iſt, daß man ſie aufrecht ſiehet. Es muß aber aus dieſem Grund mehr als

als 2 Gläſer haben; die meiſte haben 4 Gläſer, davon man die 3 erſtere Ocularglaſer nennt, das lezte aber das Objectivglas. Man beſorgte, wann man mehrere Gläſer nähme, ſo möchte das Object verdunkelt werden, weil man allemal weniger ſieht, wann man z. E. nur durch viele Fenſterſcheiben ſieht; doch hat in unſerer Nachbarſchaft der gelehrte Herr Pfarrer Biſchoff von 5 Ocularglaſern ein Fernrohr componirt, welches die Objecte gröſſer und deutlicher vorſtellt, als durch 3 Gläſer; Eben ſo hat ein Engländer, Nahmens Dolland, vor etlichen Jahren eine neue cryſtallartige Materie ſtatt der Gläſer erfunden, welche er aber noch geheim hält, und ſie ſich theuer genug bezahlen läßt. Der Vortheil beſteht darinnen, daß dieſe cryſtallartige Materie niemals abſtehen ſoll wie die Gläſer. Man ſehe das Brem. Magaz II. B. I. St. nr. V.

§ 402. Erkl. Die drey folgende Tubi, bey welchen Spiegel applicirt werden, ſind noch künſtlicher und bequemer. Der erſte iſt der Newtonianiſche Tubus, welcher aus einem hohlen Cylinder etwa einem halben Schuh lang beſtehet, durch deſſen eine Oefnung die Strahlen einfallen, und ſodann auf einen an der andern Oefnung befeſtigten metallenen Hohlſpiegel, von wannen ſie reflectirt in einen ebenen Spiegel fallen, der eine Erhöhung von 45 Grad hat; aus dieſem Spiegel werden ſie hernach gerade auf die Seite reflectirt, wo der Cylinder eine Oefnung bekommt, und wo das Aug des Zuſchauers ſich befinden muß, wo nemlich das Augenglas iſt; Der 2te iſt der Tubus Gregorianus, der von dem Newtoniano nur darinnen unterſchieden iſt, daß

daß er nicht ſeitwärts, ſondern in gerader Linie das Object anſehen läßt. Zu dem Ende wird an der einen Extremität ein kleiner Spiegel applicirt, und an der andern ein gröſſerer, welcher mitten durchlöchert iſt, ſo daß das Loch gerade auf den entgegengeſezten kleinen Spiegel paßt. Wann nun die Strahlen einfallen, so werden ſie von dem Hohlſpiegel und dem kleinen entgegengeſezten Spiegel reflecirt, und von dieſem abermal durch das Loch des gröſſern Spiegels in das daſelbſt angebrachte Augenglas, dadurch man dann die Objecte in gerader Linie ſiehet. Drittens der Operngukker, oder, wie ihn Hugenius nennt, das Polemoſcopium, *Fig.* 60. weil er auch im Krieg von einem ganz beſondern Gebrauch iſt, ſind zwey unter einem rechten Winkel zuſammengefügte hohle Cylinder, welche bey ihrer Zuſammenfügung einen Planſpiegel einſchlieſſen unter einem Winkel von 45°, damit die reflectirte Strahlen gerade durch, durch den andern Cylinder in das Aug des Zuſchauers durchgehen, welches nicht geſchehen würde, wann der Spiegel unter einem gröſſern oder kleinern Winkel applicirt würde, wie es auch bey dem Newtoniſchen Tubo aus geometriſchen Gründen erhellet. An dem einen Ende iſt das Objectivglas, an dem andern ſind die Augengläſer applicirt, da man dann alles dasjenige ſehen kann, was auf der Seite liegt, und wovon die Strahlen nicht in gerader Linie in unſer Aug kommen können. Der Vortheil von dem Newtonianiſchen und Gregorianiſchen Tubus beſtehet darinnen, daß man ſo keine groſſe Länge dazu braucht, wie bey den andern Tubis, und doch alles ſo deutlich oder noch deutlicher ſehen kann.

kann. Man muß ſich aber hüten, daß kein fremdes Licht hinein kommt, und die Farben dabey ſpielen, welches bey den Spiegeln gar leicht geſchehen kann. Man verhindert es aber, wenn die innere Höhlung des Cylinders ſo viel möglich rauh und unpolirt bleibt.

Von den Vergröſſerungsgläſern, Kleinigkeiten in der Nähe zu ſehen, oder von den Microſcopiis ſowohl einfachen als zuſammengeſezten, auch von den Brillen.

§. 403. Es gibt zweyerley Gattungen von Microſcopiis, nemlich einfache und zuſammengeſezte. Die einfache ſind wieder gedoppelt, dann man braucht entweder ſogenannte lenticulas, (Linſenförmige Gläſer) oder globulos, das iſt, gläſerne Kügelein.

§. 404. Eine einige lenticula, das iſt, ein Linſenförmiges erhabenes Glas, oder auch ein gläſernes Kügelein (globulus vitreus) gibt ein einfaches Microſcopium (ſimplex); ein zuſammengeſeztes Compoſitum aber entſteht durch mehrere Gläſer, die mit einander combinirt werden.

§. 405. Lehrſatz. Ein einfaches Microſcopium, das aus einer lenticula beſteht, vergröſſert das Object in der Verhältniß der Diſtanz ſeiner Brennweite zu 8 Zoll.

Beweis.

Die Diſtanz von 8 Zollen iſt die gewöhnliche Diſtanz, in welcher man mit bloſſen Augen etwas deutlich ſiehet; weil nun das Microſcopium unmittelbar

vor

vor das Aug hingehalten wird, und das Object ſogleich hinter ihm iſt, ſo könnte man es mit bloſſen Augen nicht deutlich ſehen; das Microſcopium aber verurſacht, daß es in einer gehörigen Diſtanz unter einem gröſſern Winkel repräſentiret wird.

§. 406. Zuſatz Wenn in der 60 *Fig.* P das Object iſt, und OQ die Diſtanz von 8 Zoll, ſo wird ſich das Object P zu der Erſcheinung in Q, wo es hin referirt wird, verhalten wie OP:OQ.

§. 407. Zuſatz. Es ſeye OP $= \frac{1}{2}$, ſo iſt P:Q $= \frac{1}{2}:8$, $\frac{1}{2}:8 = 1:16$, folglich iſt die Vergröſſerung des Diameters 16, wenn die Diſtanz des Brennpunkts bey der lenticula $\frac{1}{2}$ Zoll iſt.

§. 408. Zuſatz. Je kleiner alſo die Diſtanz des Brennpunktes iſt, deſto ſtärker wird die Vergröſſerung, die Diſtanz aber wird allemal kleiner, je kleiner die Sphär iſt, davon die lenticula ein Segment iſt.

§. 409. Zuſatz. Weil die Flächen ſich wie die Quadrate der Diameter, und die Cörper wie ihre Cubi verhalten, ſo kann man aus der gegebenen Diſtanz des Brennpunkts eines Microſcopii jedesmal die Stärke der Vergröſſerung auch im Cörpermaas genau berechnen: z. E. es ſeye die Diſtanz des Brennpunkts eines Microſcopii $\frac{1}{10}$ Zoll, ſo verhält ſich P:Q $= \frac{1}{10}:8 = 1:80$, um ſo viel wird der Diameter vergröſſert, folglich die Fläche 80 . 80 und der Cörper ſelbſt 80 . 80 . 80 mal; alſo im Flächenmaas 6400 mal, und im Cubicmaas 512000 mal.

§. 410. Anm. Man kann aber keine ſo gar kleine lentes ſchleifen, deren Brennpunkt z. E. $\frac{1}{100}$ eines Zolls weit entfernt wäre; dahero iſt man auf gläſerne Kügelein verfallen, die man

ſtatt der Linſen, (lenticularum) gebraucht, weil man die Kügelein kleiner nach Proportion machen kann, als die lentes.

§. 411. Lehrſatz. Microſcopia mit Kügelein *Fig.* 61. vergröſſern das Object in der Verhältniß von $\frac{3}{4}$ ihres Diameters zu 8 Zoll, das iſt, wenn der Diameter eines Kügeleins $\frac{1}{10}$ Zoll iſt, ſo wird ſeyn $P:Q = \frac{3}{40} : 8 = 3 : 320 = 1 : 106$ bey nahe.

Satz.

Es ſey $AB = P$ ſo iſt $P:Q = \frac{3}{4} EF : 8$.

Bew.

$ACF = 2AGF$

$DGI = 2AGF$

$ACF = DGF$

AF erſcheint unter dem Winkel ACF, folgl.

$P:Q = CF : 8$

$CF = \frac{3}{4} EF$

$P:Q = \frac{3}{4} EE : 8$.

§. 412. Zuſatz. Die Diſtanz des Brennpunkts in einem gläſernen Kügelein iſt alſo von der Oberfläche der Kugel an gerechnet $\frac{1}{4}$ des Diameters, vom Centro aber an gerechnet $\frac{3}{4}$ des Diameters, nemlich $\frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, unter dieſer leztern Diſtanz aber wird das Bild vergröſſert. Der Grund davon iſt das allgemeine Geſez der Refraction, weil die Strahlen, wann ſie von der Luft in eine gläſerne Kugel gehen, ſich nach der doppelten Berechnung mit der Axe in der gegebenen Verhältniß, nemlich 3 : 2 vereinigen.

§. 413. Zuſatz. Die Vergröſſerung durch eine lenticulam von einerley Diameter mit dem Kügelein, wenn man ſie ſo klein ſchleifen könnte, iſt

um

um ein ziemliches allemal ſtärker, als die leztere, der Beweis iſt leicht zu verſtehen. Wenn die lenticula beederſeits gleich erhaben iſt, ſo iſt ihr Focus die Helfte ihres Diameters, nach §. 380. folglich $P:Q = \frac{1}{2}:8 = 1:16$, im Kügelein aber $P:Q = \frac{3}{4}:8$, das iſt, wie $3:32$, das iſt, beynahe wie $1:10$, oder $1:10\frac{2}{3}$, nun aber iſt $1:10\frac{2}{3} < 1:16$, folglich iſt die Vergröſſerung durch die lenticulam ſtärker, dann die lenticula vergröſſert 16mal im Diameter, und das Kügelein nur $10\frac{2}{3}$ mal.

§. 414. **Erklär.** Die allereinfacheſte Verbindung von microſcopiſchen Gläſern iſt diejenige, die aus zwey lenticulis zuſammengeſezt iſt. Die eine lenticula iſt das Augenglas, und die andere das Objectivglas. Das Augenglas iſt ein Segment von einer etwas gröſſern Sphär als das Objectivglas. Wann man ſie nun beede in die gehörige Diſtanz voneinander ſezt, ſo wird das Object vergröſſert erſcheinen. Man kann noch mehrere Augengläſer nehmen, wie bey den Teleſcopiis, die gewöhnlichſte beſtehen aus 3, welche man ſonſten die Engliſche Vergröſſerungsgläſer nennt.

§. 415. Anm. Der Nutzen, den die zuſammengeſezte Vergröſſerungsgläſer haben, iſt folgender:

1) Bekommt man ein gröſſeres Feld zum Sehen, welches Feld noch mehr ausgebreitet wird, wann man auch das Objectivglas verdoppelt, nur muß man dabey zuſehen, daß durch mehrere Gläſer der Deutlichkeit nichts benommen wird. 2) Laſſen ſich die Microſcopia compoſita durch angebrachte Spiegel mehr erleuchten, daß alſo der Deutlichkeit nichts abgeht, oder wann ihr etwas abgehen ſollte, das abgehende durch das von dem Spiegel reflectirte Licht erſezt wird.

§. 416. Anm. Die vornehmſte Gläſer, die man zu Vergröſſerungen gebraucht, ſind die Loewenhöckiſche, Muſchenbröckiſche, unter den Deutſchen aber die Lieberkühniſche geweſen. Diejenige, welche bey unſerm Gymnaſio aufbehalten ſind, und vor-

züglich vor den andern genannt zu werden verdienen, ſind von einem Engländer, Culpepre, und nach Muſchenbröckiſcher Art gefaßt.

§. 417. **Erklär.** Die Brillen müſſen ſich nach den Augen der Menſchen richten: Es gibt zweyerley Augen. Erſtlich Myopes, kurzſichtige, welche nur in die Nähe, aber nicht in die Ferne gut ſehen. Zweytens, Presbytæ, welche nur in die Ferne, aber nicht in die Nähe gut ſehen, welches beſonders bey alten Leuten ſtatt hält. Vor dieſe Presbytas ſind etwas erhabene Gläſer gut, und ſo ſind alle unſere Brillen, deßwegen gemeiniglich alte Leute Brillen aufſetzen. Hingegen concave Gläſer ſind für die Myopes, ſolche Gläſer braucht man zu Perſpectiven; daher die Myopes gemeiniglich Perſpective bey ſich tragen.

Von einigen andern dioptriſchen Inſtrumenten.

§. 418. Auſſer den ſchon genannten Inſtrumenten hat man noch folgende zu merken. Das erſte iſt das Helioſcopium, welches ein Tubus iſt, dardurch man in die Sonne ſehen kann; weil man nun durch weiſſe Gläſer ohne Verblendung die Sonne nicht anſchauen kann, ſo nimmt man ſtatt des Objectivglaſes etwan ein rothes, und ſtatt des Augenglaſes ein grünes Glas. Spahrt man aber die Koſten, ein eigenes Helioſcopium machen zu laſſen, ſo kann man einen bloßen Tubum Aſtronomicum oder auch terreſtrem darzu gebrauchen, wann man nur vor das erſte Augenglas ein gefärbtes Glas hinſchraubt, oder ein weiſſes Glas nimmt, und es über dem Feuer durch

den

den Rauch ſchwarz werden läßt, und ſolches für die Augen hinhält. Will man es noch genauer haben, ſo legt man ein gefärbtes und weiſſes flaches Glas ſo auf einander, daß dazwiſchen eine weiſſe Scheibe Papier, welche unten eine Oefnung einer Linſen groß hat, zu liegen kommt. Dann in dieſem Fall werden die Gläſer, wenn ſie auch noch ſo ungleich gefärbt wären, der Deutlichkeit im Sehen nichts ſchaden, weil man nur durch einen ſehr kleinen Theil des gefärbten Glaſes hindurch ſchaut.

§. 419. **Erkl.** Ein Polyoptron iſt, dardurch man ein Object vervielfältiget ſieht; es wird nemlich ſo oft vervielfältiget, als das Objectivglas, das im Diameter etwa 3 Zoll haben, und im übrigen auf beeden Seiten flach ſeyn kann, Ecke oder Aushöhlungen bekommt.

§. 420. **Erkl.** Das Vas Hydromanticum iſt ein Inſtrument, das aus 2 hohlen Cylindern beſteht, die in der Mitte durch kein ſonderlich polirtes Glas verbunden werden. Die eine Cavität hat einen Spiegel unter einem Winkel von 45° applicirt, auf welchem ein kleiner Tubus mit einem Glas paſſet. Wenn man nun die obere Cavität mit Waſſer füllt, und in einem etwas finſtern Ort nach den äuſſern Objecten ſchauet, ſo werden ſie im Waſſer ſchwimmend vorgeſtellt werden.

§. 421. **Erklär.** Die verfinſterte Kammer, (Camera obſcura) iſt von eben dieſer Art, nur daß die andere Cavität nicht mit Waſſer ausgefüllt, ſondern ganz ſchwarz gefärbet wird, da dann die äuſſere Bilder ſich verkehrt darinnen zeigen werden.

§. 422. Erklär. Die Zauberlaterne, (laterna magica) iſt ein Inſtrument, durch welches kleine auf Glas gemahlte Bilder durch Hülfe einer Lampe und Hohlſpiegels, oder an deſſen Stelle eines convexen Glaſes an der Wand ungleich gröſſer repräſentirt werden. Der Grund davon iſt der folgende: Je näher das Licht am Bilde iſt, deſto gröſſer muß ſich ſein Gegenbild, und deſto weiter entfernt repräſentiren, und umgekehrt.

Viertes Hauptſtük, Von der Perſpectiv.

§. 423.

Erklärung.

Die Perſpectiv gehöret faſt eher zur Geometrie als zur Optik, deßwegen auch Herr Prof. Käſtner ſie bey der Geometrie abgehandelt hat: dann Flächen und Cörper werden in der Geometrie gezeichnet, und zwar ſo, wie ſie in das Geſicht fallen ſollen: Dieſes lehret nun die Perſpectiv, folglich ſiehet man ſchon die Urſache, warum ſie zur Geometrie gerechnet werden kann. Weil aber doch bey perſpectiviſchen Zeichnungen ein gewiſer Geſichtspunkt allemal nöthig iſt, und wenigſtens die Lehre vom Sehen in gerader Linie vorausgeſetzet wird, ſo kann man auch nach der Ordnung, die der Freyherr von Wolf beobachtet, dieſe Lehre als einen Theil der optiſchen Wiſſenſchaften anſehen.

§. 424. **Erklär.** Wann man die Perſpectiv recht gründlich lernen will, wie ſolche beſonders Mahler, Bildhauer und Baumeiſter wiſſen müſſen, ſo hat man auf 5 Stücke zu ſehen, nemlich 1. auf die Fundamentalgeſetze der ganzen Perſpectiv, welche auch der Herr von Wolf zum Theil vorträgt;

2. auf die ichnographiſche Zeichnung; 3. auf die orthographiſche Zeichnung; 4. auf die Zeichnung des Lichtes und Schattens, welches eine Hauptkunſt der Mahler iſt; und 5. auf die Zeichnung derer Figuren, welche nur in einem gewiſen Geſichtspunkt in ihrer rechten Geſtalt erſcheinen. Den erſten Punkt wollen wir vorzüglich erklären, das übrige aber nur kürzlich, ſo viel uns zu wiſſen nöthig iſt, berühren, und unter dem Haupttitel der practiſchen Perſpectiv zuſammen faſſen.

Geſchichte der Perſpectiv.

§. 425. Die Perſpectiv, in ſoferne ſie in die Mathematik gehört, iſt je und je mehr practiſch als theoretiſch vorgetragen worden. Die Alten waren in der Mahlerey groſſe Meiſter, und mußten dahero die Perſpectiv verſtehen; wir finden aber nicht viel Theorie dißfalls in ihren Schriften, ausgenommen, was in der Geometrie davon vorkommt, wohin man ſie auch rechnen kann.

§. 426. Unter den Deutſchen hat der berühmte Mahler Alb. Durer in ſeinem Buch vom Cirkel und Richtſcheid, welches zu den raren und guten Büchern gehört, auch in der Herzogl. Bibliothek hier in Stuttgart befindlich iſt, vorzüglich zur perſpectiviſchen Theorie Anleitung gegeben. Auſſerdem hat Joh. Franc. Niceron in ſeinem Thaumaturgo optico verſchiedene gründliche Beweiſe vorgetragen, die einen vergnügen können.

§. 427. Unter den Neueſten iſt Herr Prof. Käſtners Theorie beſonders zu empfehlen. Er hat ſie anfäng-

fänglich zu Leipzig in Quart als ein Programma druken laſſen; und hernach groſſentheils in ſeine Anfangsgründe der Mathematik eingerükt.

§. 428. In der practiſchen Perſpectiv iſt das im Jahr 1663 zu Paris herausgekommene Werk, unter dem Titel: la Perſpective practique in 3 Theilen anzupreiſen; Joh. Chriſtian Reinbold hat es ins Deutſche überſezt 1710. Es iſt aber Schade, daß er die Edition von 1642. und nicht die beſſere von 1663 von dieſem Werk überſezt hat; das franzöſiſche Original iſt dahero immer vorzuziehen. Auch wird zur architectoniſchen Perſpectiv Paul Deckert, Fürſtl. Baumeiſter, zu Zeichnung perſpectiviſcher Plafonds u. ſ. w. vorzüglich gerühmet.

Allgemeine Theorie der Perſpectiv und ihre Fundamentalgeſetze.

§. 429. Erkl. Die Fundamentalgeſetze der Perſpective werden aus der Figur beſonders erläutert. Man ſetzet nemlich *Fig.* 64. eine Tafel oder eine viereckigte Fläche überhaupt auf eine Horizontalfläche perpendicular. In einer gewiſen Entfernung iſt das Auge des Zuſchauers, von welchem eine Perpendicularlinie auf die Tafel gezogen wird, welche man die Diſtanzlinie nennt. Das Ende dieſer Linie heißt der Augenpunkt; der Durchſchnitt der Tafel mit der Grundfläche wird die Fundamentallinie genannt, und eine durch den Augenpunkt mit ihr parallel gehende Linie heißt die Horizontallinie, folglich ſind

OF = Diſtanzlinie.

KC = Fundamentallinie.
NI = Horizontallinie.
F = Augenpunkt.
I und N = Diſtanzpunkte.

Dieſe Erklärungen muß man ſich genau bekannt machen, wenn man die Gründe der Perſpectiv richtig einſehen will. Bey den Diſtanzpunkten merkt man noch, daß ihre Entfernungen vom Augenpunkt gleich angenommen werden; folglich

IF = FO.

Aus dieſen Definitionen laſſen ſich die Fundamentalgeſetze aller perſpectiviſchen Zeichnungen erweiſen, wie ſolches Herr Prof. Käſtner nebſt andern in ihren Schriften gezeigt haben, und wie wir den Beweis ſelbſten geben werden, dann der Freyh. von Wolf hat ihn nur practiſch ausgeführt.

Wir wollen zu dem Ende 4 allgemeine algebraiſche Formuln, welche aber aus blos geometriſchen und arithmetiſchen Gründen ſich erweiſen laſſen, folglich zu verſtehen gar nicht ſchwer ſind, aus einer allgemeinen Figur herleiten. *Fig.* 63.

Es ſeye LM das Bild, das man perſpectiviſch vorſtellen will, ſo wird KI ſeine perſpectiviſche Projection ſeyn, woferne O der Ort des Auges iſt, TN die Fundamentallinie, und TR ein Durchſchnitt von der durchſichtigen Tafel iſt: Man ziehe die Linie OL und OM als Strahlen von dem Bilde LM die ins Auge kommen. Von O ziehe man die Perpendicularlinie OR auf den Durchſchnitt der Tafel: Von eben dem Auge O ziehe man auf die Fundamentalfläche den Perpendikel OS herab, hernach vereinige man die Punkte S und T durch die Linie

nie ST, ferner die Punkte S und M durch die Linie SM. Aus dem Punkt M ziehe man mit ST die Parallellinie MN, ſo hat man zwey ähnliche Triangel TWS und WMN. Von R ziehe man nach N die Linie RN, und durch den Durchſchnittspunkt I den Perpendikel WI, ſo kann man die Linien IW, IK, TW und WN finden.

§. 430. Lehrſatz. Wenn man ſetzet

$OS = a$

$ST = OR = d$

$MN = \delta$, ſo iſt IW, das man ſuchen will, aus dieſen gegeben Stücken leicht zu finden.

Satz. $IW = \frac{a\delta}{a+\delta}$

Bew.

$STW \backsim WMN$ alſo

$MW : SW = MN : ST$ und

$MW : MW + WS = MN : MN + ST$ das iſt

$MW : MS = MN : MN + ST$ und invertendo

$MN + ST : MN = MS : MW$ das iſt, in kleinen Buchſtaben

$\delta + d : \delta = MS : MW$ aber

$OS : IW = MS : MW$ folglich

$\delta + d : \delta = OS : IW$
$= a : IW$ alſo $IW = \frac{a\delta}{\delta + d}$

§. 431. Lehrſatz. Wenn man die Fundamentallinie $TN = n$ nennet, ſo kann man TW finden.

Satz.

Satz. $TW = \frac{nd}{d+\delta}$

Bew.

Es ſey $TN = n$ ſo iſt

$TW : TS = WN : MN$

$TW : WN = TS : MN$

$TW : TW + WN = TS : TS + MN$ oder invert.

$TS + MN : TS = TW + WN : TW$ d. i. in Buchſt.

$d + \delta : d = n : TW$ folglich

$$TW = \frac{nd}{d+\delta}$$

§. 432. Lehrſatz. Aus dem Bild LM kann man die Projectionslinie KI finden.

Satz. $IK = \frac{\alpha d}{d+}$

Bew.

Es ſey $IK = Z$, $LM = \alpha$ ſo iſt

$OM : OI = LM : IK$

$OM : OI = SM : SW$

$SM : SW = d + \delta : d$ nach §. 431. folglich

$LM : IK = d + \delta : d$ das iſt

$\alpha : Z = d + \delta : d$ oder

$d + \delta : d = \alpha : Z$

alſo IK oder $Z = \frac{\alpha d}{d+\delta}$

§. 433. Lehrſatz. Eben ſo läßt ſich die Linie WN finden, wenn man TW von TN ſubtrahirt.

Satz. $WN = \frac{n\delta}{\delta + d}$.

Bew.

Bew.

$NT - WT = WN = \frac{n - nd}{d + \delta}$ unter einerley Benennung

alſo $WN = \frac{nd + n\delta - nd}{d + \delta}$ folglich weil nd—nd ſich aufhebt $WN = \frac{n\delta}{d + \delta}$

§. 434. Zuſatz. Weil die Triangel ORI und IMN einander ähnlich ſind, ſo iſt auch

$$\begin{aligned} MN : OR &= NI : IR \\ OR &= ST \\ \hline MN : ST &= NI : IR. \end{aligned}$$

das iſt in Buchſtaben

$\delta : d = NI : IR.$

§. 435. Zuſatz. Aus obiger Proportion folgt

$\delta + d : \delta = NI + IR : NI$

das iſt $\delta + d : \delta = NR : NI$ folglich

$$NI = \frac{NR . \delta}{\delta + d}$$

§. 436. Zuſatz. Weil RTN ein rechtwinklichtes Dreyeck iſt, und RT = OS, ſo iſt NR nach dem Pythagoriſchen Lehrſatz $= \sqrt{OS^2 + TN^2}$. Da nun OS = a und TN = n geſezt wurde, ſo iſt allemal $NR = \sqrt{(a^2 + n^2)}$.

§. 437. Anm. Wenn man die obige Lehrſätze mit ihren Zuſätzen recht verſteht, ſo kann man alle perſpectiviſche Zeichnungen ohne viele Mühe auf das Papier bringen, und zugleich den Beweis geben, warum Würfel, Quadrate, Dreyecke, Cirkelflächen ꝛc. in der gegebenen Diſtanz ſo und nicht anders ausſehen und gezeichnet werden müſſen, wie im folgenden was davon geſagt werden ſolle.

Von

Von dem Schatten.

§. 438. **Erkl.** Ein Haupttheil der Perſpectiv beſchäftiget ſich vornemlich mit dem Schatten, welcher nach der verſchiedenen Lage der Cörper gegen die Sonne beſtimmt werden muß. Es gibt zweyerley Schatten: der eine iſt der ganze Schatten, der andere iſt der halbe Schatten. Jener iſt ſchon in der Erklärung der optiſchen Wiſſenſchaften vorgekommen. Dieſer entſteht, wenn ein leuchtender Punkt höher als der andere angenommen wird, da dann ein Theil des Schattens dunkler, der andere etwas heller beſtimmt wird.

§. 439. **Anm.** Die Handgriffe zum Schattiren gehören eigentlich nicht in die mathematiſche Wiſſenſchaften, als welche ſich blos mit den geometriſchen Zeichnungen beſchäftigen; man muß ſie alſo anderswo lernen, wie man dann verſchiedene Bücher davon hat, davon wir oben in der Geſchichte dieſer Wiſſenſchaft gehandelt haben.

§. 440. **Lehrſatz.** Wenn *Fig.* 66. das Licht in L, der Cörper in ACB, ſo läßt ſich der Schatten beſtimmen. Dann man ziehe vom leuchtenden Punkt durch die Spitze des Cörpers die gerade Linie LM, ſo wird BM die Länge des Schattens ſeyn.

§. 441. **Zuſatz.** In perſpectiviſchen Aufriſſen und orthographiſchen Projectionen geben die Baumeiſter die Regel, man ſolle den Schatten unter einen Winkel von 45° verzeichnen; das iſt, der Winkel LMB ſoll 45° ſeyn; weil, wenn die Sonne ſo hoch ſteht, der Schatten am beſten ſich zeiget.

§. 442. Fällt der Schatten an eine Wand, *Fig.* 66. ſo iſt TO die Länge des Schattens, wo nemlich die Linie LM die Wand in O ſchneidet.

§. 443.

§. 443. Zuſatz. Wäre der Cörper eckigt, z. E. ein Cubus, ſo muß man von allen Ecken die Linien ziehen, wenn man den Schatten nicht nur nach der Länge, ſondern nach ſeiner ganzen Ausdehnung zeigen will, wobey man auch den Halbſchatten anbringen kann.

Etwas von dem Practiſchen in der Perſpectiv.

§. 444. Erkl. Eine orthographiſche Projection eines Gebäudes iſt die Abbildung, wie ſie in das Aug fällt, wenn ſeine Weite von der Tafel in Vergleichung mit den übrigen Gröſſen, unendlich groß angenommen wird.

§. 445. Zuſatz. In *Fig.* 69. bedeuten die Punkte H, N, R eben das, was ſie *Fig.* 63. bedeuten. R iſt der Augenpunkt, G, g ſind Diſtanzpunkte wo $RG = Rg$; und GRg mit der Fundamentallinie parallel. Folglich iſt in der orthographiſchen Projection RG mit EG parallel, und I fällt in die Fundamentallinie, und zwar mit dem Punkt N zuſammen; alſo iſt $NI = 0$, $= \frac{NR.\delta}{\infty}$ nach der Formel §. 434.

§. 446. Zuſatz. Wenn das Objekt an der Tafel liegt, wird $\delta = 0$, folglich auch NI; das Aug mag ſich befinden wo es will.

§. 447. Lehrſatz. Man kann eine jede Horizontalfläche, z. E. ein Dreyeck *Fig.* 64. oder ein Viereck, darinn noch ein anders beſchrieben iſt *Fig.* 65. nach den gegebenen Regeln durch eine perſpectiviſche Projection vorſtellen. Dann es ſey *Fig.* 64. das Dreyeck ACB, ſo wird acb ſeine perſpectiviſche Projection ſeyn; wenn DE die Fundamentallinie, A1 die Weite des Dreyecks von der Tafel, HK die Horizontallinie,

und V den Augenpunkt, VK den Diſtanzpunkt anzeigt; dann wo die von V nach 1, 2, 3, und von K nach l, A, B gezogene Linien einander durchſchneiden, wird die perſpectiviſche Projection ſeyn. Eben ſo iſt *Fig.* 65. wo das Quadrat unmittelbar an der Tafel liegt, die perſpectiviſche Projection cABd vom groſſen, und hgMi vom innern kleinern Quadrat; die Diſtanzpunkte ſind L und K.

§. 448. Zuſatz. Auf dieſe Weiſe kann ein jedes anders Vieleck, auch das Unendlicheck, oder der Cirkel ins Perſpectiv gebracht werden.

§. 449. Anm. Eben ſo laſſen ſich Wände, Pfeiler, ganze Gemächer, Thüren, Fenſter u. ſ. w. ins Perſpectiv bringen; wie *Fig.* 67. wo V der Augenpunkt, K, L die Diſtanzpunkte, AB die Fundamentallinien, worauf die Dicke der Mauren AB, 3.1 und ihre Höhen AD, 3.6 getragen werden; von D und 6 werden nach dem Augenpunkt V die Linien DV, 6V getragen; und wann der Boden oder das Vierek AFH3 ins Perſpectiv gebracht iſt, ſo richtet man auch vor F und H Perpendicularlinien auf, welche E und G geſchnitten und die Linie EG geben werden; ſo hat man die Wände und die obere Decke perſpectiviſch. Soll eine Thüre in der Wand gezeichnet werden, ſo trägt man aus A nach N die Weite oder Entfernung von der Mauer, aus N nach I die Breite der Pfoſten, aus I nach L die Breite der Thüre, und aus L nach M die Breite des andern Pfoſten, und zieht von dieſem Punkten aus in den Diſtanzpunkt K gerade Linie, ſo bekommt man ihre perſpectiviſche Breiten; aus A trägt man nach O die Höhe der Thür, und ziehet von O in den Augenpunkt V die Linie OV, ſo hat man ihre perſpectiviſche Höhe; welche ſich nun durch Perpendicularlinien aus den Durchſchnitten n, i, l, m ganz geben wird. Eben ſo läßt ſich die andere Thür bey V zeichnen, wenn man ihre Entfernung von der andern Wand aus A nach R, und aus R nach T ihre Breite trägt; die in den Augenpunkt gezogene Linien RV, TV geben die Breite im Perſpectiv, durch die Durchſchnitte in r und t. AO iſt die Höhe, deren Perſpectiv ſich durch die mit EG parallel gezogene Linie aus dem Punkt Z beſtimmen läßt; die Zeichnung des Fenſters wird aus der Figur auf eine ähnliche Weiſe begreiflich.

Die

Die
aſtronomiſche
und von der Aſtronomie abhangende
Wiſſenſchaften,
oder
die Aſtronomie im eigentlichen Verſtand, die Geographie, die Chronologie und die Gnomonik.

Erſtes Hauptſtük,
von der Aſtronomie.

§. 450.
Erklärung.

Die Gegenſtände und Cörper, die wir am Himmel ſehen, weit über unſere Atmoſphäre hinaus, haben verſchiedene Gröſſen, Entfernungen und Bewegungen; da nun die Gröſſe, die Entfernung und die Bewegung der Cörper ausgemeſſen werden kann, ſo iſt die Aſtronomie, die ſich damit beſchäftiget, eine den Menſchen ſehr mögliche Wiſſenſchaft; und wer die bisherige Gründe der reinen und angewandten Mathematik wohl inne hat, der wird finden, daß die Aſtronomie unter allen Wiſſenſchaften der angewandten Mathematik diejenige ſeye, welche beſonders in unſern Tagen am gründlichſten und zuverläßigſten vorgetragen werden könne. Denn die Aſtronomie iſt diejenige Wiſſenſchaft, welche alles was am Himmel ausgemeſſen werden kann, nemlich die Gröſſe, die Bewegung und die Entfernung der himmliſchen Cörper von uns und von einander, beſtimmen und ausmeſſen lehrt. Sie theilet ſich in die ſphäriſche und theoriſche Aſtronomie ein; die ſphäriſche ſetzet vornemlich die ſphäriſche Trigonometrie voraus, als welche blos der

Aſtronomie ihr Daſeyn zu danken hat, und zeiget, wie uns die himmliſche Cörper in ihren Bewegungen und Gröſſen optiſch erſcheinen und vorkommen. Die theoriſche aber entdekt die Gründe der optiſchen Erſcheinungen am Himmel, und beſtimmet alſo die Gröſſen, Entfernungen und Bewegungen am Himmel, ſo, wie ſie in der That und wirklich ſind.

§. 451. Wir werden dahero nach dieſer ſchon lang eingeführten Abtheilung beedes die ſphäriſche und theoriſche Aſtronomie in zwey beſondern Capiteln vortragen, zuvor aber die Geſchichte der Aſtronomie kürzlich erzehlen.

Die Geſchichte der Aſtronomie.

§. 452. Die erſte Anfänge der Aſtronomie darf man billig in den älteſten Zeiten der Welt ſuchen. Es iſt nicht nur ein Gedanke vom Herrn le Pluche, in ſeiner Hiſtoire du Ciel, ſondern ein beynahe erwieſener Satz, daß die nach der Sündfluth verſammelte Väter der zweyten Welt in der Ebene von Sinear, welche gleichſam ein von der Natur zugerichtetes Obſervatorium war, den Lauf der Sonnen durch den ſogenannten Thierkraiß oder die zwölf Zeichen am Himmel bemerkt und ihre Benennungen und Figuren eingeführt haben, und zwar zu einer Zeit, da die Bilderſprache und Schrift noch gemeiner als die Buchſtabenſchrift war, und in einer Weltgegend oder Clima, das von dem Egyptiſchen, kraft der eingeführten Benennung, um ein merkliches unterſchieden war, und überhaupt mit dem Sinearitiſchen Felde am beſten ſich vergleichen läßt.

läßt. Denn z. E. das Zeichen der Jungfrau oder der Aehrenleſerin mit der Aehre in der Hand, ſchikt ſich nicht für Egypten, weil um ſelbige Zeit in Egypten die Felder überſchwemmt waren, und folglich an keine Erndte den ganzen Monath über zu denken war; hingegen im Felde Sinear konnte man erndten, und die von den Sineariten an den Himmel geſezte Schnitterin war das Zeichen der Erndte. Von dieſen alſo können wir die Benennung der zwölf himmliſchen Zeichen eher herleiten.

§. 453. In folgenden Zeiten haben ſich beſonders die Griechen hervor gethan; dann die vorgegebene Obſervationen der alten Chineſer ſind ſehr ungewiß, und können dahero hier übergangen werden; unter den Griechen iſt **Thales**, **Meton** und **Euctemon**, dieſe werden unter die älteſte Obſervatores gezehlt. In ſpätern Zeiten hat ſich **Hipparchus** zu Alexandrien einen Nahmen gemacht; auf ihn folgte in einer Zwiſchenzeit von etlich hundert Jahren **Claudius Ptolemäus**, der im andern Jahrhundert nach Chriſti Geburt obſervirte, doch ſo, daß ſeine Obſervationen von den Hipparchiſchen gar zu weit verſchieden ſind, und man ſie, bey Beſtimmung des Jahres, mit den Hipparchiſchen zugleich nicht gebrauchen kann.

§. 454. Anm. Dieſer Ptolemäus war der erſte, von dem wir noch ein vollſtändiges aſtronomiſches Werk haben, das er unter dem Titel: Μεγαλη Συνταξις, (Compoſitio magna.) geſchrieben, jezo aber unter dem arabiſchen Nahmen Almageſtum bekannt iſt. Denn der Saraceniſche Caliph Maimon ließ im Jahr Chriſti 827 das Ptolemäiſche Werk ins Arabiſche überſetzen, weil um ſelbige Zeit, wie wir ſchon anderswo angemerkt haben, die Saracenen vor den Chriſten, wie in andern alſo auch in den aſtronomiſchen Wiſſenſchaften, einen Vorzug hatten. Aus dem arabiſchen Exemplar wurde dieſes Almageſt 1528. da die Wiſſenſchaften

unter den Chriſten wieder empor kamen, von Georgio von Trapezunt in das Lateiniſche überſezt und zu Neapel gedrukt. Damit aber auch Anfänger es nutzen könnten, ſo hat nachgehends Georg Purpachius, Kayſerl. Aſtronom zu Wien, es in beſſere Ordnung zu bringen und zu erläutern geſucht; er ſtarb aber über dieſer Arbeit, welche doch nachgehends ſein geweſener Schüler, Johannes Regiomontanus oder Joh. Müller von Königshofen vollendete; das Werk kam 1543 zu Nürnberg und 1550 zum zweytenmal heraus; der Titel iſt: In Ptolemæi Magnam compoſitionem, quam Almageſtum vocant, libri tredecim. Worinnen das was die Alten wußten und glaubten, ausführlich vorgetragen wird.

§. 455. Im neunten Jahrhundert nahmen die aſtronomiſche Wiſſenſchaften, wie alle übrige, ihren Zug nach Arabien zu den Saracenen. Die vornehmſte Obſervatores unter ihnen waren Albategnius im Jahr 882 und folgenden, Ulug Beigh, des groſſen Tamerlans Enkel, 1437 u. ſ. w. wie dann von dieſen arabiſchen Aſtronomen die arabiſche Benennung ſo vieler Sterne herkommt, die man noch beybehält; z. E. der Fomahan, der Alcor, das Reuterlein, oder kleine Sternlein auf dem mittlern Stern des Schwanzes im groſſen Bären; daher die Araber von einem Solitierrichter noch jezo das Sprichwort haben: Du haſt das Reiterlein geſehen, aber nicht den vollen Mond; Aldebaran, oder das Ochſenaug; u. ſ. w. auch ſelbſt der Calender Nahme Almanach hat von den Arabern ſeinen Urſprung.

§. 456. Im fünfzehenden Jahrhundert fiengen die Chriſten wieder an, das verſäumte herein zu bringen. Die vornehmſte ſind Georg Purbachius, Joh. Regiomontanus, Joh. Werner und Bernhard Walter; lauter Deutſche; dann die andern Nationen haben ſich nicht ſo ſehr um die Aſtronomie verdient gemacht; wie man dann auch die ganze heutige Aſtronomie nach ihren erſten Gründen zween Deutſchen, dem Copernicus und dem Keppler zu danken hat, von denen wir ſogleich reden werden. Die Obſervatores im ſechszehenden Jahrhundert waren Nic. Copernicus, vornemlich aber Tycho de Brahe, und der Landgraf Wilhelm von Heſſen. Da wir bisher die vornehmſte Obſervatores genannt, ſo wollen wir die folgende bis auf unſere Zeiten noch nennen; unter den Deutſchen iſt noch Scheiner, Hevel und Kirch: unter den Franzoſen beede Herrn de la Hire, Herr Caſſini de Thury; in Italien Ricciolus, Marius, der ältere Caſſini, der zwar ſeine meiſte Zeit in Frankreich zubrachte, der noch lebende Hr Zanotti; in England Horoccius, Flammſtedt, Bradley; in Dännemark nach dem Tycho Brahe, Olaus Römer, Horrebov und andere berühmt.

§. 457. Wir fahren in der Geſchichte fort, und melden, daß Copernicus das wahre Planetenſyſtem ent-

entdekt, nach welchem die Erde und alle Planeten ſich um die Sonne herum bewegen; vorher hatte man das Ptolemäiſche, in welchem die Erde der Mittelpunkt war, um welchen die Sonne, Planeten und alle Sterne in concentriſchen Kranſen ſich täglich herum bewegen ſollten; Tycho de Brahe erfande, wegen dem damaligen Widerſpruch aus den unrichtig gefaßten Schriftſtellen, eine Auskunft, nach welcher die untere Planeten ſich unmittelbar um die Sonne, mit der Sonne aber zugleich mittelbar um die Erde bewegten; er hatte aber viel zu viel aſtronomiſche Einſicht, als daß er das Copernikaniſche Syſtem dem ſeinigen nicht weit vorziehen ſollte; zugleich aber war ſeine Achtung für die heil. Schrift auch ſo groß, daß er blos aus dieſem Grund ſein Syſtem ausdachte; welches an ihme um ſo eher zu loben, als man damals, obwohl irrig, glaubte, die heil. Schrift müſſe ſo ausgelegt werden, wie die Anticoperikaner behaupteten. Dahero alle Aſtronomen, die gegen das Wort GOttes Achtung hatten, damals verbunden waren, den Tychoniſchen Weltbau vorzuziehen; heutzutag aber, nachdem man in der exegetiſchen Gottesgelehrſamkeit ungleich weiter gekommen, iſt der nur damals unvermeidliche Irrthum kein unvermeidlicher Irrthum mehr, und man kann mit unverlezter Hochachtung gegen die heil. Schrift den Copernikaniſchen Weltbau annehmen; ich habe davon in meiner vollſt. Einleit. in die Religion und geſammte Theologie II Band. III Hauptſt. V Abſchn. das weitere gemeldet.

§. 458. So viel man dem Copernicus zu danken hat, ſo hat man doch dem Joh. Keppler, einem

gebohrnen Wirtemberger, und nachgehends Kayſerlichen Mathematico, ungleich mehr zu danken, indeme er die Bewegung der himmliſchen Cörper zuerſt entdekt, und ſodann dem groſſen Newton Gelegenheit gegeben, ſelbige aus den innerſten Gründen der Mechanik zu demonſtriren.

§. 459. Anm. Herr Prof. Käſtner hat vor verſchiedenen Jahren eine Rede zum Lob der Sternkunſt geſchrieben; ſie iſt ins Hamb. Magazin 1. B. S. 206 folgg. eingerükt. Ich will einiges davon anführen: „Newton ſelbſt, ſagt er, hat den groſſen Keppler für ſeinen Lehrmeiſter erkannt! Ach daß ich Kepplers Nahmen zu unſrer Schande nennen muß! Deutſchland, die fruchtbare aber nachläßige Mutter groſſer Geiſter, ließ Kepplern mit Armuth und Elend ſtreiten, da er im Begriff war, den Himmelscörpern Geſetze vorzuſchreiben; — — — — Undankbares Vaterland, wäreſt du wohl eines Newtons würdig geweſen! - - Gedenke daran, daß alle Fremden vom Kopernikus den wahren Weltbau, und von Kepplern die Geſetze der himmliſchen Bewegungen, von zween Deutſchen die Gründe der ganzen Sternkunſt gelernet haben?„

§. 460. In dem gegenwärtigen Jahrhundert hat man auf die entdekte Gründe weiter gebauet, und die Aſtronomie zur höchſten Vollkommenheit gebracht. Newton machte ſich durch ſeine Monds-Theorie, deren Allgemeinheit und Richtigkeit Herr Clairaut in der von der Petersburg. Kayſerl. Academie der Wiſſenſchaften 1752 gecrönten Preisſchrift weiter erwieſen hat, wie durch ſeine andere Entdekungen einen unſterblichen Nahmen; Jac. Bradley wendete die von Olaus Römer zu Coppenhagen zuerſt entdekte allmählige Fortpflanzung des Lichtes auf die Theorie der Aberration der Fixſterne an, die vorher ſo eine ſchwere Aufgabe war; der zu früh verſtorbene Herr Prof. Tob. Mayer zu Göttingen, ein gebohrner Wirtemberger, hat die Tabellen der Sonne und des Monds berechnet, welche alle Ausländer

der für die beſte halten, die man jemals berechnet habe; die Cometen-Theorie, deren erſte Gründe auch ein Deutſcher, Nahmens Dörfel, ein Pfarrer im Voigtland, entdekt, ein Newton erwieſen, ein Euler in der Theoria motuum Planetarum & Cometarum verbeſſert, hat ebenfalls zu unſern Zeiten ein neues Licht bekommen. Alle dieſe Erweiterungen der aſtronomiſchen Wiſſenſchaften hat der für die Sternkunſt vor kurzer Zeit zu früh verſtorbene Aſtronom zu Paris, Herr Abbt de la Caille in ein Lehrbuch gebracht, das man zur gegenwärtigen Zeit für das beſte anpreiſen darf, und wornach wir auch im folgenden uns groſſentheils gerichtet haben.

Erſtes Capitel, Von der ſphäriſchen Aſtronomie.

§. 461. Erklärung.

Wenn man ſich das ganze Weltgebäude als eine hohle Kugel vorſtellet, an deren Fläche von innen alle Sterne angeheftet ſich um die Axe drehen, und in deren Mitte das Auge des Zuſchauers ſich befindet, ſo hat man einen Begriff von dem, was man unter dem Nahmen der ſphäriſchen Aſtronomie ſagen will.

§. 462. Anm. Wenn man alſo wiſſen will, was zur ſphäriſchen Aſtronomie zu wiſſen nöthig iſt, ſo muß man ſich in der ſphäriſchen Trigonometrie, die wir im erſten Theil vorgetragen, ſchon umgeſehen haben, und zugleich ſich die zu den Obſervationen nöthige Hülfsmittel bekannt machen.

§. 463. Erklär. Ein Beobachter, der nach §. 461. die Welt betrachtet, und ſich nach der ſphäriſchen oder optiſchen Stellung in ihrem Mittelpunkt zu ſeyn einbildet, muß ein freyes Zimmer haben, das gegen allen vier Theilen der Welt einen ungehinderten Proſpect hat, und wegen der zu ziehenden Mittagslinie auf einem veſten dauerhaften und alten Mauerwerk ruhet, bey dem keine Gefahr zu ſenken iſt, und die Veränderungen der Witterung nichts mehr vermögen; in dieſem Zimmer ſind ein guter Quadrant und eine Penduluhr zwey unentbehrliche Inſtrumente, woferne er genau obſerviren will. Wenn oberhalb des Zimmers eine freye Gallerie iſt, wo er die Halbkugel des Himmels ganz überſchauen kann, ſo dient ſie ihm, die Beobachtungen der nahe am Zenith culminirenden Sterne zu erleichtern, und überhaupt die Sterne beſſer kennen zu lernen. Das untere Zimmer aber iſt das Hauptzimmer, auf deſſen Veſtigkeit und freyen Proſpect man zu ſehen hat; und wenn man eines entbehren muß, ſo iſt das obere ungleich eher als das untere zu entbehren; dahero diejenige fehlen, die in Erbauung eines Obſervatorii nur auf die obere dem freyen Himmel ausgeſezte Gallerie das meiſte verwenden, das untere Hauptzimmer aber in Abſicht auf den Raum, Veſtigkeit, und nöthige Bequemlichkeit zum Obſerviren, auch zu Verwahrung der Inſtrumente, die unter freyem Himmel verderben würden, hie und da mit weniger Sorgfalt bauen. Dieſes vorausgeſezt, wollen wir nun das nöthigſte von der ſphäriſchen Aſtronomie vortragen.

Die

Die Kenntniß der Fixſterne, nach ihrer Lage und täglichen Bewegung.

§. 464. Erfahr. Bey einigen ſchönen Nächten betrachtet ein Zuſchauer den geſtirnten Himmel mit aller Aufmerkſamkeit, und findet bald, daß die meiſte Sterne, die am ganzen Himmel herum zerſtreut ſind, einerley Lage gegen einander haben, einige wenige aber ihre Lage verändern, und ſich um die Sonne mit ungleichen Geſchwindigkeiten herum bewegen. Er nennet daher die erſtere Fixſterne, die andere Irrſterne oder (griechiſch) Planeten.

§. 465. Zuſatz. Die Fixſterne wird alſo ein ſorgfältiger Zuſchauer um ſo eher nach ihrer Lage und Ordnung genau beſchreiben, in Sternbilder verwandeln, und eine Verzeichniß davon geben, weil er die Bewegung der Planeten hernach gegen dieſelbe vergleichen und deſto beſſer beſtimmen kann.

§. 466. Zuſ. Auf dieſe Weiſe hat man nicht nur die Fixſterne nach ihrer ſcheinbaren Gröſſe, ſondern auch nach ihrer Lage wirklich beſtimmt. Was die Gröſſe betrift, ſo hat man ſie in Sterne der erſten, zweyten, dritten bis auf die ſechste Gröſſe eingetheilt; in Rukſicht aber auf ihre Lage hat man eine gewiſſe Anzahl Fixſterne jedesmal zuſammen genommen, ſelbige mit einer Figur verglichen, und z. E. ſolche den Herkules, oder den Orion u. ſ. w. genannt.

§. 467. Anm. Die Alten haben dem zu Folge den ihnen bekannten Himmel in acht und vierzig Conſtellationen oder Sternbilder eingetheilt; ſie ſind von dem Nordpol an gerechnet, der kleine und groſſe Bär, der Drach, Cepheus, Caſſiopea, Andromeda, Perſeus, Bootes, die nordliche Krone, Herkules, die Leyer, der Schwan, der Schlangenträger, (Ophiuchus) die Schlange, der Pfeil, der Adler, der Antinous, der Delphin, das kleine Pferd, der Pegaſus, der nordliche Triangel, die

zwölf

zwölf Zeichen des Thierkrayſes, die bekannt ſind und unten vorkommen, der Wallfiſch, der Orion, der Fluß Eridanus, der Haaſe, der groſſe Hund, der kleine Hund, das Schiff Argo, die Waſſerſchlange, (Hydra) der Becher, der Rabe, der Centaur, der Wolf, der Altar, die ſüdliche Krone, der ſüdliche Fiſch.

§. 468. Anm. Das waren die alte Conſtellationen; ſeit dreyhundert Jahren, nachdem man mehrmalen die ganze Welt umſchiffet, ſind noch zwölf gigen den Südpol hinzugekommen, die neuerlich der Herr Abbt Caille genau beſchrieben hat; ſie ſind der Pfau, die Biene, der Phönix, der Goldfiſch (Dorado), der fliegende Fiſch, die männliche Waſſerſchlange, der Cameleon, der Paradisvogel, die amerikaniſche Gans, (Toucan) der ſüdliche Triangel, und der Indianer.

§. 469. Anm. Einige kleinere Sterne ſind von den Alten zerſtreut gelaſſen worden (Sporades) welche die neuere in Sternbilder verfaßt; Hevel hat den kleinen Löwen, den Luchs, die Jagdhunde und den ſobieskiſchen Schild, Halley die königliche Eiche, und Kirch die ſächſiſche Churſchwerdter hinzugethan.

§. 470. Anm. Die einzele Sterne hat Bejer in jedem Sternbilde mit den griechiſchen Buchſtaben benamſt, nach welchem ſich alle ausländiſche Aſtronomen richten; es iſt dahero ſeltſam, daß Doppelmaier in ſeinen Sterncharten, die für Anfänger ſonſt gut ſind, gerade andere Buchſtaben ſtatt der Bejeriſchen geſezt; und man würde wohl thun, wenn man entweder den Bejeriſchen Atlas wieder auflegte, oder den Doppelmaieriſchen nach demſelben änderte.

§. 471. Anm. Einige Sterne haben beſondere Nahmen erhalten, die man alſo nicht mit Bejers Buchſtaben zu bezeichnen nöthig hat. z. E. Das Auge des Stiers, (Palilicium) die Hyades auf der Stirne und die Plejades, oder das Siebengeſtirn auf dem Halſe des Stiers, Caſtor und Pollux in den Köpfen der Zwillinge; (Præſepe) die Krippe, im Krebs, cor leonis oder Regulus, im Löwen; ſpica virginis und Vindemiatrix; jener in der Hand dieſer auf den Schultern der Jungfrau; Antares, das Scorpionherz; Fomahant im Mund des ſüdlichen Fiſches; Sirius der Hundsſtern; Alior der Reuter, ein Sternlein über dem mittlern Stern im Schwanz des groſſen Bären, und endlich noch beſonders der Polarſtern der äuſſerſte im Schwanze des kleinen Bären.

§. 472. Lehrſatz. Man lernt die Nahmen und Lage dieſer Sterne am Himmel wirklich am beſten und leichteſten kennen, wenn man in einer heitern Nacht diejenige Sternbilder, die jedermann, auch gemeine Leute wiſſen, z. E. die vom Volk sogenann-

nannte Glukhenne, welche bey den Aſtronomen die Plejades ſind, am Hals des Stiers, oder den Jacobsſtab, drey Sterne in gerader Linie im Orion, das Schwerd des Orions, oder den Wagen am Himmel, aſtronomiſch den groſſen Bären, am Himmel ſuchet; hernach ſucht man ſie auch auf den Charten, wie die Flamſtedtiſche, Halleyiſche, Bejeriſche, auch Doppelmayeriſche ſind, die man aber nach den Bejeriſchen corrigiren muß, damit man einerley Sache nicht zweymal lernen darf §. 470. oder endlich nur auf einem Globo oder Himmelskugel, und bemerkt die Nahmen der übrigen Conſtellationen um dieſe bekannte herum, die man auch wieder an dem Himmel ſelbſt in einer andern heitern Nacht aufſuchet; mit welcher Arbeit man ſo lange fortfährt, bis man alle kennet, die uns aufgehen. Oder man kann auch einen aſtronomiſchen Calender zu dem Ende gebrauchen, in welchem von Tag zu Tag die Sterne ſtehen, die eine Stunde nach der andern aufgehen; wobey man auch den Vortheil hat, die Planeten, deren Ort auf jeden Tag auch beſtimmt iſt, mit kennen zu lernen. Nur muß man, wie im folgenden gezeigt wird, auch die Kunſt verſtehen, ſolch einen Calender, z. E. den Nürnbergiſchen, für den Ort, wo man wohnt, brauchbar zu machen, ſonſt würde man die Sterne unrichtig lernen; dahero die erſte Methode für einen Anfänger, der weiter gar nichts in der Aſtronomie weiß, die beſte iſt.

Die Kenntniß der Planeten nach ihrer Lage und Bewegung.

§. 473. **Erfahr.** Ein ſorgfältiger Zuſchauer des geſtirnten Himmels wird bald mit bloſſen Augen fünf,

fünf, oder wenn er die Erde mit darunter rechnen will, ſechs Planeten, die ſich um die Sonne bewegen, entdecken; man hat ihnen folgende Nahmen und Zeichen gegeben:

Mercurius	Venus	Erde	Mars	Jupiter	Saturnus
☿	♀	♁	♂	♃	♄

§. 474. Erf. Er bemerkt ferner, daß die Erde immer mit einem kleinen Licht begleitet iſt, welches der Mond ☾ heiſſet; und wenn er gewafnete Augen hat, das iſt, Fernröhren gebraucht, ſo wird er um den Jupiter vier, und um den Saturn fünf ſolche Monde, die man Jupiter- und Saturnus-Trabanten nennet, entdecken.

§. 475. Erf. Durch Hülfe der Fernröhre wird er Flecken in den Hauptplaneten bemerken, das iſt, Oerter, die dunkler als andere ſind, welche ſich von einem Rand zum andern bewegen, ſodann verſchwinden, und nach einiger Zeit auf dem andern Rand wieder hervorkommen, woraus er den Schluß machen wird, daß die Planeten ſich um ihre Axe drehen, neben dem, daß ſie ſich in gewiſſer Zeit um die Sonne wälzen; die erſte Bewegung heißt die tägliche Bewegung (motus diurnus) Rotation; die andere die jährliche Bewegung oder Revolution.

§ 476. Zuſatz. Wenn alſo der Beobachter oder Aſtronom, nach dem Raum und der Zeit die Bewegungen der Planeten genau wiſſen will, ſo muß er nothwendig zweyerley Inſtrumenten haben; das eine iſt ein Cirkel oder ein Theil eines Cirkels, der genau in ſeine Grade, Minuten und Secunden eingetheilt iſt, damit er die am Himmel durchloffene Bögen abmeſſen kann mit einem Fernrohr; das

andere iſt eine Uhr, deren Bewegung gleichförmig iſt, und welche die Stunden, Minuten, Secunden oder Zeit auf das genaueſte anzeigt.

§. 477. Anm. Auf dieſe Weiſe hat man gefunden, wie viel Zeit die Planeten brauchen, bis ſie ihre jährliche Revolution, das iſt, ihren Umlauf von einem Firſtern bis wieder dahin, und auch ihre tägliche Bewegung oder ihre Rotation vollenden.

	Jährliche Bewegung.			Tägliche Bewegung.
☿	87 Tag.	23 St.	$15\frac{1}{2}$ Min.	" 0
♀	224	20	$5\frac{1}{2}$	23 St. 20′
♁	365	6	$9\frac{1}{4}$	23 St. 56′4″
♂	686	23	$30\frac{1}{2}$	24 St. 40′
♃	4332	12		9 St. 56′
♄	10759	8		

Bey dem Merkur, der zu klein, und bey dem Saturn, der zu weit entfernt iſt, hat man die Obſervation in Rukſicht auf die tägliche Bewegung nicht machen können; doch darf man von den andern auf ihre Rotation ſicher ſchlieſſen.

§. 478. Erf. In Rukſicht auf die Laufbahn ſelbſt wird der Aſtronom bey ſeiner Unterſuchung folgendes wahrnehmen, daß die Planeten alleſamt ſcheinbare größte Cirkel beſchreiben, die einander durchkreuzen, folglich gegeneinander incliniren, doch ſo, daß ſie nicht zu weit ausſchweifen, und ihr Weg durch eine Bande am Himmel begrenzet werde, den man den Thierkraiß nennet, (Zodiacus) weil ſie alle nach und nach die zwölf bekannte Zeichen durchlaufen, deren Nahmen und Zeichen folgende ſind:

Widder.	Stier.	Zwillinge.	Krebs.
Aries.	Taurus.	Gemini.	Cancer.
♈	♉	♊	♋
Löwe.	Jungfrau.	Waage.	Scorpion.
Leo.	Virgo.	Libra.	Scorpius.
♌	♍	♎	♏

Schüz.

Schüz.	Steinbock.	Waſſermann.	Fiſche.
Arcitenens	Caper	Amphora	Piſces.
ſagittariis.	capricornus.	Aquarius.	
♐	♑	♒	♓

§. 479. Zuſatz. Weil dieſe Zeichen um den ganzen Himmel herumgehen, ſo machen ſie 360°, und alſo eines 30°; wenn man alſo nach Zeichen rechnet, ſo bedeutet eines 30°, z. E. wenn ein Ort am Himmel vom andern zwey Signa oder Zeichen weit entfernt heißt, ſo ſteht er 60° ab.

§. 480. Anm Die Sterne, die vor 1000 Jahren das Zeichen des Widders ausmachten, ſind nun beynahe alle in das Zeichen des Stiers gerükt; die Urſache werden wir unten anführen, wenn wir von der Präceſſion der Nachtgleichen handeln.

§. 481. Lehrſatz. Weil die Planeten bald ſchneller bald langſamer ſich bewegen, ſo muß der Aſtronom, wenn er das bemerkt, folgenden aus optiſchen Gründen hergeleiteten Schluß machen: Entweder ſind die Verſchiedenheiten der Geſchwindigkeit dem Planeten reel, oder ſie ſind nur ſcheinbar nach optiſchen Gründen, und hangen von der gröſſern oder kleinern Diſtanz ab, oder man muß beedes zugleich annehmen. Iſt das erſte, ſo muß der Diameter des Planeten uns immer gleichgroß erſcheinen; dann wenn er in einem Cirkel ſich bewegt, deſſen Radius immer eben derſelbe, und zwar die Diſtanz des Planeten von dem Auge des Zuſchauers iſt, ſo muß der Sehewinkel immer einerley ſeyn, das iſt, der Diameter des Planeten wird an keinem Ort kleiner oder gröſſer als an dem andern erſcheinen. Diß aber geſchiehet nicht; ſondern er iſt bald gröſſer bald kleiner; z. E. des Merkurs Diameter, wenn er am geſchwindeſten ſich bewegt, erſcheint unter dem Sehe-

win

winkel 25″ 23‴, und wenn er am langſamſten ſich bewegt, unter 16″ 37‴. Alſo findet die erſte Regel allein nicht ſtatt, und der Planet muß bald weiter bald näher ſeyn, das iſt, die Sonne kann nicht der Mittelpunkt der Bahn ſeyn. Sollte aber die zweyte Regel allein ſtatt finden, daß dieſe Verſchiedenheiten von den ungleichen Diſtanzen abhangen, ſo müßte nach der Regel Detri ſeyn, der kleinſte Diameter von 16″ 37‴ zu der kleinſten Geſchwindigkeit 2° 44′ 20″ die man zwiſchen dem 9 und 10 Augſt beobachtet, wie der gröſte Diameter von 25″ 23‴ zur gröſſeſten Geſchwindigkeit; da man findet 4° 11′ 5″; aber man beobachtet ſie anders, nemlich 6° 23′ 27″, zwiſchen den 26 und 27 Junius. Alſo kann auch die Verſchiedenheit der Geſchwindigkeit nicht blos von den verſchiedenen Diſtanzen herkommen. Dahero nichts übrig bleibt, als daß man beede Urſachen, nemlich eine reelle, phyſikaliſche, und eine optiſche zuſammen nimmt.

§. 482. Anmerk. Dieſes hat Keppler zuerſt bewieſen in Aſtron. P. Optica p. 341. vor ihm haben alle Aſtronomen dieſe beede Urſachen confundirt und für eins genommen, dahero alle Theorien vor dem Keppler falſch ſind. Die Theorie ſelbſt gehört in den zweyten Theil; bis hieher gehet alſo die Unterſuchung eines Aſtronomen, der blos beobachtet; das weitere muß er nach mechaniſchen Gründen mit Zuziehung der Obſervationen in eine Theorie zuſammen faſſen.

Die Kenntniß der vornehmſten Cirkel am Himmel, und die darauf beruhende ſphäriſche Rechnungen der Höhen, Abweichung, Längen, Breiten, Aſcenſionen, Deſcenſionen.

§. 483. **Erklär.** Aus der Elementargeometrie iſt bekannt, was die Pole einer Cirkelfläche ſind;

man wende ſie alſo auf die Aſtronomie an, und betrachte zuerſt drey größte Cirkel, *Fig.* 68. davon der eine der Horizont iſt HR, deſſen Pole das Zenith und Nadir heiſſen, des Zenith iſt in der *Fig.* Z; der andere die **Ecliptik** EC, darinnen die Sonne oder die Erde lauft, deren Pol M; und der dritte der Aequator, AQ, der einen Winkel mit der Ecliptik von 23° 20′ 20½″ macht, und deſſen Pol P iſt; die Pole des Aequators merkt man beſonders; ſie heiſſen auch die **Weltpole**, und die gerade Linie zwiſchen ihnen die **Weltaxe**.

§. 484. **Erkl.** Wenn die Sphäre ſich um die Axe bewegt, welches die tägliche Bewegung (motus diurnus, communis) heißt, ſo beſchreiben die Pole der Ecliptik die Polarcirkel; welches keine größte Cirkel ſind; die Durchſchnittspunkte der Ecliptik und des Aequators beſtimmen die **Aequinoctialpunkte**, ♈ und ♎; die beede Punkte, wo die Ecliptik von dem Aequator am weiteſten entfernt iſt, die **Solſtitialpunkte**; zween dardurch gezogene Parallelcirkel mit dem Aequator ſind die **Tropici**, (Wendekreyſe) welche keine größte Cirkel ſind; die **Coluri** ſind größte Cirkel, die durch die Weltpole, Solſtitial- und Aequinoctialpunkte gehen. Die Grenzen von der Ecliptik allenthalben 10° entfernt, über welche die Planeten nicht hinausſchweifen, beſtimmen durch zween der Ecliptik parallel gezogene Cirkel eine Binde, die man den **Thierkreyß** (Zodiacus) nennt.

§. 485. **Erkl.** Ein größter Cirkel, der durch das Zenith und die Weltpole geht, heißt der **Mittagscirkel**; (Meridianus) der beſonders zu merken iſt.

iſt. Weil das Zenith alle Augenblik ſich ändert, je nachdem der Horizont ſich ändert, ſo gibt es eine Menge von Mittagscirkeln, unter welchen man einen beſonders zum geographiſchen Gebrauch als den erſten annehmen muß, von welchen man die übrige zehlt. Davon im folgenden Hauptſtük gehandelt wird. Gehet der Cirkel nur durch das Zenith und Nadir, und nicht zugleich durch die Pole, ſo heißt er überhaupt ein Verticalcirkel.

§. 486. Erklär. Die Höhe der Sonne oder eines Sterns iſt ſeine Diſtanz vom Horizont, (altitudo). Diſtanzen aber werden, wie aus der Elementargeometrie bekannt, durch Bögen gemeſſen, die mit dem Cirkel, von welchem ihre Entfernung zu zehlen angefangen wird, rechte Winkel machen; wenn z. E. der Stern in A iſt, ſo iſt AH ſeine Höhe; die Abweichung (Declinatio) iſt die Diſtanz eines Sternes von dem Aequator; ſie wird alſo gemeſſen durch einen Bogen vom Weltpol durch den Stern auf den Aequator; die Breite eines Sternes (latitudo), iſt ſeine Diſtanz von der Ecliptik; ſie wird alſo gemeſſen durch einen Bogen vom Pol der Ecliptik durch den Stern auf die Ecliptik gezogen; nach geom. Gründen. Je nachdem der Abſtand gegen Norden oder Süden iſt, heißt ſie die nordliche oder ſüdliche Breite. Die Länge eines Sterns iſt ſeine Diſtanz vom Frühlings-Aequinoctialpunkten oder 0° ♈. Sie wird gemeſſen bey der Sonne durch einen Bogen der Ecliptik zwiſchen dem Ort der Sonnen und dem Frühlings-Aequinoctialpunkten.

§. 487. Lehrſatz. Die Höhe der Sonne
Fig. 70. wenn Z das Zenith iſt, läßt ſich durch Hül-

ſe eines Quadranten finden, wenn der Horizont HR iſt;

Satz.

Arc. DK = altit. Solis SR.

Beweis.

$$\left.\begin{array}{l} SCD = 90^\circ \\ RCK = 90^\circ \end{array}\right\} \text{nach geom. Gründen}$$

$$\begin{array}{ll} SCD = RCK & \\ RCD = RCD & \text{ſubtr.} \\ \hline SCD - RCD = RCK - RCD. & \text{d. i. in der Figur} \\ SCR = KCD. & \text{oder der Bogen } SR = KD. \end{array}$$

§. 488. **Erkl.** Die Mittagslinie iſt der Durchſchnitt des Meridianus und des Horizonts. Eine jede Parallele mit dieſem Durchſchnitt heißt auch die Mittagslinie.

§. 489. Lehrſatz. Man findet die Mittagslinie, wenn man Vormittag um 9, und Nachmittag um 3 Uhr die Sonnenhöhen obſervirt, und in etlichen concentriſchen Cirkeln den Schatten eines Gnomons aus dem Centro bemerkt; theilt man nun den dadurch gemachten Winkel in zween gleiche Theile, ſo wird die Theilungslinie die Mittagslinie ſeyn.

§. 490. **Erkl.** Wenn die Sonne oder ein Stern durch den Meridianus geht, ſo ſteht er ſelbigen Tag am höchſten; man heißt es culminiren.

§. 491 Zuſatz. Man kann alſo die Culmination der Sonne aus der einmal veſtgeſezten Mittagslinie leicht beobachten; wenn der Quadrant ſo ſteht, daß CR *Fig.* 70. gerad die Mittagslinie iſt.

§. 492. Lehrſatz. Die Polhöhe, das iſt, die Diſtanz des Weltpols von dem Horizont läßt ſich

be-

beſtimmen. Dann die Polhöhe iſt die Summe aus der kleinſten Höhe des Polarſterns und der halben Differenz der kleinſten und gröſsten Höhe. Dann weil der Polarſtern in 12 Stunden zweymal in den Mittagskreyß kommt, ſo kann man in Winterszeit bey heitern Nächten zweymal darinnen ſehen; es ſey alſo πR ſeine gröſste, und pR ſeine kleinſte Höhe, weil HR der Horizont, ſo iſt

Satz. *Fig.* 68.

$$pR + \frac{\pi p}{2} = PR.$$

Bew.

$$\pi R - pR = \pi p$$

$$\frac{\pi p}{2} = pP \quad \text{aber}$$

$$Pp + pR = PR \quad \text{und oben}$$

$$Pp = \frac{\pi p}{2} \quad \text{alſo}$$

$$\frac{\pi p}{2} + pR = PR.$$

§. 493. Lehrſatz. Die Höhe des Aequators (Elevatio æquatoris ſupra horizontem) iſt 90° weniger die Polhöhe.

Satz. *Fig.* 68.

$$AH = 90^\circ - PR.$$

Bew.

$PQ = 90^\circ$ nach der Erklärung §. 484.

$PR = PR$ ſubtr.

$$PQ - PR = 90^\circ - PR$$

$$PQ - PR = RQ$$

$$RQ = 90^\circ - PR.$$

RQ = AH aus geom. Gründen

AH = 90° — PR.

§. 494. Erkl. Aus der Länge und Declination der Sterne laſſen ſich die Aſcenſion und Deſcenſion beſtimmen; die gerade Aſcenſion (Aſcenſio recta) iſt der Punkt des Aequators, der mit der Sonne culminirt, von dem Frühlingsäquinoctio an gerechnet. z. E. *Fig.* 68. Die Sonne oder ein Stern ſey in S, ſo wird SD = SA ſeine (Declinatio) Abweichung ſeyn; und die Länge des Punkten D, der im Aequator ihm correſpondirt = ♈D, wo ♈ der Anfang des Widders oder Frühlings Aequinoctii iſt; da nun dieſer Punkt D mit dem Stern durch den Meridianus ZAH gehet, ſo iſt ♈D die Aſcenſio recta; die ſchiefe Aſcenſion (Aſcenſio obliqua) iſt der Punkt des Aequators von eben dem Aequinoctialpunkt an gerechnet, der mit dem Stern oder der Sonne aufgeht, z. E. ♈O iſt die ſchiefe Aſcenſion von S; dann der Punkt O gehet zu gleicher Zeit mit dem Punkt S durch den Morgenhorizont; die Aſcenſionaldifferenz iſt die Differenz zwiſchen der geraden und ſchiefen Aſcenſion, in der Figur iſt ſie alſo OD, weil ♈D — ♈O = OD. Die ſchiefe Deſcenſion iſt endlich der Punkt des Aequators, der mit dem Sterne untergeht, auch vom Frühlings-Aequinoctio an gerechnet; die Differenz zwiſchen der geraden Aſcenſion und der ſchiefen Deſcenſion heißt die Deſcenſionaldifferenz. Weil die Sonne nicht immer an einem und eben demſelben Ort auf- oder untergeht, ſo heißt die Diſtanz zwiſchen dem Ort des Aufgangs der Sonnen und des wahren Morgenpunkts O die Amplitudo ortiva;

(die

(die Morgenweite) in Rukſicht auf den Untergang der Sonne heißt ſie die Amplitudo occidua. Das Azimuth iſt ein Bogen des Horizonts zwiſchen dem Meridianus und dem Punkt der auf- oder untergehenden Sonne, ſo iſt HS das Azimuth und SO die Amplitudo ortiva.

§. 495. Zuſatz. Man findet alſo das Azimuth, wenn man im Sommer-Halbjahr zu 90° die Amplit. ortivam addirt, im Winter aber ſubtrahirt; das iſt, wenn die Sonne in den ſüdlichen Zeichen iſt, wird ſubtrahirt, iſt ſie in dem nordlichen, ſo wird addirt; eben ſo werden die Amplitudines gefunden, wenn man von dem Azimuth 90° ſubtrahirt. Das iſt, aus dem Azimuth kann man die Amplitudines, und aus der Amplit. das Azimuth finden.

§. 496. Zuſatz. Alles dieſes wird an der künſtlichen Himmelskugel deutlich gezeiget, und nach der ſphäriſchen Trigonometrie, weil es Bogen von größten Cirkeln ſind, laſſen ſich die einzele Bogen aus den gegebenen Stücken leicht berechnen, z. E. aus der Polhöhe, der Declination, und der Höhe eines Sterns, ſeine Diſtanz vom Meridian, und ſein Azimuth zu finden; wenn von dieſen fünf Stükken drey gegeben ſind, ſo kann man allemal die übrige finden; dann PR, SD, sH, SH laſſen ſich trigonometriſch ſo beſtimmen, daß man das vierte durch Rechnung geben kann.

§. 497. Anm. Von allen den genannten Linien iſt nur die Breite beſtändig; das iſt, die Höhen, die Längen, die Declinationen, die Aſcenſionen, die Deſcenſionen u. ſ. w. verändern ſich, und ſind in den vorigen Jahrhunderten anders geweſen als jezo; nur die Breite der Sterne iſt unveränderlich; das iſt, ein Stern hat vor 1000 und mehr Jahren die nemliche Breite

gehabt, nach den alten Obſervationen, die er noch heute hat; den Grund von dieſen Veränderungen werden wir im zweyten theoriſchen Theil vortragen.

Die Bewegung der Sonne beſonders, und die dadurch entſtehende Tage und Jahre, wie auch die Zeitgleichung. (æquatio temporis.)

§. 498. Erfahr. Die Sonne bewegt ſich täglich mit dem Aequator parallel in der Ecliptik, deren größte Schiefe die Grenzen beſtimmt, wie weit die Sonne ſich von dem Aequator zu beeden Seiten gegen Norden und Süden entfernt.

§. 499. Lehrſatz. Die größte Schiefe der Ecliptik kann beſtimmt werden. Dann ihre größte Schiefe iſt einerley mit der größten Abweichung (Declination) der Sonne; wenn man nun gegen das Sommerſolſtitium die Mittagshöhen beobachtet, ſo wird die größte davon, mit der Höhe des Aequators verglichen, die größte Declination geben; z. E. 1738 war zu Paris

die größte Mittagshöhe	64°	88′	10″	
die Höhe des Aequators	41	9	50	ſubtr.
größte Schiefe der Ecliptik	23°	28′	20″	heutzutag.

§. 500. Zuſatz. Weil es geſchehen kann, daß die größte Abweichung ſich nicht gerade am Mittag ergibt, ſondern Vor- oder Nachmittag eintrift, ſo hat man darauf zu ſehen; der Fehler ſelbſt beträgt nicht über 30″, wenn man ihn auch begeht; doch kann man ihn in der practiſchen Aſtronomie vermeiden.

§. 501. Zuſatz. Aus der größten Schiefe der Ecliptik kann man alſo die Abweichung auf jeden Tag finden; wenn man *Fig.* 68. nach den Gründen der ſphäriſchen Trigonometrie ſagt

ſin. tot. : ſin. ♈S = ſin. ♈ : ſin. SD.

§. 502. Anm. In den alten Beobachtungen findet man durchgehends, nach der Ordnung des Alters, daß die Schiefe der Ecliptik vor Zeiten gröſſer geweſen, und immer abgenommen; 230 Jahr vor Chriſti Geburt war ſie nach dem Eratoſthenes 23° 51′ 20″. Herr Prof. Euler vermuthet, die Veränderung dieſer Schiefe (obliquitæt) rühre von Cometen her. Theor. Motuum Plan. & Com. p. 98.

§. 503. **Erkl.** Wenn man vermittelſt einer genauen Penduluhr die Zeit zwiſchen zween Durchgängen eines Sternes durch den obern Meridianus abmißt, ſo hat man einen Sterntag (dies primi mobilis). Die Zeit von einem Mittag zum andern heißt der Sonnentag (dies naturalis).

§. 504 Zuſatz. Der Sonnentag iſt um ſo viel länger als der Sterntag, ſo viel Zeit die Veränderung der geraden Aſcenſion braucht, durch den Mittagscirkel zu gehen. Dann wenn man zween Tage nach einander die Mittagshöhen der Sonnen beobachtet, ſo findet man die Veränderung ihrer geraden Aſcenſion; und weil ſie nicht gleich iſt, ſo ſucht man eine mittlere, welches geſchiehet, wenn man ſieht, wie viel die Veränderung zwiſchen zween um ein Jahr oder 365 entfernten Mittagen betrage, dividirt man nun die ganze Veränderung durch die verfloſſene Anzahl der Tage, hie durch 365, ſo weiß man die mittlere Gröſſere der Veränderung von einem Mittag zum andern. So fande man, daß das mittlere Wachsthum der Rectaſcenſion in einem Sterntag 59′ 8″ 20‴ vom Cirkelbogen austrage.

§. 505. Lehrſatz. Man kann die Bogen in Zeiten und umgekehrt verwandeln.

Beweis.

Weil in 24 Stunden der ganze Aequator, das iſt 360° durch den Mittagscirkel gehet, ſo ſagt man nach der Regel Detri, 360° gehen in 24 St. durch den Mittagscirkel, in wie viel Zeit geht ein Grad durch? das iſt, wenn Stunden, Minuten, Secunden, Terzen des Sternentags H, M, S, T heiſſen; $360° : 24H = 1° : \frac{24H}{360} = \frac{24 . 60 M}{360} = \frac{24}{6} M = 4M$. Alſo gibt ein Grad im Bogen vier Minuten in der Zeit; dann heißt es weiter, 1 Grad gibt 4 Minuten in Zeit, was gibt eine Minute im Bogen? das iſt, der 60ſte Theil eines Grads oder 60 Min. Bogen : 4 Min. Zeit = 1 Min. Bogen : $\frac{4M}{60}$ Zeit, das iſt, mit 60 in Secunden verwandelt $\frac{4 . 60 S}{60} = 4S$. Alſo eine Minute in Bogen gibt vier Secunden in der Zeit; eben ſo macht mans mit den Secunden, da dann für eine Secunde im Bogen herauskommt 4T Zeit.

§. 506. Lehrſatz. Wenn der Sonnentag 24 St. iſt, ſo iſt der Sternentag 23 St. 56′ 4″.

Bew.

Das mittlere Wachsthum der Rectaſcenſion beträgt in einem Sternentag 59′ 8″ 20‴ in Bogen; §. 504. folglich ſchiebt ſich dieſer Bogen wenn man die Terzen wegläßt, nach §. 505. durch den Meridianus in 3M. 56S. 32T. Alſo iſt der Sonnentag, deſſen Stunden, Minuten, Secunden, Terzen wir h, m,

s, t

s, t nennen wollen, folglich 24h = 24H + 3M + 56S + 32T. Man findet alſo nach Vergleichung

Sternenzeit		Sonnenzeit			
T	=	$59''''$	50^{V}	10^{VI}	16^{VII}
S	=	59t	$50''''$	10^{V}	
M	=	59s	50t	$10''''$	
H	=	59m	50s	10t.	

alſo der Sterntag oder 24H=24h—3m—55s—548
=23h+56m+4s.

§. 507. Zuſ. Auf dieſe Weiſe können Sternenzeit, mittlere Sonnenzeit und Bogen des Aequators in einander verwandelt werden; Man verlangt die mittlere Sonnenzeit, die man x heiſſe, für einen Bogen des Aequators, der y heiſſen mag; ſo ſagt man

$$360^\circ : 23h + 56m + 4s = y : x.$$

iſt y gegeben, ſo läßt ſich x finden; iſt x gegeben, ſo kann man y finden; auf dieſe Methode gründen ſich übrigens die berechnete Tafeln. Im gemeinen Leben braucht man mittlere Sonnenzeit.

§. 508. Zuſatz. Man kann alſo die Pendyluhren durch dieſe Rechnung prüfen; in einer Secunde Zeit geht ein Bogen des Aequators von $15''$ $2'''$ $28''''$ durch den Mittagscirkel; die $59'$ $8''$ im Bogen der mittlern Rectaſcenſion geben in Zeit verwandelt $3'$ $56''$, alſo iſt ein Sterntag oder eine Rotation (Umwälzung) der Erde = 23 St. $56'$ $4''$ mittlerer Zeit; und ſo viel Zeit muß die Penduluhr genau anzeigen innerhalb der Zeit, in welcher ein Stern von dem Meridian weggeht, bis er wieder in den nemlichen Ort des Meridians kommt; wenn anders die Uhr richtig iſt.

§. 509.

§. 509. Zuſatz. Weil 59′ 8″ nur die mittlere tägliche Bewegung der Sonnen Rectaſcenſion iſt, ſo kommt ſie mit der wahren täglichen Bewegung ſelten und zwar des Jahrs nur viermal überein; nemlich den 11 Febr. den 14 Maj. den 26 Jul. und den 1 Nov. in allen übrigen Tagen iſt ſie entweder gröſſer oder kleiner.

§. 510. Zuſatz. Die Sonnenuhren, welche nach der wahren Bewegung der Sonne gehen, geben alſo keine mittlere Zeit, wie die Penduluhren, welche man dahero nach den Sonnenuhren nicht richten darf.

§. 511. Erkl. Man betrachtet dreyerley jährliche Revolutionen der Sonnen; eine Syderalrevolution, oder die Zeit, in welcher die Sonne nach ihrem jährlichen Umlauf wieder zu dem nemlichen Fixſtern kommt; ſie beträgt 365 T. 6 St. 8′ 58″. Eine Anomaliſtiſche Revolution, oder die Zeit, in welcher die Sonne vom Apogeo oder der Erdnähe hinweg, und wieder zu dem nemlichen Punkt kommt; ſie beträgt 365 T. 6 St. 8′. Und eine Tropiſche, welche unſer eingeführtes Sonnenjahr, oder die Zeit iſt, während welcher die Sonne wiederum zu dem nemlichen Punkt der Ecliptik kommt.

§. 512. Erfahr. Dutch ſorgfältige Beobachtungen und darauf gebaute Rechnungen, davon wir im folgenden erſt was ſagen können, hat man das Sonnenjahr oder die Tropiſche Reaolution heutzutag gefunden 365 Tag, 5 St. 48′ 43″.

§. 513. Zuſatz. Die beede erſte Revolutionen wird man verſtehen, wenn man das zweyte Capitel von der Theorie der Aſtronomie geleſen haben wird.

Die

Die Vorrückung der Nachtgleichen, (Præceſſio æquinoctiorum) nebſt ihrer Urſache.

§. 514. **Erfahr.** Die Geſtirne, welche den Nahmen der zwölf Zeichen führen, ſtehen heutzutag nicht mehr in den gleichnahmigten zwölf Theilen der Ecliptik, ſondern jedes iſt faſt gegen 30° oder um ein ganzes Zeichen vorgerükt, ſo, daß die Sterne, die ehemalen zu Hipparchi und ältern Zeiten im Widder ſtunden, nunmehro im Stier ſtehen, u. ſ. w.

§. 515. Zuſatz. Es ſcheint alſo, als ob der Frühlingspunkt von Jahr zu Jahr, ohne Abänderung der Lage gegen die Sterne, den folgenden Zeichen nach der Ordnung entgegen rükte. Dieſes Vorrüken heißt man die Præceſſio Aequinoctiorum.

§. 516. **Lehrſatz.** Die Präceſſion der Nachtgleichen beträgt jährlich 50″ 32‴.

Bew.

Hipparchus fand 128 vor Chr. Geb. die Spicam Virginis im 24° ♍
Caſſini 1737 nach Chr Geb. im 20° 11′ 45″ ♎

alſo Präceſſion in 1865 Jahren 26° 11′ 45″
folglich nach der Regel Detri Präceſſion eines Jahrs = 50″ 32‴.

§. 517. Zuſatz. Durch eine leichte Rechnung findet man alſo hieraus, daß dieſe Präceſſion in 72 Jahren einen Grad betrage.

§. 518 Anm. Man hat bey dieſer Rechnung vorausgeſezt, daß Hipparchus richtig beobachtet habe: er hat aber nur den Grad angezeigt, ohne Minuten und Secunden; dahero leicht begreiflich, daß wenn wir von den Alten genauere Obſervationen hätten, die Präceſſion der Nachtgleichen auf ein Jahr noch genauer beſtimmt werden könnte.

§. 519. Lehnſatz. Aus der Geographie weiß man, daß die Erde keine vollkommene Kugel, ſondern gegen die Pole etwas platter oder gegen den Aequator mehr erhöhet iſt. Man verwandle nun im Sinn dieſe etwas dickere Rinde gegen den Aequator in einen Ring um die Erde herum, der die Eclip- tik wie der Aequator ſchneide: ferner verwandelt man wieder im Sinn dieſen Ring von irrdiſchen Theilen in ſo viel kleine Monden, die täglich in einerley Zeit mit der Oberfläche der Erde ſich um die Erde bewegen, nemlich in 23 St. 56′ 4″; ſo werden dieſe kleine Monden oder Erdtrabanten von drey Kräften belebt werden; die eine iſt ihre Schwere gegen die Erde, die andere ihre Schwere gegen den wirklichen oder wahren Mond, und die dritte ihre Schwere gegen die Sonne. Die erſte Kraft wird in Vergleichung mit den beeden andern unendlich groß ſeyn; wenn man ſie alſo mit einer von den beeden andern vergleichen will, ſo wird man wie in der Newtoniſchen Mondstheorie finden, daß die Aequinoctialpunkte oder die Durchſchnittspunkte, welche bey den Planeten die Knoten heiſſen, einen beſtändigen Trieb zurük zu gehen haben, daher die Linie von einem dieſer Punkte zum andern beſtändig hinter ſich zurük zu gehen ſucht; und dadurch muß nothwendig die Präceſſion der Nachtgleichen bewirkt werden.

§. 520. Anm. Dieſen Lehnſatz wird man verſtehen, wenn man den theoretiſchen Theil durchgeleſen haben wird, wo wir die Newtoniſche Mondstheorie erklären. Die Hypotheſen dabey ſind alle möglich; und weil die Präceſſionen wenigſtens nach der Erfahrung, und wenn man nur ein Sonnenjahr durch Beobachtung und Rechnung beſtimmen will, in den erſten Theil gehören, ſo haben wir doch auch kürzlich was von der Urſache davon zum Voraus ſagen wollen.

Die

Die Parallaxe.

§. 521. Anm. Man trägt auch dieſe Veränderungen insgemein noch in der ſphäriſchen Trigonometrie vor, unerachtet die Parallaxe vorzüglich eine eigene Theorie hat; wir wollen daher die Gewohnheit nicht abändern, und mit dieſer Lehre den erſten Theil beſchlieſſen.

§. 522. Erklär. Wenn *Fig.* 78. T der Mittelpunkt der Erden, O das Aug des Zuſchauers auf der Oberfläche der Erde, Z ſein Zenith, ZMN ein Stük von der äuſſerſten Fixſternenſphär, L ein der Erde näherer Weltcörper, z. E. der Mond, iſt, daß er dem Auge O in N, einem andern Auge in T aber in M erſcheine, ſo heißt der Bogen MN die Parallaxe.

§. 523. Lehrſatz. OLT iſt der parallactiſche Winkel. Oder OLT = MN. *Fig.* 78.

Bew.

Weil L der Erde ſehr nahe iſt, ſo iſt LT gegen LM der unendlichen Weite der Fixſterne unendlich klein, und man kann ohne merklichen Fehler L zum Mittelpunkt der Kugel machen; iſt aber dieſes, ſo iſt nach geom. Gründen NM das Maas des Winkels NLM; aber NLM iſt der Verticalwinkel von OLT; folglich iſt OLT = NM. Oder der parallactiſche Winkel.

§. 524. Lehrſatz. Der halbe Erddiameter verhält ſich zur Weite des himmliſchen Cörpers, deſſen Parallaxe man betrachtet, wie der Sinus des parallactiſchen Winkels zum Sinus ſeiner ſcheinbaren Weite vom Zenith. Oder

$$OT : TL = \sin. L : \sin. LOZ.$$

Bew.

Bew.

OT : ſin. L = TL : ſin. LOT } nach trig.
ſin. LOT = ſin. LOZ } Gründen

OT : ſin. L = TL : ſin. LOZ.

§. 525. Zuſatz. Wenn alſo von dieſen vier Stücken drey gegeben ſind, ſo kann man das vierte finden.

§. 526. Lehrſatz. Die Horizontalparallaxe iſt die größte.

Bew.

Je gröſſer der Winkel LOZ wird, deſto gröſſer wird auch L oder der parallactiſche Winkel; wie aus der Figur erhellet; aber LOZ wird am größten wenn L in den Horizont kommt, da aus LOZ wird KOZ; folglich wird die Horizontalparallaxe die gröſſeſte ſeyn. Das iſt, wenn der Cörper K im Horizont wäre, ſo iſt TK : TO = ſin. tot. : ſin. K.

§. 527. Zuſatz. Im Zenith ſelbſt iſt alſo die Parallaxe = o.

§. 528. Zuſatz. Je weiter der Stern oder Himmelscörper von der Erden entfernt iſt, deſto kleiner iſt ſeine Parallaxe.

§. 529. Lehrſatz. Wenn die Oerter B, C, *Fig.* 75. unter einerley Mittagscirkel liegen, und ein Aſtronom obſervirt im Ort B, der andere in C, ſo daß ſie zu gleicher Zeit und in eben demſelben Augenblik den Weltcörper oder Stern L ſehen, und in dem nehmlichen Augenblik die ſcheinbare Weite von ihrem Zenith, und zugleich die Weite oder Diſtanz von einem Fixſtern, der keine Parallaxe hat, und zu einerley Zeit mit dem Weltcörper in den Mittagscirkel kommt, ſo kann man die Horizontalparallaxe des Weltcörpers beſtimmen.

Bew.

Beweis.

Weil der Fixſtern unendlich weit in Vergleichung mit dem nähern Weltcörper entfernt iſt, ſo ſind die Linien $B\lambda$, $C\Lambda$ gegen ihn gezogen, parallel anzunehmen. Ferner ſind aus den Obſervationen die Winkel λBL, und ΛCL gegeben, oder bekannt; ihre Summe iſt BLC nach geom. Gründen §. 473. Es ſeyen nun die Sinus der Diſtanzen des Weltcörpers vom Zenith bey $B = b$,

bey $C = c$,

die Sin. ſeiner Diſtanzen vom Fixſtern bey $B = \beta$

bey $C = \gamma$

ferner ſeye ſin. $BLC = \delta$

cos. $BLC = \varepsilon$,

und der geſuchte ſin. $BLT = x$ ſo iſt ſin. CLT = ſin. differ. der Bogen BLC und BLT, folglich nach Trigon. §. 741. I. Th. wenn man hier die Buchſtaben für $\mu s - m\sigma$ ſezt, ſin. $CLT = \delta(\sqrt{1-x^2}) - \varepsilon x$. Nun iſt

nr. I. $TB : TL = x : b$

$CT : TL = \delta(\sqrt{1-x^2}) - \varepsilon x : c$

$CT = TB$ ſubſtituirt, und aus der Proportion geſchloſſen, gibt

$$x : b = \delta\sqrt{(1-x^2)} - \varepsilon x : c$$

$$cx = b\delta\sqrt{(1-x^2)} - b\varepsilon x$$

$$b\varepsilon x = c\varepsilon x \quad \text{add.}$$

$$cx + b\varepsilon x = b\delta\sqrt{(1-x^2} \quad \text{oder}$$

$$(c + b\varepsilon)x = b\delta\sqrt{(1-x^2)} \quad \text{und quadrirt}$$

$$(c^2 + 2cb\varepsilon + b^2\varepsilon^2)x^2 = b^2\delta^2(1-x^2) \quad \text{oder}$$

$$= b^2\delta^2 - b^2\delta^2x^2 \text{ u. herüber geſ.}$$

$(c^2 + 2cb\varepsilon + b^2\varepsilon^2 + b^2\delta^2)x^2 = b^2\delta^2$

aber $\varepsilon^2 + \delta^2 = 1$ alſo ſubſtit.

$(c^2 + 2cb\varepsilon + b^2)x^2 = b^2\delta^2$ folgl. mit dem Coefficienten von x dividirt

$$x^2 = \frac{b^2\delta^2}{c^2 + 2bc\varepsilon + b^2}$$

$\sqrt{}$ extrah.

$$\text{nr. II. } x = \frac{b\delta}{\sqrt{(c^2 + 2bc\varepsilon + b^2)}}$$

Es iſt ferner nach §. 527. wenn der Sinus der Horizontalparallaxe $= y$,

$TB : TL = y : 1$ aber nr. I.

$TB : TL = x : b$ alſo

$x : b = y : 1$ das iſt

$\frac{x}{b} = y$ aber nr. II.

$$x = \frac{b\delta}{\sqrt{(c^2 + 2bc\varepsilon + b^2)}}$$ folglich ſubſtituirt

$$\frac{\delta}{\sqrt{(c^2 + 2bc\varepsilon + b^2)}} = y.$$ Nun iſt der Winkel BLC $= \varepsilon$ allemal ſehr klein, daher man ohne Fehler $c = 1$ annehmen kann, und alſo $\delta = \beta + \gamma$, und weil ε gegen die übrige Gröſſen verſchwindet, der Diviſor von δ der obigen Gröſſe $\sqrt{(^2 + 2bc + b^2)}$ $= c + b$; folglich ſubſtituirt $y = \frac{\delta}{c+b}$, und weil $\delta = \beta + \gamma$

$y = \frac{\beta + \gamma}{c + b}$; und in der Proportion

$c + b : 1 = \beta + \gamma : y$ das iſt in Worten:

Die

Die Summe der Sinus der Diſtanzen vom Zenith verhält ſich zum Sinus totus, wie die Summe der Diſtanzen vom Fixſtern zur Horizontalparallaxe.

§. 530. Zuſatz. Die Regel gilt, wenn die Oerter B, C auf verſchiedenen Seiten des Aequators AT liegen, wie in der Figur; befinden ſie ſich auf einer Seite, ſo muß man ſtatt der Summe der Sinus die Differenz nehmen; und wann der Weltcörper auf einerley Seite des Fixſterns geſehen wird, ſo muß man auch ſtatt der Summe der Winkel $\beta+\gamma$ ihre Differenz nehmen.

§. 531. Exemp. Herr de la Caille gibt folgendes Exempel in ſeinem Handb. §. 424. Er beobachtete den 6. Oct. 1751. auf dem Capo bonä ſpei, die Diſtanz des Mars, der in der Figur Z iſt, vom Zenith im Mittagscirkel = 25° 2′; und ſein Rand gegen Norden war 26″ 7 nordlicher als der Stern λ im Waſſermann, nach Bejers Benennung; zu gleicher Zeit fand ihn Wargentin zu Stockholm 68° 14′ vom Zenith entfernt und den nordlichen Rand 6″ 6 ſüdlicher als eben den obigen Stern λ; alſo iſt b = ſin. 25° 2′ = 0,4231; wenn der Sinus totus = 1, c = ſin. 68° 14′ = 0,9287; β = 26″ 7, γ = 6″, 6. β + γ = 33″ 3; b + c = 1,3518. und $y = \frac{\beta+\gamma}{b+c} = \frac{33''7}{1,3518} = 24''$.

Die Refraction.

§. 532. Erklär. Wenn der Strahl von einem Stern in unſere Erdatmoſphäre kommt, ſo wird er nach den Grundſätzen der Dioptrik gebrochen, und der Winkel, unter welchem er wegen der Strahlenbrechung um ſo viel höher erſcheint als er wirklich ſteht, heißt die Refraction des Sterns.

§. 533. Lehrſatz. Der Strahl von einem Stern wird in der Dunſtkugel ſo gebrochen, daß er nach einer krummen Linie, deren Eigenſchaften aber

man noch nicht zuverläßig beſtimmen kann, in das Aug des Zuſchauers kommt. Dann daß dieſe Linie keine gerade ſondern krumme ſeyn müſſe, erhellet daher, weil die Luft gegen die Erde herab immer an Dichtigkeit zunimmt, folglich den Weg des gebrochenen Strahls alle Augenblik verändert, wodurch nothwendig eine krumme Linie entſtehen muß; daß man aber die krumme Linie ſelbſt nicht zuverläßig bisher habe beſtimmen können, erhellet daher, weil das Geſetz, nach welchem die Dichtigkeit der Luft zu- oder abnimmt, noch nicht entdekt iſt, wie wir §. 257. gemeldet haben. Davon nichts zu gedenken, daß in verſchiedener Jahrszeit die Luft ſehr veränderlich iſt, und auch dißfalls in die Veränderung der Refraction wirket.

§. 534. Zuſatz. Weil man alles unter geraden Linien ſiehet, ſo erſcheint der Stern nach der Refraction in der Tangente der krummen Linie.

§. 535. Erfahr. Man hat durch verſchiedene Beobachtungen gefunden, daß man die Horizontalrefraction einen halben Grad oder 30′ annehmen darf; zuweilen iſt ſie gröſſer, z. E. 32′, 36′ auch 37′, und überhaupt auf 10 bis 12° unbeſtändig; in Höhen von 45° beträgt ſie weniger als eine Minute, und nimmt von da an bis zum Zenith gleichförmig ab.

§. 536. Anm. Man hat nach dieſen Erfahrungen Tafeln für die Refractionen verfertiget, welche ſich auf die Hypotheſe gründen, daß die Atmoſphäre in concentriſche Schichten von veränderlicher Dichtigkeit, getheilt ſeye; Gregorius hat ſolche in Elem. Aſtr. L. II. Prop. 66. ausführlich beſchrieben. Und in der Hauptſach haben die Neuere nichts aus den ſchon angeführten Gründen darinnen geändert. Tycho von Brahe war der erſte, der die Refraction auf eine genauere Art unterſucht und berechnet hat.

§. 537.

§ 537. Anm. In der ſphäriſchen Aſtronomie kann man noch folgendes merken, das aber mehr zu den alten Zeiten, da man noch keine förmliche Calender hatte, nöthig war, als jezo. Dahin gehört der Cosmiſche Auf und Untergang der Sterne, wenn ein Stern bey Aufgang der Sonne auf- oder untergeht: wenn die Sonne bisher ſo nahe an ihm geſtanden, daß man ihn vor ihrem Licht nicht ſehen konnte, und wenn ſie nun ſo weit weggerükt, daß man ihn am Horizont vor ihrem Aufgang oder nach ihrem Untergang ſehen kann, da es dann heißt, er gehe heliace auf; der Sehungsbogen (arcus viſionis) iſt die geringſte Tiefe der Sonne unter dem Horizont, bey welcher ein Stern ſichtbar iſt. Er iſt nach der verſchiedenen ſcheinbaren Gröſſe der Sterne, der Veränderung der Luft, der Schärfe der Augen u. ſ. w. verſchieden. Die Dämmerung (Crepuſculum) heißt die Helle, die Morgens und Abends vor dem Aufgehen der Sonne entſteht, oder nach ihrem Untergang noch übrig bleibt. Ihr Sehungsbogen wird auf 18° gerechnet. Es kommt dabey auf den Ort der Sonne in der Ecliptik an, da dann die Dämmerung einmal ein Maximum, und einmal ein Minimum haben wird; daher die Aufgabe von der kürzeſten Dämmerung entſtanden. Doch diß ſeye genug von der ſphäriſchen Aſtronomie, in welcher nichts von Wichtigkeit übergangen worden; im zweyten Capitel tragen wir nun die theoriſche vor.

Zweytes Capitel,

Von der theoriſchen Aſtronomie.

§. 538.

Erklärung.

Die theoriſche Aſtronomie gibt von allen und jeden Erſcheinungen an dem Himmel Grund, warum ſie ſo und nicht anders ſich zeigen, in Rukſicht auf die Bewegung, Gröſſe und Entfernung; und man kann in unſern Tagen behaupten, daß man unter allen Wiſſenſchaften keine ſo vollſtändige Theorie habe als die Aſtronomie; wir wollen das vornehmſte davon anführen und beweiſen.

Die Copernicaniſche Theorie vom Sonnen- und Planetenſyſtem.

§. 539. Erf..hr. und Erklär. Saturnus, Jupiter und Mars kommen zuweilen, wie auch der Mond, an einem ſphäriſchen Ort mit der Sonne am Himmel zu ſtehen, zuweilen entfernen ſie ſich bis auf 180° oder einen halben Cirkel von der Sonnen; jenes heißt man die Zuſammenkunft mit der Sonne, (Conjunctio cum Sole) deren Zeichen ☍, dieſes die Oppoſition, deren Zeichen ☌ iſt, beede zuſammen heiſſen die Syzygien. Iſt der Planet 90° von den Syzygien entfernt, ſo heißt man es die Quadraturen.

§. 540. Erfahr. Die Venus entfernt ſich nie über 47°, und der Merkur nie über 28°, dahero dieſe beede Planeten nie in Oppoſition mit der Sonne kommen; wohl aber in die Conjunction; die Venus iſt wie der Mond voll, nach der Conjunction mit der Sonne, wenn ſie der Abendſtern wird, in ihrer größten Entfernung von 47° erſcheint ſie als ein Mondsviertel; alsdann nähert ſie ſich wiederum der Sonne, und nimmt immer ab, erſcheint wie eine Sichel (falcata luna) und verliert ſich in den Sonnenſtrahlen; nach dieſer zweyten Conjunction wird ſie der Morgenſtern, und zeigt wieder die vorige Erſcheinung, welche man bey dem Merkur auf eine ähnliche Weiſe bemerkt.

§. 541. Erklär. Den Saturn, Jupiter und Mars heißt man die obere Planeten, den Merkur und die Venus die untere Planeten, in Rukſicht auf die Erde, weil die beede leztere der Sonne immer

mer näher ſind als der Erde; die erſtern aber eine gröſſere Entfernung haben.

§. 542. Zuſatz. Die untere Planeten bewegen ſich alſo allein um die Sonne, und nicht zugleich um die Erde; die obere Planeten aber um die Erde und Sonne zugleich.

§. 543. Erfahr. Es ſcheinet als ob ſich die obere und untere Planeten mit der Sonne und allen Sternen täglich um die Erde herum bewegen, und alſo eine doppelte Bewegung hätten, eine eigene um die Sonne, und eine gemeinſchaftliche mit den Sternen um die Erde.

§ 544. Lehrſatz. Wenn die Erde ſich in einem Sterntag um eine Axe dreht, die durch die beede Weltpole geht, ſo wird eben die Erſcheinung nach optiſchen Gründen ſtatt finden, die man in der obigen Erfahrung §. 543. bemerkt; und man wird nicht genöthiget ſeyn, den Planeten und allen Sternen eine wirkliche tägliche Bewegung um die Erde zuzueignen, ſondern dieſe gemeinſchaftliche tägliche Bewegung nur eine ſcheinbare Bewegung heiſſen können.

§. 545 Erfahr. Die Planeten ſcheinen bald gerade fort ſich zu bewegen, (directi) bald eine Zeitlang ſtill zu ſtehen, (ſtationarii) bald aber wieder zurük zu gehen. (retrogradi)

§. 546. Lehrſatz. Wenn man die Sonne in den Mittelpunkt des Planetenſyſtems ſetzet, im nächſten Kraiß um ſie herum den Merkur, im zweyten die Venus, im dritten die Erde mit ihrem Trabanten dem Mond, im vierten den Mars, im fünften den Jupiter mit ſeinen Trabanten, im ſechsten den

Saturn mit ſeinem Ring und Trabanten, und die Erde wie die Planeten in ihren Kraiſen ſich um die Sonne bewegen läßt, ſo wird die obige Erfahrung ſich aus optiſchen Gründen erklären laſſen, und das wiederſinniſche dabey auf einmal verſchwinden; dann es ſey *Fig.* 94. AE ein Theil der Laufbahn der Erde, dcba die Laufbahn der Venus, oder überhaupt eines untern Planeten, δεγβ der äuſſerſte Fixſternkraiß, und im Mittelpunkt S die Sonne; der Planet und die Erde bewegen ſich nach der Ordnung der Zeichen; die Erde ſey z. E. in A, der Planet in a, ſo ſieht man ihn auf der Erde an der Himmelskugel nach optiſchen Gründen in α, nach der Linie Aα; die Erde komme nach B, der Planet nach b, ſo ſieht man ihn aus B in β, und eben ſo aus C in γ, wenn er inzwiſchen nach c gerücket iſt. Er komme ferner aus C in d, und die Erde in D, daß man ihn in der Tangente ſeiner Bahn Dd aus der Erde ſehe; ſo wird der Planet ein Stük ſeiner Bahn weiter machen können, ohne daß man es auf der Erde bemerkt, weil man ihn immer aus der Erde nach der Tangente Dd, alſo an der Himmelskugel bey δ ſiehet; er wird alſo ſtillſtehend ſtationarius erſcheinen; die Erde bewege ſich von D nach E, und der Planet von d nach e, ſo wird man ihn aus der Erde durch die Linie Ee an der Himmelskugel bey ε ſehen, und es wird uns vorkommen, als ob er inzwiſchen wieder in ſeiner Bahn zurükgegangen wäre; dann von δ nach ε iſt der Weg rükgängig; er wird alſo retrogradus; eben ſo kann man es von den obern Planeten zeigen. Dieſe Hypotheſe iſt alſo hinlänglich, alle dieſe ſeltſame Erſcheinungen zu erklären.

§. 547.

§. 547. Zuſatz. Wenn alſo die Erde eine doppelte Bewegung hat, einmal innerhalb eines Sterntags um die Axe, und zugleich in Zeit eines Jahrs oder 365 Tagen um die Sonne, ſo daß die Sonne beynahe im Mittelpunkt iſt, ſo kann man alle dieſe optiſche Erſcheinungen erklären; und dieſes Syſtem heißt der Copernikaniſche Weltbau.

§. 548. Zuſatz. Wenn die Erde ſich von Abend gegen Morgen um ihre Axe drehet, ſo wird die Erſcheinung des Himmels damit übereinſtimmen, weil er mit Sonne, Mond und Sternen von Morgen gegen Abend ſich alle Tag zu drehen ſcheint.

§. 549. Anm. Dieſes Syſtem fand in vorigen Zeiten vielen Wiederſpruch; heutzutag iſt es allgemein. Die theologiſche Scheingründe dagegen gehören mehr in die Theologie als hieher; wie ich ſie dann auch in meiner Einleitung in die Theol. II. B. III. St. von den Scheinwiederſprüchen der Schrift ausführlich vorgetragen und gehoben habe. Was aber die neuern mathematiſche Beweiſe der Copernikaniſchen Theorie betrift, ſo ſind ſolche vornemlich folgende: Die Erde iſt, wie wir in der Geographie beweiſen, gegen die Pole mehr platt als gegen den Aequator, alſo keine vollkommene Kugel; dieſe Geſtalt bekommt ein Cörper nach den Gründen der Mechanik, wie Hugenius de vicentrifuga lehret, wenn er ſich um ſeine Axe dreht; alſo kann man die Geſtalt der Erde aus ihrer Rotation herleiten; auch erhellet dieſes, weil die Cörper gegen dem Pol ſchwerer ſind, als gegen dem Aequator; wie ſolches Richer zuerſt auf der Inſel Cayenne 1672 bemerkt, wo er nur 4° vom Aequator entfernt war, und wo er den Perpendikel, der zu Paris Secunden ſchlug, um $1\frac{1}{4}$ Linie verkürzen mußte. Auch will man bemerkt haben, daß einige Fixſterne zuweilen von andern verdekt, und hernach wieder unter der vorigen Weite geſehen werden, welches die jährliche Parallaxe der Erde beweißt, weil die Fixſterne ſich nicht bewegen, wohl aber ihre Lage nach optiſchen Gründen zu verändern ſcheinen, wenn die Erde nach und nach eine andere Stelle bekommt; doch iſt dieſe lezte Erfahrung noch nicht ſo zuverläßig; man vergleiche, was von den Fixſternen, beſonders in Rukſicht auf die Parallaxe, §. 527. geſagt worden iſt.

Die Kepplerische Theorie von den zwey Hauptgeſetzen der Bewegung der himmliſchen Córper.

§. 550. **Erklár.** Die zwey vornehmſte Geſetze der Bewegung der himmliſchen Córper, welche Keppler entdekt, ſind folgende: Erſtlich die Zeiten die ein Planet anwendt, einen Theil von ſeiner Bahn zu durchlaufen, verhalten ſich zu einander, wie die Sectores und nicht wie die durchloſſene Bógen; zweytens, die periodiſche oder Umlaufszeiten zweyer Planeten verhalten ſich zu einander wie die Quadratwurzeln aus den Cubis ihrer Diameter oder Parameter. Beede Geſetze wird man aus dem folgenden leicht verſtehen.

§. 551. **Lehrſatz.** Wenn nach *Fig.* 71. ein Córper in einer elliptiſchen Krúmmung ſich bewegt, ſo daß die Kraft, die ihn in der krummen Linie hált, im Brennpunkt S ſich befindet, ſo wird die Zeit durch AB ſich verhalten zur Zeit durch AD wie der Sector ABS, zum Sector ADS. (Lateiniſch heißt der Satz: Tempora corporum motu curvilineo incedentium ſunt uti areæ, quas radii vectores deſcribunt. Der Radius vector, der ſich in der Ellipſi immer verándert, iſt AS, BS, DS.) Man nenne die Zeiten T, t, ſo iſt

Satz. *Fig.* 71.

$$t : T = ABS : ADS.$$

Bew.

Man ſetze AB, AD unendlich klein; und ziehe die Tangente Bb = AB; man ſetze die Bewegung in ſ unendlich kleinen Theilen gleichfórmig; der Cór-

per

per würde ſich alſo von AB in einerley Zeit nach Bb = AB bewegen, wenn er nicht von der Kraft S genöthiget würde, eine andere Richtung zu nehmen; man ziehe die Linie bD parallel mit BS, welche die Kraft nach S ausdrucken ſolle, ſo wird die Diagonallinie BD der Weg ſeyn, den der Cörper nimmt. Diß vorausgeſezt, iſt alſo

AB = Bb ex conſtr.
BS = BS alſo aus geom. Gr.

Nr. I. △ABS = △BbS ferner
BS = BS
Bb = sD

Nr. II. △BDS = BbS aber nr. I.
△ABS = Bbs alſo

△BDS = △ABS folglich
t : t = ABS : BDS.
t : t + t = ABS : ABS + BDS das iſt
t : 2t = ABS : ADS. Man ſetze
2t = T
t : T = ABS : ADS.

§. 552. Zuſatz. Wenn T = nt geſezt wird, ſo iſt t : nt = ABS : AES; oder zu einem jeden der Zahl n correſpondirenden Sector.

§. 553. Erklär. Das Aphelium iſt der Ort, wo der Planet am weiteſten von der Sonne entfernt iſt, nemlich *Fig.* 72. die Linie SA; das Perchelium aber, wo der Planet der Sonne am nächſten iſt; die Linie PS; beede Linien zuſammen, oder die Axe PA heißt die Abſidenlinie, Linea abſidum.

§. 554. Zuſatz. Die Bewegung der Erde und der Planeten im Aphelio iſt alſo am langſamſten, im

im Perihelio am ſchnellſten; wie aus der *Fig.* 71. erhellet; und dieſes ſtimmt auch mit der Erfahrung überein.

§. 555. **Erkl.** Wenn man *Fig.* 72. die Abſidenlinie PA zum Diameter annimmt, und aus dem Mittelpunkt C mit der halben Abſidenlinie den Cirkel PCA beſchreibt, ſo heißt der Cirkel (circulus excentricus) der **excentriſche Cirkel**; die Diſtanz der Sonne vom Mittelpunkt SC die **Excentricität**; die Diſtanz des Planeten I von der Sonne S, nemlich IS, heißt das **Intervallum**; wenn man ferner durch I den Perpendikel IL auf den Diameter fällt, und ſolchen auf der andern Seite verlängert, bis er den excentriſchen Cirkel in K ſchneidet, ſo heißt der Bogen KA, deſſen Maas der Winkel KCA iſt, die **excentriſche Anomalie**, (Anomalia excentri) und der Perpendikel KL iſt der Sinus dieſer Anomalie. Der Winkel an der Sonne ISA, unter welchem der Planet in ſeiner Entfernung vom Aphelio geſehen wird, heißt die **coäquirte Anomalie** (Anomalia coæquata) und der Circular ſector KSA heißt die **mittlere Anomalie**, (Anomalia media) die Differenz zwiſchen der mittlern und coäquirten Anomalie heißt die Proſtaphæreſis, oder Aequatio.

§. 556. **Lehnſatz.** Wenn man *Fig.* 74. zween concentriſche Cirkel AGB, EFD beſchreibt, und aus dem gemeinſchaftlichen Mittelpunkt C einen Radius des gröſſern Cirkels NC ziehet, von N den Perpendikel NP auf AB herabfällt, und in den Durchſchnitt R, wo der kleinere Cirkel vom Radius geſchnitten wird, die Parallele RM mit AB zieht,

ſo

ſo wird die Interſection in M einer Ellipſe zugehören, und alle auf dieſe Art beſchriebene Punkte werden eine Ellipſe beſtimmen.

Bew.

Aus der höhern Geometrie iſt die Eigenſchaft der Ellipſe bekannt, daß

$PM^2 : CF^2 = AP . PB : AC . CB.$

Aus der Element. Geom. erhellt, daß

$CN : PN = CR : PM$ aber nach eben den geom. Gründen iſt

$CN = AC$; } ſind Radii; die erſte des groſſen,
$CR = CF$ } die andern des kl. concentr. Cirkels;

ferner $PN = \sqrt{AP . PB}$ nach geom. Gr. §. 535.

alſo ſubſtituirt in der obigen Proportion

$AC : \sqrt{AP . PB} = CF : PM$ und quadrirt

$AC^2 : AP . PB = CF^2 : PM^2$ aber

$AC^2 = AC . CB$; folglich

$AC . CB : AP . PB = CF^2 : PM^2$ die obige Eigenſchaft der Ellipſe; alſo wird in dieſem Fall eine Ellipſe erzeugt.

§. 557. Zuſatz. Wenn man die Wurzeln auszieht, ſo iſt $PM : CF = \sqrt{AP . PB} : \sqrt{AC . CB}$ und die obige Wehrte ſubſtituirt, geben

$PM : CF = PN : CG$ das iſt, eine jegliche Semiordinate der Ellipſe verhält ſich zum Sinus des correſpondirenden Cirkelbogens wie die kleine Axe zum Radius des excentriſchen Cirkels.

§. 558. Lehrſatz. Die mittlere Anomalie verhält ſich zur Fläche des excentriſchen Cirkels, wie der elliptiſche Sector ISA zur Fläche der ganzen Ellipſe.

Satz.

Satz. *Fig.* 72.

Sect. Circ. KSA : aream Circ. = Sect. Ellipt. ISA : Ellipſ. PFA.

Bew.

Es ſey die Semiordinate der Ellipſe $IL = y$
die Semiordinate des Cirkels $KL = z$
die beeden correſpond. Abſciſſe $AL = x$ ſo iſt
nach den Integrationsregeln $AIL = \int y\,dx$
und $AKL = \int z\,dx$

Es wird dahero ſeyn

$AIL : AKL = \int y\,dx : \int z\,dx$

———————— $: \int dx$

$AIL : AKL = y : z$ aber nach der Benenn. oben
$y : z = IL : KL$

$AIL : AKL = IL : KL$ es iſt ferner
$\Delta SIL : \Delta SKL = IL : KL$ nach geom. Gründen

$AIL : \Delta SIL = AKL : \Delta SKL$ ferner addendo
$AIL + \Delta SIL : \Delta SIL = AKL + \Delta SKL : \Delta SKL$
das iſt in der Figur und verſezt
$SIA : SKA = SIL : SKL$ aber nach geom. Gr.
$SIL : SKL = IL : KL$

$SIA : SKA = IL : KL$ aber nach §. 557.
$IL : KL = FC : GC$

$SIA : SKA = FC : GC$
$FC : GC = \frac{1}{4}$ Ellipſ. $\frac{1}{4}$ Circ.
———————— .4
= Ellipſ. : Circ.

$SIA : SKA$ = Ellipſ. : Circ.

Das iſt, der elliptiſche Sector SIA verhält ſich zum excentriſchen Sector SKA, wie die elliptiſche Fläche zur Cirkelfläche; oder die mittlere Anomalie zur ganz excen-

excentriſchen Cirkelfläche, wie der elliptiſche Sector SIA zur elliptiſchen ganzen Fläche.

§. 559. Lehrſatz. Die mittlere Anomalie oder der excentriſche Sector KSA kann in einen förmlichen ihme gleichen Circular-Sector DCA verwandelt werden, in welchem Fall er den mittlern Ort der Sonne oder vielmehr des Planeten in dem excentriſchen Cirkel, nemlich den Ort D beſtimmt.

Bew.

Man ziehe den Radius CK, und auf den verlängerten Radius aus S den Perpendikel SG, ſo iſt

$$\triangle KSC = \frac{KC.SG}{2} \text{ nach geom. Gr.}$$

Man ſuche einen ihm gleichen Sector DCK, deſſen Grundlinie KC ſeyn kann, die Höhe heiſſe x, ſo iſt

$$\text{Sector } KCD = \frac{KC.x}{2} \text{ beede Ausdrücke gleich geſezt, geben}$$

$$\frac{KC.SG}{2} = \frac{KC.x}{2}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}.2$$

$$KC.SO = KC.x$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad}.KC$$

$$\frac{KC.SG}{KC} = x \text{ alſo}$$

$$SG = x \text{ oder die Höhe des Sectors.}$$

Man mache alſo den Bogen DK = SG, ſo wird DCK + KCA = KSC + KCA, das iſt, DCA = KSA; und D der mittlere Ort des Planeten, wenn der wahre Ort in I iſt.

§. 560. Zuſatz. Weil DCA = KSA, ſo drukt er die Zeit aus, die der Planet braucht von A nach I zu laufen; weil KSA dieſe Zeit ausdrükt.

§. 561. Zuſatz. Es ſeye die Zeit durch AI $= t$, die ganze Umlaufszeit T, die Peripherie $= \pi$, der Radius $= r$, ſo iſt

$$t : T = DCA : \frac{\pi r}{2}$$

$$DCA = \frac{DA . r}{2}$$

$$t : T = \frac{DA . r}{2} : \frac{\pi r}{2} = DA : \pi.$$

§. 562. Zuſatz. Alſo drukt der Bogen DA auch die mittlere Anomalie aus.

§. 563. Lehnſatz. Wenn die Laufbahne zweyer himmliſchen Cörper elliptiſch ſind, ſo verhalten ſich die ganze elliptiſche Flächen wie die Umlaufszeiten in die Quadratwurzeln aus den Parametern multiplicirt. Das iſt, wann A, a die Flächen, p, π die Parameter, T, t die Zeiten: $A : a = T\sqrt{p} : t\sqrt{\pi}$; oder weil man in den Verhältniſſen, Kürze halben, wegen der Rechnung, die gleichnahmige Glieder gleich ſetzen darf: $a = t\sqrt{\pi}$. Der Beweis gründet ſich darauf, daß ein elliptiſcher Sector $s = \sqrt{\pi}$ und $t = \frac{a}{s}$, welches aus I. Th. §. 909. folgg. verglichen mit den kürzlich angeführten Sätzen der höhern Mechanik, in der Statik §. 127. folgg. erweißlich wird; wann man alſo, wo $t = \frac{a}{s}$ den Wehrt von s ſubſtituirt, ſo hat man $t = \frac{a}{\sqrt{\pi}}$ und $t\sqrt{\pi} = a$.

§. 564. Lehrſatz. Die Zeiten der periodiſchen Revolutionen verhalten ſich wie die Quadrat-

wur-

wurzeln aus den Cubis der gröſſern Axen. Das iſt, wenn die gröſſere Axe $= d$, ſo wird ſeyn

Saz. $t = \sqrt{d^3}$.

Bew.

Die kleine Axe ſeye $= b$,
der Parameter $= \pi$, ſo iſt $d\pi = bb$ nach §. 907. 1 Th.

$$\overline{\qquad\qquad} \cdot dd$$

Nr. I. $d^3\pi = bbdd$

Es verhält ſich ferner die ganze elliptiſche Fläche zu einander wie die Producte aus den beeden Axen; wie ſich z. E. zween Cirkelflächen zu einander verhalten wie die Quadrate der Diameter, weil beede Axen alsdenn gleich ſind; alſo auch in der elliptiſchen Fläche, wo der eine Diameter die kleine Axe heißt, der andere die groſſe Axe, wie die Producte dieſer zwey Diameter; das iſt, mit den obigen Buchſtaben; wenn man, wie oben, gleichnahmige Glieder gleich ſezt $a = bd$ aber nach §. 564.

$a = t\sqrt{\pi}$

Nr. II. $bd = t\sqrt{\pi}$ folglich quadrirt

$bbdd = tt\pi$ aber nr. I.

$bbdd = d^3\pi$ folglich

$tt\pi = d^3\pi$

$$\overline{\qquad\qquad} : \pi$$

$tt = d^3$

$$\overline{\qquad\qquad} \sqrt{}\ \text{extrah.}$$

$t = \sqrt{d^3}$

§. 565. Zuſaz. Diß iſt das zweyte Keppleriſche Geſez der Bewegung, daß die Quadrate der periodiſchen Zeiten ſeyen wie die Cubi der gröſſern Diameter oder Axen; oder die Zeiten ſelbſt

wie die Quadratwurzeln aus dieſen cubirten gröſſern Diametern.

§. 566. Zuſatz. Diß ſtimmt alles mit der Erfahrung überein; z. E. die Umlaufszeit des Saturnus verhält ſich zur Umlaufszeit der Erde wie 30:1, das iſt, Saturn kommt in 30 Jahren um die Sonne, wann die Erde in einem Jahr herum kommt; ferner wenn die Diſtanz der Sonne = 10, ſo iſt die Diſtanz des Saturns von der Sonne = 95, wenn man nun dieſe Diſtanzen cubirt, ſo hat man 1000: 857375; und wenn man die Umlaufszeiten quadrirt, ſo hat man 1:900; aber 1:900 = 1000:857375 beynahe, nach der gegebenen Theorie; eben ſo hat Herr Abbt la Caille von den übrigen Planeten und ihren Umlaufszeiten eine genaue Tabelle berechnet, Elem. d'Aſtron. §. 170. p. 101. folg.

Die Bradleyiſche Theorie von der Aberration der Fixſterne.

§. 567. Erklär. Die jährliche Parallaxe der Sterne (Parallaxis orbis annua) iſt die Differenz zwiſchen dem wahren Ort des Sterns, wenn er aus der Sonnen geſehen wird, und zwiſchen ſeinem Ort, wo er aus der Erden geſehen wird. Dieſe Differenzen nach der Länge heiſſen Parallaxen der Länge, nach den Breiten Parallaxen der Breite.

§. 568. Anm. Von dieſer parallaxi annua hat Pet. Horrebov, Prof. zu Coppenh. ausführlich und zuerſt gehandelt in ſeinem Copernico triumphante, wo er aus der Parallaxi annua die Zuverläßigkeit des Cop. Syſtems zu behaupten ſuchte.

§ 569. Zuſatz. Die Fixſterne ſcheinen alſo wegen der Bewegung der Erde um die Sonne, in

einem

einem Jahr eine kleine Ellipſe zu beſchreiben, in deren untern Helfte ſie ein halb Jahr direct, in der obern Helfte aber ein halb Jahr zurükgehend erſcheinen, nach den Begriffen, die wir von der Oppoſition und Conjunction der Sterne mit der Sonne gegeben.

§. 570. Erfahr. Die beſte Obſervationen geben, daß die groſſe Axe von den elliptiſchen Kraiſen der hellſten Fixſterne kaum eine Sehne von 3 bis 4 Secunden ſeye, daher die Diſtanz dieſer Sterne faſt unendlich groß angenommen werden darf.

§. 571. Erf. Im vorigen Jahrhundert haben dem ungeachtet die Aſtronomen ſehr merkliche Abweichungen und Veränderungen an den Fixſternen beobachtet, und wurden darüber beſonders betreten, daß ſie gerade den Regeln entgegen ſich bewegen; dann wenn ſie nach den Regeln an dem Ende der groſſen Axe der Ellipſe ſeyn ſollte, ſo ſahe man ſie an dem Ende der kleinen Axe dieſer ſcheinbaren Ellipſe; u. ſ. w.

§. 572. Erklär. Dieſe im vorigen Jahrhundert noch unbekannte Abweichung der Fixſterne von der Regel, hieſſe man die Aberration.

§. 573. Anm. Man hat ſich alle Mühe gegeben, die Sache nach ihren Gründen zu unterſuchen; Herr Moulineux ſtellte eine Menge Beobachtungen an; die Ehre aber, die wahre Gründe von dieſer Abweichung zu entdecken, iſt einem Engländer, Hrn Jac. Bradley vorbehalten worden, welcher auf dem Obſervatorio zu Greenwich die ſorgfältigſte Beobachtungen machte, und endlich aus dem nach und nach fortgepflanzten Licht der Fixſterne die wahre phyſikaliſche Urſache dieſer Abweichung berechnete. Von der Entdeckung, daß das Licht nach und nach ſich fortpflanze, werden wir ſogleich was weiters ſagen, wann wir die Bradleyiſche Theorie vorgetragen haben.

§. 574. Erf. Das Licht braucht von der Sonne auf die Erde zu kommen eine Zeit von 8′ 7″.

§. 575. Zuſatz. Nach §. 507. kann man aus der Zeit die Bogen finden, die die Erde in der gegebenen Zeit in der Ecliptik beſchreibt; ſo geben 8′ 7″ Zeit den Bogen von 20″ in der Erdbahn.

§. 576. Lehrſatz. Wenn *Fig.* 86. TLQI die Ecliptik iſt, P ihr Pol, S ihr Mittelpunkt, wo die Sonne iſt, CBFD die Erdbahn, QPET ein Breiten-Cirkel, der durch einen Fixſtern in E gehet, und ſeine Breite TE beſtimmt; TQ die Interſection des Breiten-Cirkels und der Ecliptik; und die Erde ſich in C befindet, ſo kann man den ſcheinbaren Ort des Sterns beſtimmen.

Bew.

Man ziehe die Linie CE von dem Ort der Erde C in den Stern E, und die Tangente der Erdbahn Cc, die zugleich perpendicular auf die Ebene des breiten Cirkels TPQ iſt; auf der Linie CE nehme man eine Linie nach Belieben, z. E. die Linie CB an, und mache folgende Proportion:

Die Geſchwindigkeit des Lichts von der Sonne auf die Erde verhält ſich zur Geſchwindigkeit der Erde in einerley Zeit, wie CB zur vierten Proportional-linie, die Co ſeyn ſolle, und die man ſucht.

Wann alles in Linien vorzuſtellen, ſo mache man CB=CS der Weite der Sonne von der Erden, das iſt, dem Weg, den das Sonnenlicht nimmt, um auf die Erde zu kommen; den Winkel BCA mache man 20″ groß, welchen Bogen die Erde in der Zeit beſchreibt, während welcher das Licht aus der Sonne zu uns kommt; folglich iſt nach trigon. Gründen

ſin.

$$\begin{array}{l} \text{ſin. tot.} : \text{tang. } 20'' = CB : BA \\ \qquad\qquad\qquad\qquad BA = Co \\ \hline \end{array}$$

ſin. tot. : tang. 20″ = CB : Co. Man kann alſo BA = Co finden, weil CB = der Weite der Sonne von der Erden gegeben vorausgeſezt wird.

Aus BC und Co mache man das Parallelogramm BAoC, und ziehe die Diagonallinie AC, ſo wird dieſe Diagonale mit BC immer den Winkel von 22″ geben; man verlängere CA bis an den äuſſerſten Fixſternhimmel nach χ, ſo wird auch ECχ der Winkel von 22″ und χ der ſcheiubare Ort des Fixſterns ſeyn.

§. 577. **Erklär.** Wenn man mit den Linien EC, Eχ ein dem kleinen ähnliches Parallelogramm ECcχ beſchreibet, ſo heißt dieſes das Parallelogramm der Aberration.

§. 578. **Zuſatz.** Dieſes Parallelogramm der Aberration muß alſo alle Jahr mit der Erde eine ganze Revolution machen; weil aber die Diſtanz der Fixſterne in Vergleichung mit der Diſtanz der Erde von der Sonne unendlich groß angenommen werden kann, ſo darf man ohne Fehler annehmen, dieſes Parallelogramm bewege ſich um die gerade Linie SE, die von der Sonne in den Stern gezogen wird, mit einerley Angulargeſchwindigkeit der Erde.

§. 579. **Lehrſatz.** Aus dieſer Vorausſetzung muß ſich die Aberration der Fixſterne ſo geben, wie ſie beobachtet wird, nemlich den obigen Regeln ganz entgegen.

Bew. *Fig.* 86.

Eχ iſt die Diſtanz des wahren und ſcheinbaren Orts des Sterns, oder die halbe groſſe Axe der Ellipſe;

die Ellipſe ſelbſt iſt $\varphi\beta\chi\delta$, wo $\varphi\beta\chi$ der obere und $\varphi\delta\chi$ der untere Theil, ſo daß $\varphi\chi$ die groſſe Axe parallel mit der Fläche der Ecliptik TLQ, die kleine Axe durch $\beta\delta$ aber perpendicular auf dieſe ebene Fläche ſeye; dieſe beede Axen verhalten ſich zu einander wie der ſin. tot. zum ſin. der Breite des Sterns. Iſt nun das Parallelogramm der Aberration perpendicular auf der Ebene der Ecliptik TPQ, welches in den Sizygien geſchiehet, ſo iſt alsdann auch Eχ perpendicular auf dieſer Fläche; folglich gibt es eine Aberration in der Länge allein, und nicht in der Breite; alſo gerade umgekehrt, als die Regel der jährlichen Parallaxe geben; iſt aber dieſe Parallaxe auch mit der Ebene der Ecliptik zuſammenfallend, welches in der Quadratur geſchiehet, wann die Erde nach den Sizygien, das iſt, Conjunction oder Oppoſition 90° durchloffen hat, ſo erſcheint der Stern in der Extremität der kleinen Axe, und die Aberration iſt nur in der Breite; welche, nach der jährlichen Parallaxe allein, in dieſem Fall null ſeyn ſollte.

§. 580. Anm. Olaus Römer, Prof. zu Coppenhagen, hat zuerſt die allmählige Fortpflanzung des Lichts nach der Beſchreibung, die ſein Nachfolger, Petr. Horrebov, ebenfalls Prof. zu Coppenh. in T. III. Opp. Phyſico Mathematicorum davon gibt, c. 14. de Machina Jovialium Rœmeriana deque Rœmeri demonſtratione diffuſionis luminis ſucceſſivæ, folgendermaſſen gegen das Ende des vorigen Jahrhunderts entdekt: Man betrachte die Verfinſterung eines Jupiterstrabanten, z. E. deſſen, der in $42\frac{1}{2}$ St. ſeinen Umlauf mache; man beobachte den Austritt des Trabanten aus dem Schatten; und nach geſchehenem Umlauf ſeinen neuen Austritt aus dem Schatten des Jupiters; während dieſer Zeit aber iſt die Erde auch in ihrer Bahn immer weiter fortgerükt; die Zeit alſo zwiſchen beeden Austritten unter der Vorausſetzung, daß Jupiter ſeine Bahn nicht merklich verändert hat, wird ſo viel länger als $42\frac{1}{2}$ St. ſo viel Zeit das Licht nöthig hat, den von der Erde inzwiſchen durchloffenen Raum zu durchlau-

laufen. Die verſchiedene Umſtände, z. E. die eigene Bewegung des Jupiters u. ſ. w. die mit in die Rechnung kommen, übergehen wir hier, und wollen nur einen kurzen Begriff von der Entdeckung ſelbſt geben. Römer hat auf dieſe Weiſe die Zeit des Lichts von der Sonne auf die Erde 8′, Bradley nach ſeinen Beobachtungen aber 8′ 13″ gefunden.

§. 581. Anm. Uebrigens iſt es auf dieſe Weiſe allein möglich, etwas zuverläßiges von der Weite der Fixſterne zu ſagen; wie Gregorius in Elem. Aſtr. Prop. 60. 61. zeiget. Dann wenn man das Licht eines Planeten, oder der Sonnen, deren Weite man weiß, mit dem Licht eines Fixſterns vergleicht, ſo kann man aus der Stärke des Lichts auf die Weite ſchlieſſen. So hat Hugen gefunden, daß der Sirius, wenn er ſo groß als die Sonne iſt, wenigſtens 27664 mal weiter als die Sonne von uns entfernt ſeyn müſſe.

Die Newtoniſche Mondstheorie.

§. 582. Anm. Dieſe Theorie verdient um ſo eher vorgetragen zu werden, als man dadurch in den Stand geſezt wird, von allen bisher beobachteten ſo manigfaltigen Veränderungen des Monds und ſeiner Bewegung Rechenſchaft zu geben, wie ſolches beſonders Herr Clairaut gezeigt, in der gecrönten Preisſchrift oder Piece qui a remporté le prix de l'Academie Imperiale des Sciences de St. Petersbourg, propoſé an 1750. ſur la queſtion: *ſi toutes les inegalites, qu'on a obſervé dans le mouvemeut de la Lune, s' accordent avec la Theorie Newtonienne, ou non? & quelle eſt la vraie Theorie de toutes les inegalitès, dont on peut deduire exactement pour un inſtant quelconque praposè le lieu de la Lune?* à St. Petersbourg 1752.

§. 583. Erfahr. Der Mond bewegt ſich um die Erde und mit der Erde zugleich um die Sonne, ſo daß er zwölf bis dreyzehenmal während der Zeit um die Erde ſich bewegt, ehe die Erde ſich einmal um die Sonne in ihrer Revolution herum bewegt. Man nennt ſie periodiſche Monate, ſynodiſche aber von einer Conjunction mit der Sonnen zur andern.

§. 584. Zuſatz. Wenn der Mond keine andere Centralkraft hätte, als diejenige, nach welcher er alle Augenblicke gegen die Erde gravitirt und gezogen wird, ſo würde er mit den Planeten einerley

Ge-

Geſez bey ſeinem Umlauf um die Erde beobachten; das iſt, die Erde würde ſich in dem einen Brennpunkt ſeiner elliptiſchen Bahn befinden, und die zwiſchen den Radiis enthaltene elliptiſche Flächen würden den Zeiten, nach den Kappleriſchen Geſetzen, proportionell ſeyn. Diß aber iſt der Erfahrung nicht gemäß. Der Mond muß alſo zugleich von der Schwere gegen der Sonne in ſeiner Bewegung eine Veränderung leiden; oder die Ungleichheiten in der Mondsbewegung müſſen von der Schwere des Mondes theils gegen die Erde, theils gegen die Sonne zugleich herrühren.

§. 585. Lehrſatz. Wenn *Fig.* 83. 84. der Mond in dem Ort L ſeiner Laufbahn LROQ iſt, ſo daß er ſich nach der Ordnung der Zeichen von L nach RQ bewegt; wenn ferner T der Ort der Erde in dem Mittelpunkt der Mondsbahn iſt, S der Ort der Sonnen, COS, oder OCS in der einen oder andern Figur die Linie der Sizygien, C der Punkt der Conjunction *Fig.* 83. oder der Oppoſition *Fig.* 84. und R ein Punkt der Quadratur, wenn der Mond von L nach R ſich bewegt, auch TS die Diſtanz der Sonne von der Erde, LS die Diſtanz des Monds von der Sonne vorſtellt, ſo iſt klar, daß der Mond in L in der *Fig.* 83. mehr und in der *Fig.* 84. weniger gegen die Sonne gravitire, als die Erde; nemlich nach ſtatiſchen und mechaniſchen Gründen iſt die Verhältniß der Schwere der Erde und des Monds gegen die Sonne, wie $ST^2 : SL^2$. Die Schwere des Monds gegen die Erde wird alſo vermindert, welches aus *Fig.* 83. deutlich erhellet; aber auch aus *Fig.* 84. wenn man bedenkt, daß um ſo vielmehr

die

die Erde gegen die Sonne gravitirt, um ſo viel auch die Wirkung der Schwere des Monds gegen die Erde vermindert werde.

§. 586. **Lehrſatz.** Die Linie LA *Fig.* 83. 84. kann als die Differenz zwiſchen der Gravitation der Erde und des Monds gegen die Sonne angenommen werden.

Bew.

Man ſchneide von der Linie LS die Linie LD dergeſtalt ab, daß LD zu TS ſeye, wie die Schwere des Monds gegen die Sonne, zur Schwere der Erde gegen die Sonne; das iſt, wie $ST^2 : SL^2$. Aus dem Punkt D ziehe man die Linie DF parallel mit CS, und mache ſie der Linie ST gleich, daß DF = ST. Von L ziehe man nach F die Linie LF, und mit LF die Linie DG parallel, ſo ergibt ſich das Parallelogramm LFDG; und LD läßt ſich nach der in der Statik erklärten Lehre von der zuſammengeſezten Bewegung, in die zwo Kräften LF und LG verwandeln. Weil aber LG mit TS parallel, ſo wirkt ſie eben ſo wie TS gegen die Sonne, und verurſacht dahero keine Ungleichheit in der Mondsbewegung; aber LF drükt *Fig.* 83. die Gröſſe aus, um welche der Mond mehr als die Erde gegen die Sonne gravitirt, in der *Fig.* 83, und *Fig.* 84. das Uebergewicht der Erde gegen die Sonne, um welches die Schwere des Monds vermindert wird. Nun iſt die Erde mehr als 300 mal weiter von der Sonne als von dem Mond entfernt; dahero die Linie SD in Anſehung der Linie ST ſehr klein ſeyn, folglich DF der Parallele ST faſt unendlich nahe kommen wird; aus welchem Grund auch FA beynahe unendlich klein werden muß; man kann alſo

ſo für LF ohne einen merklichen Fehler, die Linie LA ſetzen, welche alſo den Unterſchied oder die Differenz der beederſeitigen Gravitation ausdrukt.

§. 587. Erkl. Dieſen Unterſchied, oder dieſe Linie LA, nennt man in der Newtoniſchen Theorie die perturbirende Kraft. (la force perturbatrice)

§. 588. Zuſatz. Wenn man den Radius Vector LT ziehet, und ihn über L nach E verlängert, und hernach auf den Radius LB die Perpendicularlinie, das iſt, die Tangente LB ziehet, ſo läßt ſich das Parallelogramm, davon LA die Diagonale iſt, beſtimmen; und die perturbirende Kraft LA wird wieder in zwo andere Kräfte LE und LB verwandelt, davon die eine LE die Gröſſe anzeigt, um welche die perturbirende Kraft die Schwere des Monds gegen die Erde vermindert, die andere LB aber die Geſchwindigkeit des Mondes, der nach LR ſich bewegt, zu hindern ſucht.

§. 589. Anm. Die Verhältniſſen der Linien LA, LE, LB, welche dieſe Kräften vorſtellen, zu beſtimmen, muß man folgenden Lehnſatz wiſſen.

§. 590. Lehnſatz. Es ſey gegeben $a \pm b$, und b ſey gegen a unendlich klein, ſo iſt das Quadrat oder $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab$.

Beweis.

Wenn b unendlich klein, ſo kann man ſetzen $b = \frac{1}{\infty}$ alſo $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2\frac{a}{\infty} + \frac{1}{\infty^2}$, aber in vergleichung mit $\frac{2a}{\infty}$ iſt der Ausdruk $\frac{1}{\infty^2} = 0$ oder unendlichmal kleiner; folglich den Wehrt ſubſtituirt, iſt $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab$.

§. 591.

§. 591. Lehrſatz. Die perturbirende Kraft des Monds, durch LA ausgedrukt, iſt allzeit die dritte Seite eines Dreyecks, davon die eine der Radius der Mondsbahn, und die andere der dreyfache Coſinus der Diſtanz des Monds von der nächſten Sizygie iſt.

Bew. *Fig.* 83.

$DL : ST = ST^2 : SL^2$ nach §. 585.

$SL = ST - HL$ *Fig.* 83.

$SL^2 = ST^2 - 2ST.HL$ §. 590.

$DL : ST = ST^2 : ST^2 - 2ST.HL$

$:ST$

$DL : ST = ST : ST - 2HL$ und ſubtrah.

$DL - ST : ST = ST - ST + 2HL : ST - 2HL$ d. i.

$DL - ST : ST = 2HL : ST - 2HL$ wo 2HL unendlich klein, daher

$DL - ST : 2HL = ST : ST.$ alſo

$DL - ST = 2HL.$

$LH = LH$ add.

$DL + LH - ST = 3HL$ das iſt

$DH - ST = 2LH$

aber $DH - ST = DS$

$DS = 3LH.$ aber nach geom. Gründen, weil

$DS = TA.$ $LG = FD = ST,$

$TA = 3LH.$

$LH = \sin.LR = \sin$ Diſt. Quadratur.

$R = \cos.CL = \cos.$ Diſt. a Sizyg.

$TA = 3.$ Cos. Diſt. a Sizygia prox.

$TL = $ Rad.

$LA = $ der dritten Seite in dem Triangel TAL, wo TA, TL gegeben.

§. 592.

§. 592. Zuſatz. In der 84. *Fig.* findet eben der Beweis ſtatt, wenn man nur ſtatt DL — ST ſezt ST — DL, da alſo die Differenz dieſer zwo Linien allemal 2HL iſt.

§. 593. Lehrſatz. Die Kraft LB iſt allezeit wie $\frac{3}{2}$ ſin. von der doppelten Diſtanz des Monds von der Sizygienlinie.

Satz. *Fig.* 83.

$$LB = \tfrac{3}{2}\,\text{ſin. } 2CTL.$$

Bew.

Man verlängere LH nach I, ſo iſt LI = 2LH; Man fälle den Perpendikel IK auf die verlängerte Linie LT, ſo iſt KI, BL, AE parallel nach geom. Gründen; folglich auch

$\triangle ILK \backsim ATE.$ alſo

AT : LI = AE : IK
AE = LB

AT : LI = LB : IK aber
AT : LI = 3HL : 2HL nach §. 591.

LB : IK = 3HL : 2HL das iſt
: HL

LB : IK = 3 : 2. und

$LB = \frac{3 \cdot IK}{2}$ aber

IK = ſin. ITK
der Winkel ITK = 2KLI
KLI = CTL } nach geom. Gr.

IK = ſin. 2CTL ſubſtit.

$LB = \tfrac{3}{2}$ ſin. 2CTL.

§. 594.

§. 594. **Lehrſatz.** Die Kraft LE iſt die Summe, oder wenn E zwiſchen L und T fällt, die Differenz, des halben Radius und $\frac{3}{2}$ Coſ. der doppelten Diſtanz des Mondes von der Sizygienlinie.

Satz. *Fig.* 83. 84.

$$LE = \tfrac{1}{2}TL \pm \tfrac{3}{2}TK \text{ oder } = \tfrac{1}{2}TL \pm \tfrac{3}{2}\cos. 2CTL.$$

Bew.

$\triangle ILK \backsim ATE$ alſo wie im vorigen Lehrſatz

$$AT : LI = 3 : 2$$
$$AT : LI = TE : LK$$
$$TE : LK = 3 : 2$$

aber $TE = TL + LE;\ LK = TL + TK$ in der Fig. diß ſubſtit.

$$TL + LE : TL + TK = 3 : 2$$
$$2TL + 2LE = 3TL + 3TK$$
$$2TL = 2TL \quad \text{ſubtr.}$$
$$2LE = TL + 3TK.$$
$$:2$$
$$LE = \tfrac{1}{2}TL + \tfrac{3}{2}TK.$$

aber $TK = \cos. KTI$

$KTI = 2KLI$

$KLI = CTL =$ Diſt. a Syzyg.

$$TK = \cos. 2CTL.$$
$$LE = \tfrac{1}{2}TL \pm \tfrac{3}{2}\cos. 2.CTL.$$

§. 595. **Zuſatz.** Die perturbirende Kraft LA iſt alſo am gröſſeſten in den Sizygien, wo ſie 2TL wird; am kleinſten aber in den Quadraturen, wo ſie nur TL iſt. Die Kraft LB aber iſt die groſſeſte in den Octanten des Monden, nemlich wenn ſie = $\frac{3}{2}$TL; in den Sizygien aber wird ſie null; die Kraft

Kraft LE iſt die gröſſeſte in den Sizygien, wo LE = 2TL; ſie wird aber null, wenn der Mond 54° 44′ von der Sizygienlinie entfernt iſt.

§. 596. Anm. Dieſe Theorie ſezt Cirkelbewegungen voraus, und ſo hat ſie auch Newton ſupponirt, um die Theorie faßlicher zu machen; weil aber der Mond ſowohl als die Erde elliptiſche Bahnen beſchreiben, ſo muß man in der Berechnung ſelbſt, wenn man das Practiſche bey der Mondsbewegung in Richtigkeit bringen will, die Correctionen nach der ſchon angeführten Keppleriſchen Theorie anbringen, wie in den Mayeriſchen Mondstafeln beſſer als in irgend einigen andern geſchehen iſt. Die vorgetragene Theorie ſtimmt alsdann mit der Erfahrung vollkommen überein.

Einige Folgen aus den bisherigen Theorien, beſonders auch in Rukſicht auf den Mond, und den durch ihn entſtehende Finſterniſſe.

§. 597. Erkl. Wenn die Laufbahnen der Planeten in Vergleichung mit der Ecliptik, betrachtet werden, ſo heißt man *Fig.* 90. die zween Durchſchnittspunkte ☊ und ☋ die Knoten (Nodi) und zwar den erſten, wenn der Planet von der ſüdlichen Breite in die nordliche tritt, ☊ der aufſteigende Knoten, der bey der Mondsbahn der Drachenkopf heißt, und den andern ☋ den abſteigenden Knoten, wenn der Planet von der nordlichen Breite in die ſüdliche tritt, bey dem Mond den Drachenſchwanz. Die Umlaufszeit heißt der Dracontiſche Monat.

§. 598. Erkl. Wenn *Fig.* 90. E☊P☋ die Laufbahn des Planeten iſt, und B☊L☋ iſt eben die Laufbahn auf die Ebene der Ecliptik reducirt, ſo daß ſie ſich nicht mehr inclinirt, ſondern mit ſelbiger concentriſch iſt, ſo würde der Planet das ganze Jahr über in der Ecliptik geſehen werden, und keine Breite haben; da er aber in der erſten inclinirten Laufbahn

ſich

ſich bewegt, ſo iſt ſeine Breite nur in zween Fällen null; nemlich in den beeden Knoten; wie aus der Figur erhellet. Die Linie von einem Knoten zum andern heißt die Knotenlinie.

§. 599. Erklär. Wenn die Sonne in S die Erde in T, der Planet in P iſt, ſo mißt der Winkel der Sonne PSL die Breite des Planeten, die durch die Linie PL beſtimmt wird; SP iſt die Diſtanz des Planeten von der Sonne, und die Linie SL, wodurch der Planet auf die Ebene der Ecliptik reducirt wird, heißt die accurtirte Diſtanz.

§. 600. Erklär. Wenn man die Planetenbahn an die äuſſerſte Fixſternen-Sphär hinreferirt, ſo wird ein gröſſerer Cirkel NpDb daraus, der gegen die Ecliptik NlD♈ wie vorhin geneigt iſt; die Knoten zeigen ſich alsdenn in N, und D. Nun ſeye ♈ der Punkt wo das Zeichen des Widders anfängt; von D aus als dem Pol, bilde man ſich den Bogen ♈b beſchrieben ein, ſo iſt b der Punkt, von welchem man anfängt, die Längen des Planeten zu zehlen; dem zu folge heißt der Bogen bDp, nach der Ordnung der Zeichen gezehlt, die Länge des Planeten in ſeiner Laufbahn, und der correſpondirende Bogen der Ecliptik ♈Dl die wahre Länge; und der Bogen pl ſeine Breite. Der Bogen bD heißt der Ort des Knoten; und der Bogen der Ecliptik ♈D die Länge des aufſteigenden Knotens. Der Bogen von D bis p, nemlich Dp, heißt das Argument der Breite; das iſt die Diſtanz des Planeten von ſeinem aufſteigenden Knoten an gerechnet; in den ſechs erſten Zeichen dieſes Arguments iſt

alſo

alſo die Breite nordlich, ſüdlich aber in den ſechs leztern.

§. 601. **Erklär.** Wenn TQR die Laufbahn der Erde iſt, ſo ziehet man die Linie in den Planeten TP, und ſeinen accurtirten Ort TL; ſo iſt PTL das Maas der geocentriſchen Breite; wo auch bey L ein rechter Winkel, weil PL auf die Ebene der Ecliptik perpendicular iſt. Die geocentriſche Länge des Planeten iſt der Bogen ♈DM nach der Ordnung der Zeichen gerechnet, welcher zwiſchen der aus der Erden in T nach dem Anfang der Ecliptik oder ♈ gezogene Linie T♈, und der wieder aus T durch L an die Ecliptik gezogene Linie TM beſtimmt wird. Die heliocentriſche Breite und Länge iſt die Breite und Länge in ſo fern der Planet aus der Sonne geſehen wird, ſo iſt ♈L die heliocentriſche Länge; die Differenz dieſer zwo Längen, nemlich der Bogen ML heißt die jährliche Parallaxe, welche durch den Bogen SLT nach §.522. gemeſſen wird.

§. 602. Anm. Die hier gegebene Erklärungen, beſonders die Argumenta der Breite, muß man bey aſtronomiſchen Rechnungen genau wiſſen, und bey Gebrauch der Tafeln darauf Achtung geben. Man hat zuweilen auch andere Nahmen; ſo heißt in Rukſicht auf die heliocentriſche und geocentriſche Linien der Winkel an der Sonne der Elongationswinkel, der an der Erde der Commutationswinkel, und die Differenz des Commutations- und Elongationswinkels die jährliche Parallaxe, oder die Parallaxe der Erdbahn.

§. 603. **Erklär.** Wenn die Erde, der Mond und die Sonne ſo ſtehen, daß durch ſie, wie durch drey Punkte eine gerade Linie gezogen werden kann, ſo müſſen Finſterniſſen entſtehen, nemlich Sonnenfinſterniſſen, wenn die Ordnung iſt, Sonne, Mond, Erde; Mondsfinſterniſſen aber, wenn die Ordnung die folgende iſt, Sonne, Erde, Mond.

§. 604.

§. 604. Zuſatz. Weil die Erde und Mondsſchatten eine gewiſſe Breite haben, ſo werden auch Finſterniſſe entſtehen, wenn die drey Cörper nicht in ganz gerader Linie liegen.

§. 605. Zuſatz. Weil dieſe Ordnung der drey Cörper allemal ſtatt hätte, ſo oft Sonne und Mond in der Conjunction oder Oppoſition ſind, woferne die Monds- und Erdbahn in einer und eben derſelben Ebene lägen, ſo würde man alle vierzehen Tage Finſterniſſe haben, nemlich das einemal eine Monds- das anderemal eine Sonnenfinſterniß.

§. 606. Zuſatz. Weil aber dieſe Laufbahnen eine gewiſſe Neigung gegen einander haben, ſo entſtehen unter der obigen Bedingung nur Finſterniſſe in der Nähe bey ihren Durchſchnittspunkten, das iſt, wenn die Conjunction in dem Knoten oder nicht gar weit davon entfernt iſt, ſo iſt eine Sonnenfinſterniß; iſt aber die Oppoſition in dem Knoten, oder nahe dabey, ſo entſteht eine Mondsfinſterniß. Dahero die Finſterniſſe ſeltener ſind, ſich aber auf das genaueſte berechnen laſſen.

§. 607. Anm. Die Berechnung der Finſterniſſe gehört in die practiſche Aſtronomie, und iſt mehr mühſam als ſchwer; man muß nur alle Irregularitäten des Monds dabey wiſſen, welche zwar in den Tafeln ſchon bemerkt ſind; daher man nur die Tafeln verſtehen und recht gebrauchen darf.

§. 608. Anm. Eines wollen wir hier melden, das man nicht überall findet. In den hinterlaſſenen Mſcrt. Herrn Gottfr. Kirch findet man eine allgemeine Regel für die ecliptiſche Neumonde. Sie heißt alſo: Ein Neumond, der nicht über 15 Tag 16 St. vor oder nach der Zeit der Conjunction der Sonne mit dem Knoten geſchieht, iſt gewiß verfinſtert, ein ſolcher aber, der über 18 Tag 13 St. von der ☌ der Sonne und des Knotens entfernt iſt, iſt Finſterniß frey. Man muß aber das Zurükgehen der Knoten, welches jährlich über 19° beträgt, mit in die Rechnung bringen. Z. E. In der lezten Sonnenfinſterniß, die den erſten April, oder aſtronomiſch den 31 Merz $22\frac{1}{2}$ St. anfienge, war der Ort

des aufſteigenden Mondsknoten nach den Tafeln ungefehr in 4° ♈. Die Sonne war in dieſem Grad den 26 Merz. Der Neumond folgte den 31 Merz, alſo fünf Tag hernach; folglich mußte eine Sonnenfinſterniß ſeyn. Die gewöhnliche Berechnungen ſtehen in den Tafeln der practiſchen Schriften über die Aſtronomie, wozu Roſtens aſtronomiſches Handbuch gut iſt; wir ſagen was im Beſchluß davon.

§. 609. Zuſatz. Wenn auf der Erde eine Sonnenfinſterniß iſt, ſo hat man im Mond eine Erdfinſterniß; und eine Sonnenfinſterniß, wenn wir eine Mondsfinſterniß haben.

§. 610. Lehrſ. Eine Mondsfinſterniß wird, wo ſie auf dem Erdboden geſehen wird, zu gleicher Zeit geſehen. Der Beweis iſt aus *Fig.* 77. deutlich, ohne daß wir ihn weiter mit Worten ausdrucken; dann wer im Erdeſchatten zugleich wohnt, dem mangelt auch zugleich das dadurch verdekte Mondenlicht.

§. 611. Zuſatz. Wenn man alſo den Anfang einer Mondsfinſterniß, hernach das Ende, auch etwa die Augenblicke, wenn gewiſſe Flecken, oder Berge in den Erdſchatten kommen, genau nach einer Penduluhr obſervirt, ſo kann man die Länge der Oerter, wie in der Geographie gezeigt wird, deſto genauer beſtimmen und corrigiren.

§. 612. Zuſatz. Eine Sonnenfinſterniß hingegen wird nicht zu gleicher Zeit von verſchiedenen Obſervatorn beobachtet, einer ſiehet ſie früher, der ander ſpäter; wie abermal aus der Figur erhellt. Wie man aber dem ungeachtet die Differenz der Mittagscirkel dadurch corrigiren kann, ſolle in dem folgenden Hauptſtük von der Geographie gezeigt werden.

§. 613. Zuſatz. Weil die Sonnen- und Mondsfinſterniſſe ſo ſelten ſind, und man doch kein

be-

bequemer Mittel hat, die Differenzen der Mittagskraiſe zu corrigiren, als die Finſterniſſe, ſo obſervirt man die bey den Jupiterstrabanten, wo ſie häufiger geſchehen, und ſucht dadurch die Correction anzubringen.

§. 614. **Erkl.** Die Mondsflecken ſcheinen nach jeder Revolution des Mondes eine eigene kleine Bewegung zu haben, in Abſicht auf den Mittelpunkt des Monds; bald verändern ſie ihre Länge, bald ihre Breite, bald kommen ſie wieder in ihren vorigen Zuſtand. Dieſe Veränderung heißt man die **Libration** des Monds.

§. 615. **Erkl.** Wegen der Präceſſion der Aequinoctialpunkte §. 514. muß der Pol des Aequators einen kleinen Cirkel, davon er jährlich $50''\frac{1}{3}$ zurük legt, nach und nach, alſo 360° oder den ganzen Cirkel innerhalb 25740 Jahren beſchreiben; weil aber nach den Beobachtungen eine jede Revolution der Mondsknoten die Neigung des Aequators gegen die Ecliptik verändert, ſo muß der Pol der Ecliptik ſeinen Cirkel durch Epicyclen beſchreiben, eine ſolche kleine Epicycle beträgt ungefehr 19 Jahre, davon in der Chronologie. Dieſe Bewegung nennt man die Nutation der Erdaxe.

§. 616. Anm. Die vornehmſte Irregularitäten bey dem Mond, die aus der Schiefe oder Neigung ſeiner Bahn gegen die Erdbahn, aus der anziehenden Kraft der Sonne und der Erde, oder der Schwere gegen dieſe beede Cörper entſtehen, u. ſ. w. ſind nach dem Herrn la Caille folgende: Die Eccentricität der Mondbahn verändert ſich alle Augenblik, ſie iſt am größten, wenn ſie in die Linie der Conjunction, am kleinſten, wenn ſie in die Linie der Quadraturen fällt; von der Conjunction bis zur nächſten Quadratur geht der Knoten zurük, und der Winkel der Mondbahn mit der Erdbahn nimmt zu, von der Quadratur bis zur folgenden Conjunction nimmt der Winkel ab, der Knoten aber geht noch immer zurük. Der Winkel iſt der größte,

wenn die Knotenlinie durch die Quadraturen, am kleinſten, wenn ſie durch die Sizygien (Zuſammenkünfte) geht. Die Axe der Mondbahn, die mit der Ecliptik einen Winkel von 5° 9′ macht, rükt ungefehr alle 9 Jahr durch alle Zeichen nach ihrer Ordnung vorwarts; alſo rücken auch die Knoten in 9 Jahren durch 360°. Der Winkel der Mondbahn mit dem Aequator wird daher alle Augenblik geändert; nemlich die Neigung der Mondbahn gegen den Erdäquator nimmt ungefehr 9 Jahr durch von 18 bis 28° zu, und 9 andere Jahre wieder ab. Andere Irregularitäten, die von der ſphäriſchen Geſtalt der Erde herrühren, haben wir oben genannt, und werden davon was in der Geographie ſagen, wo auch etwas von der Ebbe und Fluth vorkommen kann.

Die Theorie oder Methode der Interpolationen.

§. 617. Erklär. Weil die wahre Bewegungen der himmliſchen Cörper durch genaue Beobachtung entdekt werden, dieſe aber von allen Fehlern bey dem beſten Vorrath der Inſtrumenten eben doch nicht frey ſind, ſo iſt man auf die Methode zu interpoliren gefallen, nach welcher man innerhalb kurzen und gleichen Zwiſchenzeiten, z. E. von zwey zu zwey Tagen, oder alle Tage, drey oder vier Poſitionen eines Planeten ſo genau als möglich iſt, obſervirt, ſo daß die Unterſchiede nicht 8 oder 9° betragen; dieſe Differenzen oder Unterſchiede theilt man hernach in eine ungleich gröſſere Anzahl von kleinen proportionirten Unterſchieden, damit die Fehler bey dem Obſerviren in mehrere Theile getheilt, und alſo durch dieſe Theilung deſto unmerklicher werden; dieſes Verfahren heißt man das Interpoliren; oder die Interpolationsmethode.

§. 618. Lehrſ. Man ſetze zwo Reyhen von Gröſſen, z. E.

m n

$$\begin{matrix} m & n & p & q & r & s \\ a & b & c & d & e & f. \end{matrix}$$

dergeſtalt, daß ein jedes Glied den obern Reyhen auf das correſpondirende Glied der untern Reyhe nach einem gewiſſen Geſetz ſich beziehe. Die Glieder der obern Reyhe heiſſe man Wurzeln; und die correſpondirende Glieder der untern Reyhe heiſſe man Functionen; Nun giebt es zwo Fragen:

1) Man ſetze eine andere Wurzel = x, und fragt, was iſt ihre Function?

2) Man ſetze eine Function y, und fragt, was iſt ihre Wurzel? Die Auflöſung dieſer zwo Fragen iſt die Theorie der Interpolationsmethode.

§. 619. Lehrſ. Man kann das allgemeine Geſez der Function und correſpondirenden Wurzeln durch Induction entdecken.

Auflöſung und Beweis.

Man ſetze erſtlich nur zwo Glieder, wie $\begin{matrix} m & n \\ a & b \end{matrix}$ hier; es ſey die Formel $g + hx$ gegeben, wo x eine Wurzel vorſtellt; g, h ſind beſtändige Gröſſen, deren Wehrt von a, b abhangt; Man ſetze nun $x = m$, ſo iſt

$g + hm = a$ Man ſetze $x = n$ ſo iſt

$g + hn = b$; Nun ſubſtituire man, und ſuche g und h, durch m, n, a, b.

$$g = a - hm$$
$$g = b - hn$$

$$a - hm = b - hn$$
$$hn - hm = b - a \quad \text{oder}$$

$$\frac{h(n-m) = b-a}{\qquad} : n-m$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} \quad \text{aber}$$

$$g = a - hm$$

$$h = \frac{b-a}{n-m} \quad \text{ſubſtit.}$$

$$g = a - \frac{(b-a)m}{n-m} \quad \text{unter einerley Benenn.}$$

$$g = \frac{an - am - bm + am}{n-m} \quad \text{das iſt}$$

$$g = \frac{an - bm}{n-m}$$

Hieraus findet ſich durch Subſtitution

$$g + hx = \frac{an - bm}{n-m} + \left(\frac{b-a}{n-m}\right)x.$$

Wenn eine jede Reyhe drey Glieder hat, z. E. $m, n, p,$ und die Formel für das allge- $a, b, c,$ meine Geſez iſt $g + hx + kxx$, ſo findet man g, h, k durch drey Gleichungen auf eben dieſe Weiſe; dann es ſey $x = m$, ſo iſt

$g + hm + kmm = a$ es ſey $x = n$, ſo iſt

$g + hn + knn = b$ es ſey $x = p$, ſo iſt

$g + hp + kpp = c$, woraus g, h, k in dem Wehrt a, b, c, m, n, p gefunden wird;

Eben ſo macht man es bey vier Gliedern jeder Reyhen, wenn die Formel iſt $g + hx + kx^2 + lx^3$.

§. 620. Anm. Dieſe Erfindung iſt vom Newton, der ſie auch ſo vorſtellt, daß jede Wurzel die Abſciſſen einer krummen Linie, und die Functionen ihre Coordinate bedeuten könne.

§. 621.

§. 621. Lehrſ. Wenn man die gegebenen Formeln als ein Maximum anſieht, ſo laſſen ſich die Wurzeln beſtimmen.

Bew.

Die erſte Formel ſeye $kx^2 + hx + g = Max.$

$$2kxdx + hdx = 0$$

dx

$$2kx + h = 0$$ und

$$2kx = - h$$

:2k

$$x = - \frac{h}{2k}$$

Die zweyte Formel $lx^3 + kx^2 + hx + g = Max.$

diff.

$$3lx^2dx + 2kxdx + hdx = 0$$

dx

$$3lx^2 + 2kx + h = 0$$

$$3lx^2 + 2kx = - h$$

3l

$$x^2 + \frac{2kx}{3l} = - \frac{h}{3l}$$ quadr. unreine Gleichung

$$\frac{kk}{9ll} = \frac{kk}{9ll}$$ add.

$$x^2 + \frac{lkx}{3l} + \frac{kk}{9ll} = \frac{k^2}{9ll} - \frac{h}{3l}$$

√ extr.

$$x + \frac{k}{3l} = \pm \sqrt{\left(\frac{k^2}{9ll} - \frac{h}{3l}\right)}$$

$$\frac{k}{3l} = \frac{k}{3l}$$ ſubtr.

$$x = \pm \sqrt{\left(\frac{k^2}{9ll} - \frac{h}{3l}\right)} - \frac{k}{3l}$$

§. 622. Anm. Hieraus laſſen ſich nun die Fälle berechnen; wir wollen ſie für beede Fälle ſchon berechnet herſetzen:

I. Generalformel: $kx^2 + hx + g$ im Fall des Maximi gibt

$$x = -\frac{h}{2k}$$

Erſter Fall.

Es ſey gegeben
m n p
a b c ſo iſt

$$\begin{cases} k = \dfrac{a(p-n) - b(p-m) + c(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} \\ h = \dfrac{b-a}{n-m} - k(n+m) \\ g = \dfrac{an-bm}{n-m} + kmn. \end{cases}$$

Zweyter Fall. Wenn $m=0$ und $a=0$.

0 n p
0 b c ſo iſt

$$\begin{cases} k = \dfrac{cn - bp}{pn(p-n)} \\ h = \dfrac{bpp - cnn}{pn(p-n)} \\ g = 0. \end{cases}$$

Dritter Fall, wo $n = 1$, $p = 2$.

0 1 2
0 b c ſo iſt

$$\begin{cases} k = \tfrac{1}{2}c - b \\ h = 2b - \tfrac{1}{2}c \\ g = 0. \end{cases}$$

II. Hauptformel $lx^3 + kx^2 + hx + g$, wo im Fall des Maximi

$$x = \pm\sqrt{\left(\frac{kk}{9ll} - \frac{h}{3l}\right)} - \frac{k}{3l}$$

Erſter Fall.

Es ſey gegeben
m, n, p, q ſo iſt
a, b, c, d

$$\begin{cases} l = \dfrac{\left(\begin{array}{l} a(q-p)(p-n)(q-n) - b(q-p)(q-m)(p-m) \\ + c(n-m)(q-m)(q-n) - d(p-m)(p-n)(n-m) \end{array}\right)}{(p-m)(n-m)(q-p)(p-n)(q-m)(n-q)} \\ k = \dfrac{a(p-n) - b(p-m) + e(n-m)}{(p-n)(p-m)(n-m)} - l(m+n+p) \\ h = \dfrac{b-a}{n-m} - l(mm+nn+mn) - k(n+m) \\ g = \dfrac{an-bm}{n-m} + lmn(n+m) + kmn. \end{cases}$$

Zwey-

Zweyter Fall. Wenn m und a null werden.

Es ſey gegeben o, n, p, q / o, b, c, d ſo iſt

$$\begin{cases} l = \dfrac{cnq(q-n) - bpq(q-p) - dnp(p-n)}{npq(p-n)(q-p)(u-q)} \\ k = \dfrac{cn - bp}{pn(p-n)} - l(n+p) \\ h = \dfrac{b}{n} - lnn - kn. \\ g = o. \end{cases}$$

Dritter Fall. Wenn n, p, q = 1, 2, 3.

gegeben o, 1, 2, 3 / o, b, c, d ſo iſt

$$\begin{cases} l = \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}c + \tfrac{1}{6}d \\ k = 2c - \tfrac{5}{2}b - \tfrac{1}{2}d \\ h = 3b - \tfrac{3}{2}c + \tfrac{1}{3}d \\ g = o. \end{cases}$$

§. 623. Anm. Die Anwendung und Erläuterung der vorgetragenen Formeln läßt ſich nun leicht zeigen. Man verlangt den Ort des Merkurs auf den 27 Jun. 7 St. alſo iſt in der zweyten Generalformel die Wurzel oder $x = 27\frac{7}{24}$, das iſt 27 Tag des Junius und $\frac{7}{24}$ eines Tags oder 7 Stund. Nun interpolire man nach dem erſten Fall der zweyten Formel, oder nehme die Obſervation vom 25, 26, 27, 28ſten Junius; da man dann ſetzet $m = 25$, $n = 26$, $p = 27$, $q = 28$, die correſpondirende Buchſtaben a, b, c, d bedeuten die dieſen Tagen correſpondirende Oerter oder Poſitionen des Merkurs am Himmel, die man ſo genau als möglich die vier Tage über obſervirt haben muß. Dieſen Obſervationen zu Folge ſeye $a = 2^s\ 5^\circ\ 39'\ 51''$, $b = 2^s\ 12^\circ\ 2'\ 51''$, $c = 5^s\ 18^\circ\ 26'\ 18''$, $d = 2^s\ 24^\circ\ 48'\ 38''$ (wo das s bedeutet Signum; zwey Signa oder 60°) nun ſuche man nach dem erſten Fall der zweyten Formel die Function, die der Wurzel $x = 27\frac{7}{24}$ correſpondirt.

§. 624. Anm. Weil dieſe Rechnung allzuweitläufig, wie aus dem erſten Fall §. 622. genug erhellt, ſo kann man allerhand Verkürzungen nach arithmetiſchen Gründen dabey anbringen; denn weil bey allen vier Wehrten der Ausdruk 2s vorkommt, ſo kann man überall dieſe 2 Signa ausſtreichen, und nur auf die Grade, Minuten und Secunden Achtung geben; am Ende der Rechnung muß man aber die 2 Signa wieder addiren. Weil ferner die Tage 25, 26, 27, 28 in arithmetiſchen Proportionen fortgehen, ſo kann man dafür o, 1, 2, 3 ſetzen, wo die Verhältniß einer-

einerley; nur muß man dabey ſich am Ende der Rechnung erinnern, daß o den 25, 1 den 26, 2 den 27, 3 den 28ſten Jun bedeute. Endlich kann man noch nach der Lehre von den kleinſten Differenzreyhen auch die erſte Function a = o ſetzen, und für b die Differenz zwiſchen der erſten und zweyten Function, alſo b = 6° 23′ 0″; für c die Differenz zwiſchen der erſten und dritten Function, alſo c = 12° 46′ 27″, und für d die Differenz der erſten und vierten Function, alſo d = 19° 8′ 47″. Diß alles in Secunden verwandelt, die Functionen und Wurzeln gegenüber geſezt, gibt

	$a = 0''$	$m = 0$
	$b = 22980''$	$n = 1$
	$c = 45987''$	$p = 2$
	$d = 68927''$	$q = 3$

Da man dann auf den dritten und leichteſten Fall der zweyten Formel §. 622. durch dieſe Abkürzungen kommt, und nun alles leicht berechnen kann; dann wenn man für l, k, h, g daſelbſt die Wehrte berechnet und ſubſtituirt, ſo hat man

$$l = 15\tfrac{2}{3},\ k = 60\tfrac{1}{2},\ h = 22935\tfrac{1}{6},\ g = 0$$

alſo die ganze Interpolationsformel

$$lx^3 + kx^2 + hx + g = -15\tfrac{2}{3}x^3 + 60\tfrac{1}{2}x^2 + 22935\tfrac{1}{6}x;$$

Nun iſt x = 2 Tag 7 St. weil der 27 Junius, von dem gefragt wird, wenn der 25ſte = o, wie wir in der Abkürzung geſezt, der 2 Tag iſt, und dahero die 7 St. noch addirt x = 2 Tag 7 St. $= 2\tfrac{7}{24} = 2,29167$. Dieſen Wehrt in der Formel ſubſtituirt gibt 52689″, das iſt, 14° 38′ 9″, wenn man ſie auf Grade und Minuten reducirt; und das iſt die Differenz zwiſchen der erſten Function, und zwiſchen der Function die man ſuchte; man muß alſo zur erſten Function die gefundene Differenz addiren, ſo hat man die geſuchte Function, und im Exempel den wahren Ort des Merkurs für den 27 Jun. um 7 Uhr; er iſt nemlich nach dieſer Rechnung, wenn man zu 2s 5° 39′ 51″ die gefundene Differenz 14° 38′ 9″ addirt, auf das gegebene Zeitmoment = 2s 20° 18′ 0″. Eben ſo kann man umgekehrt aus dem Ort die Zeit finden; doch uns genüget, ein Exempel gegeben zu haben, weil ohnehin dieſe Theorie ſchon was zu ſtark für ein Compendium angewachſen iſt.

Etwas von der Cometen-Theorie.

§. 625. Anm. Die Cometen-Theorie iſt an ſich nicht ſchwerer als die Planeten-Theorie iſt, ſondern auch unter einigen wenigen Veränderungen mit der Keppleriſchen Theorie einerley; man könnte ſie alſo hier ſo gut als die vorige abhandeln; inzwiſchen da man den Mond und die Planeten alle Tage ſiehet, die

Come-

Cometen aber oft in vielen Jahren und ganzen Menſchenaltern nicht erſcheinen, ſo wird man in einem Compendio entſchuldigt ſeyn, wenn man dieſe Lehre ungleich kürzer faßt; um ſo mehr, als mancher Leſer ſich um die Theorie eines Weltcörpers, den er ſein Lebtag nicht geſehen, auch vielleicht nie ſehen wird, weniger bekümmern dörfte, als um die Theorie eines Weltcörpers, den er faſt alle Nacht erblikt.

§. 626. **Erkl.** Cometen ſind Sterne, die ſich von den andern durch Schweife unterſcheiden, eine eigene Bewegung haben, durch ganze andere Richtungen und Wege am Himmel als die Planeten, und der Sonne bald nahe ſind, bald ſich unendlich von ihr entfernen.

§. 627. **Lehrſatz.** Die Cometen ſind wirkliche himmliſche Cörper und keine Lufterſcheinungen.

Bew.

Die Cometen werden an ſehr entfernten Orten der Erden zu gleicher Zeit von den Aſtronomen bey einerley Fixſternen geſehen; ſie müſſen alſo weit über unſere Atmoſphäre im unermeßlichen Himmelsraum ſich befinden, und können dahero keine Lufterſcheinungen ſeyn.

§. 628. **Lehrſatz.** Die Laufbahnen der Cometen ſind ſehr elliptiſch oder lange Ellipſen, die man für Parabeln annehmen kann, und in deren einen Brennpunkt die Sonne iſt.

Bew.

Die Cometen ſind der Sonne oft ſehr nahe, alsdann entfernen ſie ſich ſo, daß ihre ſcheinbare Gröſſe immer abnimmt, und zulezt auch dem gewafneten Auge entflieht; wenn ſie der Sonne nahe ſind, ſo bewegen ſie ſich um die Sonne, und entfernen ſich auf der andern Seite; das iſt aber der Begriff einer ſehr excentriſchen Ellipſe nach §. 940. I. Th. eine

ſol-

ſolche Ellipſe aber darf man zu Erleichterung der Rechnung ohne Fehler für eine Parabel annehmen nach §. 943. I. Th. folglich bewegen ſich die Cometen in excentriſchen Ellipſen, deren Bögen man für paraboliſche Bögen annehmen kann.

§. 629. Zuſatz. Weil die Cometenbahnen Ellipſen ſind, ſo läßt ſich in der Hauptſache die Keppleriſche Theorie auf ſie anwenden.

§. 630. Zuſatz. Weil man aber gewohnt iſt, die Anomalien vom Aphelio an zu rechnen, das Aphelium des Cometen aber unendlich weit vom Perihelio entfernt iſt, und weil die mittlere Anomalie von der periodiſchen Umlaufszeit abhangt, die bey paraboliſchen Laufbahnen nicht ſtatt findet, ſo ſind es dieſe beede Hinderniſſe oder Urſachen allein, warum man eine eigene Theorie für die Cometen hat.

§. 631. Zuſatz. Man könnte aber nach dem Vorſchlag Herrn Prof. Eulers beeden Schwierigkeiten abhelfen, wenn man erſtlich die Anomalien durchgehends auch bey den Planeten vom Perihelio an rechnen, und ſtatt der mittlern Anomalie die Zeit von dem Augenblik, wann der Himmelscörper im Perihelio ſich befindet, calculiren wollte. Dann ſonſten befolgen die Cometen das allgemeine Geſez, nach welchem die Zeiten in der zuſammengeſezten geraden Verhältniß der um die Sonne beſchriebenen Flächen, und umgekehrten der Quadratwurzeln aus den Parametern der Laufbahnen ſind. (in ratione compoſita arearum circa ſolem deſcriptarum directa & reciproca ſubduplicata parametrorum orbitarum.)

§. 632.

§. 632. **Zuſatz.** Wenn man alſo in den berechneten Tafeln dieſe Correctionen anwenden wollte, ſo könnte man einerley Tafeln für die Planeten und Cometen gebrauchen.

§. 633. Anm. Auf dieſe Art hat Herr Prof Euler in ſeiner Theoria Motuum Cometarum & Planetarum die Beweiſe vorgetragen, die man aus §. 943. folgg. I. Th. verſtehen wird, auch ausführliche Tafeln für die Cometen 1684. 81, und den vom Jahr 1740. gegeben. Er ſchreibt p. 4. l. c. Loco anomaliæ mediæ ipſum tempus a momento, quo ſidus in perihelio verſatur, computatum adhibebo; anomalia vera autem erit diſtantia ſideris heliocentrica a perihelio.

§. 634. Anm. Die erſte Entdeckung, daß die Cometen in paraboliſchen Laufbahnen ſich bewegen, hat Dörfel, ein Sächſiſcher Geiſtlicher, zuerſt gemacht; Herr Prof Käſtner hat von ihm Nachricht gegeben in den Schriften der Geſellſch. der Fr. K. III. Th. und in ſeinem Gedicht über den Cometen, das in ſeinen vermiſchten Schriften auch eingerükt iſt, wo er, weil Newton nachgehends dieſe Theorie erwieſen, folgenden Ausdruk gebraucht:

Doch Newton wird gerühmt und Dörfel bleibt vergeſſen,

allein der Dörfeliſche Nahme hat dieſes mit vielen andern Erfindersnahmen gemein.

Etwas von dem Practiſchen in der Aſtronomie.

§. 635. Anm. Damit man doch auch den Nutzen des bisher vorgetragenen einigermaſſen ſehe, ſo will ich nur etwas von der practiſchen Aſtronomie anführen; das, was ich davon ſagen werde, ſolle nur etwa auf die Obſervation des Sonnenjahrs und einige andere Beobachtungen und Rechnungen eingeſchränkt ſeyn, weil man doch die ganze practiſche Aſtronomie hier nicht vortragen kann, und es auch nicht gewohnt iſt, in einem Handbuch ſolche vorzutragen.

§. 636. **Lehrſatz.** Das Aequinoctium oder Nachtgleiche läßt ſich obſerviren und beſtimmen, und daraus die Länge des Sonnenjahres finden.

Bew.

Es ſeyen *Fig.* 70. AQ der Aequator, EC die Eclip-

tik,

tik, HR der Horizont, P der Weltpol, und ♈ der Frühlingspunkt; ſo wird die Sonne ſelbigen Tag, an welchem das Aequinoctium iſt, und den man aus dem Calender wiſſen kann, im Bogen Es ſeyn; dieſen Bogen ſetze man = 1°, weil die Sonne täglich ungefehr einen Grad in der Ecliptik zurük legt. Man obſervire nun die Mittagshöhe der Sonne, da dann die Sonne um dieſelbe Zeit entweder im ♈ oder in einem andern Theil des Bogen E♈s ſeyn wird; iſt ſie im ♈, ſo iſt das Aequinoctium gerade um ſelbige Zeit, das iſt, am Mittag; iſt ſie in E, ſo wird das Aequinoctium noch nicht geweſen ſeyn, folglich erſt Nachmittag einfallen; iſt ſie aber in s, ſo wird es ſchon Vormittag geweſen ſeyn. Die kleine Bogen AD, AE beſtimmen die Breite der Sonne, oder ihre Diſtanz vom Aequator, da dann AE = AH — EH, und AD = DH — AH; die Differenzen der Sonnenhöhen und der Höhen des Aequators geben alſo die Declinationsbogen; aber in ſo kleinen Bogen darf man die Bewegung gleichförmig annehmen, folglich läßt nach der Regel Detri die Zeit des Aequinoctii ſich finden; dann ſo viel Minuten der Bogen AC oder AE enthält, um ſo viel Stunden Vor- oder Nachmittag hat das Aequinoctium ſich eingefunden. (Weil der ganze Declinationsbogen ungefehr 24′ beträgt).

§. 637. Anm. So hat man vor Alters ſchon die Aequinoctia obſervirt; man ſieht aber ſchon, daß die Fehler um eine Minute im Bogen, eine Stund in der Zeit, und der Fehler von 24′ ſchon einen Tag austrage; doch ſo weit hat man auch bey dem ſchlechteſten Vorrath von Inſtrumenten nie geirret, hingegen gab es oft Fehler wegen der Refraction, die den Alten ganz unbekannt ware, dahero die alte Obſervationen mit Behutſamkeit zu gebrauchen ſind. Weil aber eine Minute im Bogen gefehlt, ſchon eine

eine Stund in der Zeit, und eine Secunde im Bogen ſchon eine Minute in der Zeit austrägt, ſo muß man die Fehler nach der Interpolationsmethode ſo viel möglich vertheilen, und zu dem Ende, wenn man die Jahreslänge ſucht, eine Zwiſchenzeit von mehrern Jahren annehmen, die von einem Aequinoctio zum andern verfloſſen ſind. Wenn man z. E. zwo Obſervationen nimmt, die 1800 voneinander entfernt ſind, ſo wird der im Obſerviren begangene Irrthum für ein Jahr nur $\frac{1}{1800}$ des gemachten Fehlers austragen.

§. 638. Zuſatz. Man muß aber neben dem daß man alles auf einerley Calender und Meridian reducirt, die Präceßion der Nachtgleichen, davon wir ſchon gehandelt, mit in die Rechnung bringen, und gehörig ſubtrahiren.

§. 639. Zuſatz. Es ſeye die Gröſſe des Julianiſchen Jahrs, nemlich 365 T. 6 St. = A, die Anzahl der Jahre zwiſchen zwo Obſervationen = n, die Präceßion der Nachtgleichen während dieſer Zeit = m, ſo iſt die wahre Jahreslänge nach der Regel Detri $A - \frac{m}{n}$, und unter einerley Benennung $\frac{nA - m}{n}$.

§. 640. Erklär. Die ſcheinbare Diameter des Mondes und der Planeten zu beobachten, bedient man ſich der Micrometer, die auf das Fernrohr geſchraubt werden; und davon eine jede Umdrehung genau bemerkt wird, bis die Spitzen zuſammen kommen, daß alſo die Anzahl der Umdrehungen den kleinen Raum am Himmel abmeſſen; nach Herrn Eulers Empfehlung iſt das Kirchiſche Micrometer allen andern ungleich koſtbarern vorzuziehen.

§. 641. Erklär. Die Zeitgleichung lehret aus der mittlern Zeit die wahre, und aus der wahren die mittlere finden. In jenem Fall wird die

Diſ=

Differenz der Rectaſcenſion und der mittlern Bewegung der Sonne, in Sonnenzeit verwandelt, der mittlern Zeit addirt, wenn die Rectaſcenſion gröſſer als die mittlere Bewegung iſt, und wenn ſie kleiner iſt, ſubtrahirt; in dieſem Fall aber wird, was vorher ſubtrahirt wird, addirt, und was addirt wird, ſubtrahirt. Wie die Figur ausweiſet.

§ 642. Anm. Will man ruckwarts auf einer gegebenen Epoche die der mittelen Bewegung correſpondirende Zeit berechnen, ſo nimmt man zur Epoche, um die Rechnung zu erleichtern, den erſten Jenner eines Secular-Jahres, z. E. 1700, dieſen Tag fangt man den Mittag vorher, nemlich den lezten December des vorigen Jahrs an, daß im Mittag des erſten Jenners ein aſtronomiſcher Tag und zwar der erſte von der Epoche zu Ende gehe, welches ebenfalls die Rechnung erläutert, weil man hernach complete Tage zehlen darf, wo man im Gegentheil, wenn man mit dem Mittag des erſten Jenners anfangt, wie in einigen Tafeln geſchieht, laufende Tage hat, bey welchen die Rechnung ſchon beſchwerlicher iſt. Man ſucht hierauf auf eine gegebene Zeit den wahren Ort der Sonne, durch Obſervationen, und verwandelt ihn in ſeinen mittleren Ort, wie auch die wahre Zeit in mittlere Zeit; dann von dieſer Zeit an zehlt man die inzwiſchen verfloſſene Jahre, Tage, Stunden, bis auf den Anfang der Epoche, wenn man die genaueſte mittlere Bewegung verrechnet, woraus ſich bald der mittlere Ort der Sonne auf die angenommene Epoche geben wird; z. E. die Sonne ſey zur Zeit der Obſervation, *Fig.* 79. in G. ſo iſt ihr mittlerer Ort alsdenn C. ♈. wie S♈♈ der Aequator; und DKVD die Ecliptik; und der mittlere Ort in der Ecliptik D♈. ſo iſt G♈ ♎ D♈. Man rechnet ferner blos nach julianiſchen Jahren, wo allemal dem vierten Jahr ein Schalttag zugegeben wird, ohne auf die gregorianiſche Verbeſſerung zu ſehen, abermals die Rechnung zu erleichtern; alſo für 64. (365.) Tag: und 15. Schalttage, ſucht man die mittlere nach der Regel Detri, da heraus 64. (359° 45′ 40″) ♈ 15. (591 8″) nach den Gründen der ſphäriſchen Aſtronomie; Die ganze Cirkel läßt man weg, weil man die nächſte Diſtanz vom Frühlings-Punkt verlangt; geſezt nun in der Fig. ſey y der Ort auf den 1. Jenner 1700. aſtronomiſch; Der mittlere Ort der Sonne auf die Zeit der Obſervation um einen ganzen Cirkel oder 360° vermehrt, und von der mittleren Bewegung der Sonne während den Zeiten der Epoche bis zur Obſervation nach vorher weggeworfenen ſo viel ganzen Cirkeln, als man kann, ſubtrahirt,

der

der Reſt zeigt den mittlern Ort der Sonne auf die geſuchte Epoche. Mit den Bewegungen des Mondes verfährt man auf eine ähnliche Weiſe: ſie ſind in den Comm. Soc. Scient. Gœtting. T. II. eingerückt und erklärt. Die beſte Tafeln ſind, wie wir ſchon gemeldet, die von Herrn Prof. Tob. Mayer, weil ſie von den genauſten Beobachtungen ſelten über eine Minute, und nie über anderthalb Minuten, da ſonſt alle andere auch die beſte die man hatte, um 4 bis 5 Minuten von den Obſervationen je und je abgehen. Auf dieſe Weiſe werden die Aequations-Tafeln gemacht.

§. 643. Anm. Was die Sonnen- und Monds-Finſterniſſen betrift, ſo berechnet man ſie folgender maſſen, man berechnet alle mittlere Neumonde des vorgegebenen Jahrs, in welchen man die Finſterniſſe ſuchet, und unter dieſen vornemlich den erſten mittleren Neumond, entweder nach den Tafeln der mittlern Bewegung der Sonne und des Monds, oder des Mondes von der Sonne, oder nach den Tafeln der Epacten, oder nach den Epochen der mittlern Conjunction des Monds und der Sonne in Halleys Tafeln; hernach unterſucht man ob einer von dieſen mittlern Neumonden ecliptiſch ſey, und welcher es ſeyn werde, welches alſo geſchiehet; man berechnet auf die gefundene Zeit des erſten mittlern Neumonds die Lage der Sonne, und des aufſteigenden Knotens des Monds; Die leztere wird von der erſten abgezogen; Der Reſt giebt die Entfernung der Sonne vom aufſteigenden Knoten des Monds im erſten mittleren Neumond; Zu dieſem Reſt addirt man die mittlere Bewegung der Sonne in Anſehung des Knotens, während einem mittleren ſynodiſchen Monat, 12 oder wann es nöthig iſt 13 mal; (Sie beträgt 30° 40′ 14″) die geben die Entfernungen der Sonne von dem aufſteigenden Knoten in allen mittlern Neumonden des Jahrs; Iſt nun dieſe Entfernung oder ihr Complement zu 6 oder 12 Zeichen gröſſer als 21° ſo iſt ſelbigen Neumond keine Finſterniß, iſt ſie kleiner als 15° ſo iſt gewiß eine Finſterniß; fällt ſie zwiſchen dieſen zweyen Grenzen 15 und 21° ſo iſt es möglich daß es eine ſeye, doch nicht gewiß. So war im vierten mittleren Neumond dieſes Jahrs die Diſtanz 5° 32′ 26″ alſo mußte nothwendig eine Finſterniß ſeyn. Eine nähere Anwendung beſonders auf die lezte Sonnen-Finſterniß den 1. Apr. 1764. findet man in Herrn Reccards Abhandlung davon 1763. von dieſer Finſterniß habe um ſo eher was ſagen wollen, als Sr. Herzogl. Durchl. ſelbſt auf dem hieſigen Obſervatorio ſolche in höchſten Augenſchein zu nehmen gnädigſt geruhen wollten. Die Art und Weiſe ſie zu beobachten, wird in allen praktiſchen Schriften von der Aſtronomie vorgetragen, die bekannteſten ſind, wenn man das Sonnenbild durch ein Fernrohr auf ein

beweglich Geſtell in ein etwas dunkels Zimmer fallen läſſet, und wenn man mit einem gefärbten auf ein Fernrohr hingeſchraubten Glas nach einer Penduluhr den Anfang und das Ende genau beobachtet, in welchem leztern Fall ſie beſonders dienen, die Differenz der Mittags-Cirkel genauer zu beſtimmen.

Zwey-

Zweytes Hauptſtük, Von der Geographie.

§. 644.

Erklärung.

Die Geographie theilt ſich in die politiſche, phyſikaliſche und mathematiſche Geographie ein; die beede erſtere gehören nicht hieher, ſondern nur die leztere, die wir um ſo eher kürzlich abhandeln, als die in der Aſtronomie vorgetragene Lehren hier nur wiederum angewendet werden dörfen; neben dem haben wir Hofnung, von dem Herrn Prof. **Volz** allhier ein ausführlicheres geographiſches Lehrbuch nächſtens im Druk zu ſehen.

§. 645. Die mathematiſche Geographie iſt die Kenntniß der Erde, in ſofern ſie ausgemeſſen werden kann. So kurz dieſe Erklärung iſt, ſo viel begreift ſie in ſich, wir wollen aber nur das nöthigſte davon nach der vorangeſchikten Hiſtorie anführen.

Geſchichte der mathematiſchen Geographie.

§. 646. Die Geſchichte der mathematiſchen Geographie kann nach drey Zeitperioden vorgetragen werden; in den erſten gehört die ganze alte Geographie nach den drey damals bekannten Welttheilen,

wovon Ptolemäus in Geographia orbis antiqui am ausführlichſten unter den Alten gehandelt; diß iſt die Zeitperiode, in welcher man nicht ohne Furcht des Gegentheils, auch zuweilen nicht ohne Schrekken, beſonders als es dem **Vergilius**, Biſchoff zu Salzburg, ſo übel belohnet wurde, an Gegenfüßler dachte.

§. 647. Als man anfienge die ganze Welt zu umſchiffen, bekam die mathematiſche Geographie eine neue Geſtalt, und mit derſelben fängt die zweyte Zeitperiode an, welche bis auf das gegenwärtige Jahrhundert währete. Unter die beſte Schriften, die in dieſem mittlern Alter der Geographie herauskamen, gehört des bekannten Jeſuiten **Riccioli** Geographia reformata, woraus Erh. **Weigel** für die Anfänger einen Auszug gemacht; auch hat L. C. **Sturm** eine Geographiam mathematicam herausgegeben, und der Freyh. von **Wolf** in ſeinen latein. Elementen die mathematiſche Geographie, ſo gut man ſie in dieſem zweyten Periodo abhandeln konnte, gründlich und deutlich vorgetragen.

§. 648. Das dritte Alter der mathematiſchen Geographie fängt erſt mit unſerm Jahrhundert an, in welchem man **Newtons** Muthmaſſung von der Erde durch die wirkliche Erfahrung beſtätigt fande, eine Erfahrung, welche diejenige ſelbſt machten, die dem Newton und den engliſchen Philoſophen vorher immer wiederſprachen, bis ſie nach den beſchwerlichſten Reiſen, die ſie vermuthlich in der ſüſſen Hoffnung, recht zu behalten, und den Newton augenſcheinlich wiederlegen zu können, unternahmen, doch den Newtonianern alle Gerechtigkeit wieder-

derfahren laſſen mußten. Dann nach den neueſten Beobachtungen, die in Lappland und Peru angeſtellt wurden, iſt die Erde ein gegen die Pole zuſammengedruktes Sphäroid, wie es Newton vorausgeſezt hat; man ſehe la figure de la Terre determinée par les Obſervations de Mrs. de *Maupertuis*, *Clairaut*, *Camus*, *le Monnier*, *Celſius* &c. in Lappland; und la figure de la terre determinée par les Msr. *Bouguer* & *de la Condamine;* und noch Meſure des trois prémiers degrés du Meridien dans l'Hemisphere auſtral par Mr. de la *Condamine*.

§. 649. Unter die Hauptſchriften der Neuern gehört auſſer Herrn v. Maupertuis Elemens de Geographie, beſonders Lulofs Kenntniß der Erdkugel, welche ins Deutſche überſezt iſt.

Die wahre Geſtalt der Erde.

§. 650. **Erfahr.** Wenn auf dem Erdboden eine Mondsfinſterniß beobachtet wird, ſo erſcheint der Schatten der Erde in dem Mond Cirkelförmig.

§. 651. **Zuſatz.** Daraus hat man immer den Schluß mit Recht gemacht, daß die Erde kugelförmig ſeye; ob ſie aber eine völlige Kugel ſeye, oder ein Sphäroid, das hat man erſt in den neueſten Zeiten entſcheiden können.

§. 652. Anm. Eben das erhellet aus Beobachtung der Sterne und ihrer Mittagshöhen, welche ſich ändert, wenn man gegen Norden oder Süden reißt, ſo daß ein Stern, der anfänglich eine kleine Höhe hat, zulezt, wenn wir unſern Stand auf der Erden ſo weit veränderten, über unſere Scheitel zu ſtehen kommt. Einen ähnlichen Beweis nimmt man aus der mehrmalen geſchehenen Umſchiffung der Welt.

§. 653. Zuſatz. Wenn die Erde eine vollkommene Kugel wäre, ſo wären ihre gröſſeſte Cirkel alle einander gleich; und folglich die Grade dieſer Cirkel alle gleichgroß, wenn z. E. ein Grad auf der Erdfläche 15 Meilen betrüge, ſo würden überall, wo man nur einen ſolchen Grad des größten Cirkels mißt, 15 Meilen herauskommen, und man würde den Umfang und den Diameter der Erde meſſen können.

§. 654. Erfahr. Diß aber ſtimmt nicht mit der Erfahrung neuern Zeiten überein; dann gegen die Pole ſind die Grade gröſſer, oder man muß bey den Polen weiter gehen, bis man eine merkliche Krümmung wahrnimmt, als man bey dem Aequator gehen darf.

§. 655. Zuſatz. Alſo iſt die Erde nicht völlig kugelrund; dahero iſt die alte angegebene Rechnung vom Umkreiß der Erden falſch; wo 15 Meilen, für einen Grad angenommen, den größten Cirkel 360.15 = 5400 Meilen, und den Diameter $\frac{100 \cdot 5400}{314}$, das iſt, beynahe 1720 Meilen geben.

§. 656. Anm. Man ſollte alſo nur aus dieſem Grunde die Verdienſte derjenigen hoch ſchätzen lernen, welche die Grade auf den Erdboden meſſen; weil man doch auch wiſſen muß, wie die Erde ausſehe, die wir bewohnen; das wird nun in folgendem gezeigt.

§. 657. Lehrſatz. Wenn die Erde anfänglich eine flüßige Kugel geweſen iſt, deren Theile durch die Schwere zuſammen hiengen, und wenn ſie durch die tägliche Bewegung um ihre Axe einen Schwung bekommen, ſo müſſen ſich ihre Theile deſtomehr erhoben haben, je näher ſie dem Aequator ſind;

ſind; daraus muß nach und nach ein gegen die Pole zuſammengedruktes Sphäroid geworden ſeyn.

§. 658. Anm. Aus dieſem Grund haben Hugenius und Newton die Erde für ein zuſammengedruktes Sphäroid gehalten, und in neueren Zeiten hat man es der Erfahrung gemäß befunden.

§. 659. **Erfahrung.** Nach denen neueſten Ausmeſſungen des Herrn von **Maupertuis** iſt des Mittags-Cirkels gröſter Grad = 57595 Toiſen, kleinſter Grad = 56625 Toiſen, Das Mittel iſt alſo = 57108, 5 Toiſen; hieraus laſſen ſich die beede Erddiameter, nemlich der Diameter des Aequators und die Erdaxe von einem Pol zum andern beſtimmen.

§. 660. **Zuſatz.** Nach Herrn von **Maupertuis** verhalten ſie ſich wie 178,33 : 177,3 nach Herrn **Bouguer** wie 179 : 178; nach Herrn **Euler**, der die Beobachtungen in Frankreich, Lappland und Peru verglichen hat, wie 201 : 202.

§. 661. Anm. Wenn die Unterſuchungen fortgeſetzt werden, ſo kann man die Geſtalt der Erde noch genauer beſtimmen; wie dann in Comm. Bonon. Vol. 4. Herr P. Boſcowich von ſeiner Abmeſſung des Feldes bey Rom Nachricht gibt, auch erſt im vorigen Jahr Herr Caſſini de Thury mit einer ähnlichen Arbeit von den Grenzen unſeres Landes bis gegen Wien hinab ſich beſchäftiget hat.

Die Unterſchiede der Mittagscirkel in Zeit und Graden.

§. 662. **Erklär.** Auf dem Erdboden oder auf der Erdkugel trift man die meiſte von den Cirkeln an, die wir in der ſphäriſchen Aſtronomie ſchon genannt haben. So iſt z. E. *Fig.* 80. AD der Aequator, PQ die Axe, P und Q die Pole, PMQ

ein Mittags-Kreiß u. ſ. w. wobey man annimmt, daß die Erde kugelförmig ſeye.

§. 663. Erf. Diejenige die weiter gegen Morgen wohnen, ſehen die Sonne eher aufgehen, als die welche gegen Abend wohnen; welches aus der kugelförmigen Geſtalt auch ohne Erfahrung erhellen würde.

§. 664. Zuſatz. Wenn alſo die erſtere wie die leztere ihre Stunden im Mittag anfangen, ſo werden die erſtere in einem und eben demſelben Augenblick mehr Stunden zehlen als die leztere; z. E. die erſtere haben Nachmittags 3. Uhr, wenn die leztere nur 2. Uhr zehlen.

§. 665. Lehrſ. Der Unterſchied der Mittage in Zeit läßt ſich aus Monds-Finſterniſſen u. ſ. w. beſtimmen. Wenn zweyer noch ſo weit entlegener Oerter Innwohner eine Erſcheinung am Himmel, z. E. eine Monds-Finſterniß betrachten, ſo dörfen ſie verſichert ſeyn, daß ſie ſolche zu gleicher Zeit ſehen. Dann in dem Augenblick, da der eine den Anfang einer Monds-Finſterniß, oder den Austritt eines Jupiterstrabanten aus dem Monde ſiehet, muß ihn der andere, wenn er ihn ſiehet, auch ſehen, wie aus aſtronomiſchen Gründen erhellt; Wenn alſo der eine Abends um 11 Uhr, und der andere Abends um 10 Uhr zehlt, ſo hat jener eine Stunde eher Mittag gehabt.

§. 666. Zuſatz.. Diß heißt alſo der Unterſchied des Mittags in Zeit (Differentia Meridianorum.)

§. 667. Lehrſatz. Wenn *Fig.* 81. PAQ, PBQ, zween Mittags-Cirkel ſind, die ſo liegen; daß

daß die Sonne gerade eine Stund braucht, von einem in andern zu kommen, und wenn alſo der Bogen des Aequators AB das Maas zwiſchen ihnen oder vom Winkel APB iſt, ſo muß ſich dieſer Bogen in einer Stunde durch den Mittags-Cirkel ſchieben; Da nun eine Stund Sternenzeit 75° und eine Stund Sonnenzeit 15° 2′ 28″ in Bogen macht, nach den ſchon vorgetragenen aſtronomiſchen Gründen, ſo wird er auch ſo viel Grade und Bogen halten, je nachdem einer Stern oder Sonnenſtunde verſteht.

§. 668. Zuſatz. Wenn alſo PBQ mit PAQ einen Winkel von 15° 2′ 28″ macht, welches der Winkel APB iſt, ſo hat man die Lage der Mittags-Cirkel gegen einander, und das heißt die Differenz der Mittags-Cirkel in Bogen. (Differentia Meridianorum in gradibus.)

§. 669. Anm. In der Ausübung, um die Beſchwerlichkeit in Rechnungen zu vermeiden, iſt ungemein viel daran gelegen, daß man einen gewiſſen Mittags-Cirkel zum erſten macht, von welchem man zu zehlen anfangt; dann unerachtet es willkührlich iſt, welchen man zum erſten macht, ſo verurſacht man doch, wenn verſchiedene Nationen von einander abgehen, im Ganzen deſto mehr unnöthige Mühe. Die Holländer ziehen den erſten Mittags-Kreiß durch den Berg Pic auf der Inſel Tenriffa; Die Franzoſen durch die Inſel Ferro 20° $2\frac{1}{2}$′ weſtwärts von dem pariſer Obſervatorio; Die Alten haben ihn durch die ihnen bekannte weſtliche Gegenden gezogen.

Von der Breite und Länge der Oerter.

§. 670. Erklär. Wenn *Fig.* 80. ein Ort auf dem Erdboden E gegeben iſt, ſo heißt EA, die Diſtanz vom Aequator DA, welche durch den vom Pol P aus, und durch deren Ort E gezogenen Qua-

 dranten

dranten PEA gemeſſen wird; die Breite des Orts (Latitudo Loci) welche nordlich oder ſüdlich ſeyn kann, wie in der Aſtronomie die Declination eines Sterns.

§. 671. Erklär. Wenn POQ in *Fig.* 80. der erſte Mittagskreiß iſt, ſo heißt der Bogen des Aequators OA, von dem Punkt O wo der erſte Mittagskreiß ihn ſchneidet bis A, wo der von P durch den Ort E gezogene Quadrant ihn ſchneidet, die Länge des Orts (Longitudo Loci.)

§. 672. Zuſatz. Aus der gegebenen Länge und Breite läßt ſich alſo ein Ort auf dem Erdboden beſtimmen.

§. 673. Zuſatz. Der Unterſchied der Längen zweyer Orten iſt alſo mit dem Unterſchied ihrer Mittagscirkel einerley.

§. 674. Lehrſatz. Wenn man einen Mittagscirkel, für welchen aſtronomiſche Tafeln und Calender gemacht werden, für den erſten annimmt, ſo laſſen ſich die übrige darnach beſtimmen. Denn es ſeyen *Fig.* 81. PAQ, PBQ, PCQ drey Mittagscirkel, für drey Oerter A, B, C.

A liege 2° 25′ 15″ weſtlicher als B, und
B 11° 7′ 15″ weſtlicher als C; ſo iſt wenn man die Mittagscirkel durch A für den erſten annimmt, die Länge des Orts C=AC=AB+BC =13° 33′.

§. 675. Zuſatz. Geſezt A iſt London, B Paris, C Berlin, und man hätte nach dem Londner Mittagskreiß gerechnete Tafeln, ſo wird für den Berliner die Länge ſeyn 13° 33′, unter welcher Beſtimmung die Tafeln für Berlin zu gebrauchen ſind.

§. 676.

§. 676. Lehrſatz. Die Weite zweyer Oerter von einander, deren Länge und Breite gegeben iſt, läßt ſich auf dem Erdboden beſtimmen. Denn es ſeyen *Fig*. 4. die Oerter F, M; man ſuche den Bogen des größten Cirkels FM durch ſie. Im ſphäriſchen Dreyeck FPM iſt gegeben der Winkel FPM aus dem Unterſcheid der Länge der Oerter, ferner die Seiten FP, und PM, als die Complementen der Breiten FD, MO; daraus findet man nach ſph. trigon. Gründen die Seite FM.

§. 677. Zuſatz. Wenn der eine Ort z. E. F, ſüdlich oder jenſeit des Aequators, und der andere M nordlich oder diſſeits des Aequators liegt, ſo iſt die Seite Pf $= 90° +$ die ſüdliche Breite. Folglich findet man die Entfernung dieſer beeden Oerter auch trigonometriſch.

§. 678. Zuſatz. Haben die Oerter einerley Länge, ſo iſt die Entfernung die Differenz der Breiten, wenn ſie beede nordliche oder ſüdliche Breite haben, hat aber deren eine eine nordliche und der andere eine ſüdliche Breite, ſo iſt die Entfernung von einander die Summe der Breiten.

§. 679. Zuſatz. Durch dieſe Hülfsmittel werden Landcharten verfertiget, welche eine perſpectiviſche Projection eines Theils der Erdfläche ſind. Das weitere gehört in die practiſche Geographie.

Die Correction der Differenzen der Mittagscirkel durch Beobachtung der Finſterniſſen.

§. 680. Erklär. Weil die Differenzen der Längen oder der Mittagskreiſe durch genaue Beobach-

obachtung der Zeit, die hernach in Bogen verwandelt wird, beſtimmt werden müſſen, wie wir oben gezeigt; aber ein Fehler nur um eine Secunde mittlerer Sonnenzeit im Bogen des Aequators ſchon 15 Secunden austrägt, ſo ſiehet man ſchon wie ſchwer es ſeye die Länge beſonders zur See genau zu beſtimmen, weil man noch keine Uhren hat, die bey dem beſtändigen Schwanken der Schiffe ihren Gang ungeſtört und ſo, daß man um keine Secunde fehlte, behielten. Da nun die Seefahrer dieſen Schaden wohl wiſſen, und oft empfinden, ſo iſt es in alleweg nöthig, daß man durch die Mondstheorie und deren Verbeſſerung immermehr hierin zu helfen ſucht, wie denn die Beobachtungen am Monde dazu beſonders dienlich ſind.

§. 681. Zuſatz. Weil die Mondsfinſterniſſen, durch deren genaue Beobachtung man die Differenz der Längen zu beſtimmen ſucht, ſich ſo ſelten ereignen, ſo hat man ſeitdem die Fernröhren erfunden ſind, die ungleich öfters ſich ereignende Verfinſterungen der Jupitersmonde dazu gebraucht.

§. 682. Erläuterung. In den Comment. Ac. Petr. T. I. p. 485. ſteht ein Exempel von ſolcher Berechnung, welches auch Hr Prof. Käſtner daraus anführt und als merkwürdig empfiehlt, weil es zeigt, wie weit ſich Europa ungefehr in die Länge erſtreckt:

Eintritt des 1 Trabanten im Jahr 1726. 9 Aug.		Austritt des 1. Trabanten 1726. 10 Sept.	1726. 28 Oct.
zu Liſſabon um	12 Uhr 13′ 30″	8 Uhr 54′ 54″	6 Uhr 8′ 52″
zu Petersb. um	14 51, 30.	11 32, 56.	8 47 8
Differ. des Mittags	2 St. 38′	2 38 2	2 38 9
Das Mittel aus allen drey Obſervationen	2 St. 38′ 7″.		

§. 683.

§. 683. Zuſatz. Dieſes Exempel zeigt, wie weit ſich Europa in die Länge von Petersburg nach Liſſabon erſtreckt, nemlich nach Verwandlung der Zeit in Bogen 39° 31 M. 45 Secunden.

Die Berechnung der Grade in Parallelkreiſen, und die verſchiedenen Zonen, nebſt einigen andern geographiſchen Rechnungen.

§. 684. Erklär. Der Ort E *Fig.* 80. der eine nordliche Breite hat, beſchreibt bey dem Umdrehen der Erde um ihre Axe einen Parallelkreiß EF, deſſen Grade alſo kleiner ſind, als die Grade des größten Kreiſes.

§. 685. Zuſatz. Dahero wenn ein Grad des Aequators 15 Meilen hält, ſo muß ein Grad von ſolchem Parallelkraiß ungleich weniger halten, je näher er dem Pol kommt; wobey man die Erde ganz kugelförmig annimmt. Dieſe Grade laſſen ſich nun auch berechnen.

§. 686. Lehnſatz. Die Grade des Aequators verhalten ſich zu den Graden in Parallelkraiſen, wie der Sinus totus zum Coſ. der Breite.

Bew.

Es ſey EF ein Parallelkraiß *Fig.* 8. ſo iſt EG ſein Radius; es iſt aber aus trig. Gr.

$r : \text{ſin. } PE = CE : EG.$ aber
$\text{ſin } PE = \cos. \ AE$ folglich

$r : \text{coſ. } AE = CE : EG.$ alſo läßt ſich dieſer Radius des Parallelkraiſes finden; aber nach geom. Gr. verhalten ſich die Peripherien und ähnliche

Theile

Theile derſelben, wie die Radii. Solche ähnliche Theile ſind nun auch die Grade des Aequators und die Grade des Parallelkreiſes; alſo iſt r: coſ. AE=1° Æquat.· 1° Circ. Parall.

§. 687. Zuſatz. Wenn die Breite AE= 60° folglich ihr Complement PE=30°, ſo iſt, weil r: ſin. PE=CE: EG, und weil ſin. PE=cos. AE= cos. 60°, ein Grad in dieſem Fall die Hälfte von einem Grad im Aequator.

§. 688. Zuſatz. Auf dieſe Weiſe kann man für die Parallelkreiſe von Grad zu Grad eine Tafel berechnen, wo die Grade der Parallelkreiſe in Meilen und Sechzigtheilen der Meilen ausgedruckt ſind, von welchem 15 Meilen auf einen Grad des Aequators gehen.

§. 689. Zuſatz. Dieſe Meilen könnte man eher geographiſche als deutſche Meilen heiſſen, wie ſie insgemein genannt werden. Dann ſie ſind den im röm. Reich eingeführten Meilen nicht gleich. Nach den neueſten Entdeckungen, und der mittlern Gröſſe eines Grads beträgt eine ſolche deutſche oder geographiſche Meile, deren 15 einen Grad des Aequators oder gröſten Cirkels ausmachen, 3707, 2 Toiſen.

§. 690. Anm. Was die Zonen betrift, ſo heißt der zwiſchen den Tropicis eingeſchloſſene Theil der Erdfläche die heiſſe Zona, (Zona torrida) zwiſchen dieſen und den Polarcirkeln, die beeden gemäſſigte Zonen (Zonæ temperatæ) von denen bis an die Pole, die kalte Zonen (Zonæ frigidæ); Nach Beſchaffenheit der Elevation des Pols hat man entweder Sphæram rectam, wie diejenige, die unter dem Aequator wohnen, oder Sphæram parallelam unter dieſem Pol; in allen andern Fällen iſt die Sphäre ſchief (obliqua) näher bey dem Aequator hat man Tag und Nacht beſtändig gleich; gegen beede Pole nehmen bald die Tage bald die Nächte zu, je nachdem die Sonne eine nördliche oder ſüdliche Breite hat. Unter denen Polen ſelbſt iſt ein

halb

halb Jahr Nacht und ein halb Jahr Tag. Die Abwechslung der Jahreszeit, nemlich Frühling und Herbſt, Sommer und Winter, fangen mit den Aequinoctial = oder Solſtitial = Stunden der Sonnen an. Die Parallen mit dem Aequator, die durch jeden Punkt wie der längſte Tag eine halbe Stunde länger iſt, gezogen werden, beſtimmen die Climata, die man heut zu Tag gar nicht mehr nöthig hat, auſſer nur um die Alten zu verſtehen. In Abſicht auf den Schatten, den die Sonne wirft, hat man auch den Erdbewohnern verſchiedene Namen gegeben. Die, welche am Mittag keinen Schatten werfen, die Innwohner der heiſſen Zone, werden Aſcii, und weil der Schatten zu einer Zeit des Jahrs nordwarts, zur andern ſüdwarts fällt, Amphiſcii genannt; die Inwohner der gemäßigten Zonen werden Heteroſcii genannt, weil der Mittagsſchatten ihnen beſtändig entweder nordwärts oder ſüdwärts fällt; die Innwohner der kalten Zonen heiſſen Periſcii, weil die Sonne ihnen nicht untergeht, und alſo zweymal in den Mittagscirkel kommt, dahero der Schatten einen Cirkel um ſie nach und nach herum beſchreibt. In Abſicht auf die Breite und Länge heiſſen Antoeci diejenige die unter einerley Mittagscirkel aber gerade opponirten Breiten wohnen; Perioeci die in einerley Breite oder aber gerad opponirten Mittagscirkel wohnen; Antipodes oder Gegenfüßler, wenn Breite und Länge gerade opponirt iſt; das iſt, diejenige, die an beeden entgegen geſetzten Enden eines Erddiameters wohnen. Dieſe Sachen ſind Anfängern bekannt, und ſtehen überall; daher wir ſie nur in der Anmerkung vorgetragen haben.

Die Loxodromie oder etwas von der Schiffarth.

§. 691. **Erklär.** Wenn *Fig.* 81. ein Schiff ſich in A befindet, und von da aus nach einerley Weltgegend, z. E. gegen Nordoſt ſegeln will, ſo muß ſein Lauf oder Weg mit allen Mittagskraiſen, die es durchſchneidet, einerley Winkel machen, das iſt, es muß ſeyn der Winkel PAN=PMN u. ſ. w. wenn PAQ, PMQ die Mittagscirkel ſind; dieſen Weg nun, den das Schiff nehmen muß, heißt man die Loxodromie.

§. 692.

§. 692. Zuſatz. Die Loxodromie iſt alſo kein Cirkel, und auch keine coniſche Section oder irgend eine von den vor Zeiten bekannten Linien.

§. 693. Zuſatz. Weil noch überdis die Erde keine völlige Sphäre, ſondern ein Sphäroid iſt, ſo iſt zur Beſtimmung dieſer Linie aus der Rechnung des unendlichen oder höhern Geometrie die Kenntniß der wahren ſphäroidiſchen Geſtalt der Erden nöthig. Die Linie ſelbſten iſt alſo in ſolcher Schärfe noch nicht erfunden; doch hat man loxodromiſche Tafeln, die man ohne ſonderliche Fehler bey der Schiffarth gebrauchen kann.

§. 694. Zuſatz. Wenn die Erde flach und eben, oder nicht ſphäriſch wäre, ſo würde die Loxodromie eine gerade Linie ſeyn, nach geometriſchen Gründen. Und ſo nimmt man noch dieſe Linie bey nicht gar groſſer Breite an, z. E. bey der ſo genannten ebenen Schiffarth.

§. 695. Erklär. Die Weltgegenden ſelbſt beſtimmt man durch einen Compas, in welchem die Magnetnadel nach Süden und Norden weißt, 90° beederſeits deſſen iſt Oſt und Weſt, oder Morgen und Abend. Bey der Magnetnadel ſelbſt muß man aber nur auf ihr Abweichen oder Declination ſehen, davon in der Naturlehre gehandelt wird. Man hat auch Declinationstabellen dazu.

§. 696. Erklär. Man theilet die vier Hauptweltgegenden noch weiter ein, wenn man immer durch zwey theilet; ſo zehlen die Schiffer zwey und dreyſig Gegenden; die vier Hauptgegenden, deren jede 90° von der andern abſteht, heiſſen, Nord, Weſt, Süd, Oſt; dazwiſchen ſtehen Nordweſt,

Süd=

Südweſt, Südoſt, Nordoſt; jede iſt die Helfte von 90° oder gleich 45°. Zwiſchen dieſen iſt Nord Nordweſt, Süd Südweſt, Süd Südoſt, Nord Nordoſt, jede die Helfte von 45°; zwiſchen dieſen zu beeden Seiten Nord gen Weſt, Nordweſt gen Norden, Nordweſt gen Weſten, Weſt gen Norden; und ſo auch in den folgenden Dreyvierteln des ganzen Cirkels; jede der vierte Theil von 45°, oder der achte von 90°; Man ſchreibt ſie folgender maſſen mit den Anfangsbuchſtaben:

N.	W.	S.	O.
NgW.	WgS.	SgO.	OgN.
NNW.	WSW.	SSO.	ONO.
NWgW.	SWgW.	SOgS.	NOgO.
NW.	SW.	SO.	NO.
NWgW.	SWgS.	SOgO.	NOgN.
WNW.	SSW.	OSO.	NNO.
WgN.	SgW.	OgS.	NgN.

Wo die groſſen Buchſtaben N, W, S, O, Nord, Weſt, Süd, Oſt, und der kleine Buchſtab g, gen bedeuten.

§. 697. Anm. Das iſt das nöthigſte, das wir von der mathem. Geographie ſagen wollten, und das man nicht überall findet; einiges, das man in allen politiſchen Geographien, auch ſelbſt in Hübners geographiſchen Fragen findet, haben wir dahero nur in etlich Anmerkungen berühret, damit wir die Anfänger daran erinnern. Das andere aber gehört zur eigentlichen mathematiſchen Geographie, wie ſie durch neuere Entdeckungen zu einer gröſſern Vollkommenheit gebracht worden iſt. Man wird dahero vom weſentlichen und neueſten nichts hier vermiſ-

ſen; was aber in allen auch noch ſo gemeinen geographiſchen und hiſtoriſchen Handbüchern ſteht, hier nicht erſt ausführlich ſuchen, wie denn z. E. nur die Lehre von der künſtlichen Erdkugel oder vom Globo, die jedermann, auch Kinder, ſchon wiſſen, der kleinſte und bey nahe auch der geringſte Theil der mathematiſchen Geographie iſt. Wenn man einen künſtlichen Globum hat, ſo lernt man alles in einer Stunde, in ſo fern es in die Sinne fällt, und practiſch heißt; das theoretiſche aber von dem Globo iſt in dieſem und dem vorigen Hauptheil hinlänglich vorgetragen worden.

Drit-

Drittes Hauptſtük, von der Chronologie.

§. 698.

Erklärung.

Die Chronologie beſchäftiget ſich mit Abmeſſung der Zeiten, und mit Vergleichung derſelben, in Rukſicht auf das angenommene Maas im bürgerlichen Leben ſowohl, als in Rukſicht auf die durch himmliſche Cörper beſtimmte wahre Zeiten.

Geſchichte der Chronologie.

§. 699. Wir können uns in der Geſchichte der mathem. Chronologie um ſo kürzer ausdrücken, als das, was in der Geſchichte der Aſtronomie ſchon geſagt worden iſt, hier wiederum gröſtentheils vorkommt. Die Hauptperſonen, die wir in der Abhandlung ſelbſt genannt haben, und denen man in der Verbeſſerung der Chronologie in Rukſicht auf das blos Mathematiſche darinnen am meiſten zu danken hat, ſind Jul. Cäſ. Scaliger, der den Periodum Julianam erfunden, und Ricciolius in ſeiner Chronol. reformata. Dann die groſſe Männer, die ſich um die hiſtoriſche und bibliſche Chronologie verdient gemacht haben, worunter wir vorzüglich

lich auch den Herrn D. Bengel rechnen, gehören nicht in die Geſchichte der mathematiſchen Chronologie, als in ſofern freylich beede Wiſſenſchaften vieles mit einander nach dem freundſchaftlichen Band aller Wiſſenſchaften gemein haben. Wir können alſo ſogleich zur weitern Abhandlung uns wenden.

Von den Tagen, Wochen, Monathen und Jahren.

§. 700. **Erkl.** Die Tage ſind entweder natürliche oder bürgerliche Tage. Ein natürlicher Tag währet, ſo lang die Sonne über der Erde ſcheinet. Ein bürgerlicher beſtehet aus 24 gleichen Theilen, die man Stunden nennet.

§. 701. **Willk. Satz.** Die Aſtronomen fangen ihre Stunden vom Mittage an, und zehlen bis zum andern Mittag an einem fort 24 Stund. Die Italiäner zehlen auch 24 Stunden an einem fort, aber von einem Abend zum andern. Ihre Stunden heiſſen deßwegen italiäniſche Stunden. Die alte Babylonier zehleten von einem Morgen bis zum andern 24 St. ihre Stunden heiſſen Horæ Babylonicæ. Die Juden zehlten des Tages 12 Stunden, und richteten ſich nach der wahren Tageslänge; daher die Sommerſtunden länger ſind als die Winterſtunden. Die übrige Europäer zehlen 12 Stunden von Mittag bis Mitternacht, und von Mitternacht wieder bis Mittag; dieſe Stunden heiſſen deßwegen Horæ Europææ.

§. 702,

§. 702. **Erkl.** Vier und zwanzig Stunden machen alſo einen Tag aus, und eine Anzahl von 7 Tagen heißt man eine Woche.

§. 703. Anm. Der Grund dieſer ſiebenſachen Eintheilung iſt die Schöpfung der Welt, worzu die Heyden noch die 7 Planeten genommen haben. Von dieſen 7 Planeten haben auch die 7 Wochentage ihren Nahmen. Warum aber ein jeder gerad dieſen, und keinen andern habe, kann man folgendermaſſen begreifen. Ihre Ordnung iſt

♄ ♀ ♂ ☉ ♁ ☿ ☾

Nach der Aſtrologie regiert ein jeder Planet des Tags eine Stunde; wenn man nun mit dem ♄ am Samſtag den Anfang macht, und ihn die erſte Stunde beherrſchen läßt, ſo wird er dreymal ſelbigen Tag eine Stunde beherrſchen. Dann es ſind 7 Planeten $3 \cdot 7 = 21$, folglich wird er die 22ſte Stunde wieder beherrſchen, die 23ſte beherrſcht der folgende, nemlich ♃, die 24ſte ♂, alſo die 25ſte die ☉, das iſt, die erſte Stunde des folgenden Tages wird beherrſchen die ☉, darum folgt auf Samſtag der Nahme Sonntag, oder auf den ♄ unmittelbar ☉. Wenn man nun von der Sonne wieder die 24 Stunden deſſelbigen Tages berechnet, ſo wird ſie die 22ſte Stunde, nach $3 \cdot 7$ Stunden, wieder regieren, die 23ſte aber die ♁, und die 24ſte ☿, folglich kommt auf die 25ſte Stunde, das iſt, die 1ſte Stunde des folgenden Tags der ☾, von welchem der ganze Tag den Nahmen hat. Man ſiehet alſo ſchon, nach welchem Geſez die Nahmen der Tage ſich richten. Es werden nemlich zwiſchen dem unmittelbar vorhergehenden Planeten zween folgende übergangen, und der dritte gibt dem nächſten Tag den Nahmen.

§. 704. **Erklär.** Die Monate ſind entweder Sonnen- oder Monden-Monate; jene beſtehen aus 30 zum Theil auch 31 Tagen, dieſe aus 29 Tagen. Die Namen der Monate hat Ovidius in libris faſtorum erklärt.

§. 705. **Erk.** Das Jahr beſtehet aus 365 Tagen 5 Stunden 48′ 37″.

§. 706. Anm. Vor Zeiten nahme man 365 Tage 6 Stunden an, zu den Zeiten des Romulus war der Anfang des Jahrs der Merz, und das ganze Jahr beſtunde aus 10 Monaten. Numa hingegen hat 2. Monate hinzugethan, wie Ovidius ſagt in der angezogenen Stelle:

At Numa nec Janum nec avitas præterit umbras,
Menſibus antiquis præpoſuitque duos.

Julius Cäſar hat das Jahr hernach weiter reformirt, und alle 4. Jahre einen Schalttag geordnet, der bis ſextilis heißt, und hinter den 23 Februar intercalirt wird. Weil er annahm, daß das Jahr aus 365 Tag und 6 Stunden beſtehe, dieſe Zugab aber zu groß iſt, ſo hat Anno 1582 Gregorius XIII. das julianiſche Jahr reformirt, und 11 Tag aus dem Calender heraus gethan; Dieſes Jahr heißt das gregorianiſche Jahr. Anno 1701 hatten die Proteſtanten in Teutſchland dieſe Veränderung auch angenommen, doch unter allerhand Verbeſſerung, daher es zuweilen bey Feyrung der Oſterfeſte Verdruß gibt. Anno 1750. haben die Engeländer den Calender auch angenommen, welchem die Ruſſen wenigſtens im Handel auch nachgefolgt.

Von den Cyclis.

§. 707. Erklär. Eine gewieſe Anzahl von Jahren, nach deren Verfluß die Zeiten wiederum, wie vorhin, anfahen, heißt ein Cyclus.

§. 708. Erklär. Man zählt vornemlich 3 Cyclos, nemlich

1) Den Cyclum Solis, wovon der Sonntagsbuchſtabe ſeinen Namen hat.
2) Cyclum lunæ oder die güldene Zahl.
3) Cyclum inductionum oder der Römer Zinszahl.

§. 709. Erklär. Der Cyclus Solis beſteht aus 28 Jahren, nach deren Verfluß alle Sonntage wiederum auf den nemlichen Tag, wie 28 Jahr vorher, fallen; oder nach welchem das Jahr mit eben dem Wochentag wieder anfangt wie vorhin.

§. 710. Zuſatz. Dieſer Cyclus würde in 7 Jahren herumkommen, wann kein Schaltjahr wäre, denn 7 . 365 läßt ſich gerad durch 7 dividiren. Weil aber alle 4 Jahr ein Schaltjahr iſt, ſo muß man 4 . 7 oder 28 Jahr darzu nehmen.

§. 711. Zuſatz. Man begreift aber leicht, daß der Cyclus Solis nur auf das julianiſche Jahr gehet; will man ihn auf die gregorianiſche Jahre anwenden, ſo muß man ihn alle 100. Jahr ändern.

§. 712. Lehrſ. Wenn man den Cyclum Solis nach dem julianiſchen Jahr für ein gegebenes Jahr berechnen will, ſo addirt man zur gegebenen Jahrzahl 9 und dividirt die Summe durch 28. Was übrig bleibt iſt der Cyclus Solis, für ſelbiges Jahr; bleibt nichts übrig, ſo iſts der Cyclus ſelbſten. Die Urſache der Addition von 9 iſt, weil der Cyclus Solis 9 Jahr vor unſerer chriſtlichen Zeitrechnung angefangen, wie im folgenden erwieſen werden ſolle.

§. 713. Erklär. Der Cyclus Lunæ iſt ein Lauf von 19 Jahr, nach welchen die Sonnen- und Monden-Jahre wieder mit einander anfangen.

§. 714. Erklär. Ein Monden-Jahr hält 354, ein Sonnen-Jahr 365 Tag, alſo iſt die Differenz 11 Tag in einem Jahr. In 2 Jahren iſt ſie 22, in 3 iſt ſie 33, u. ſ. w. vor 33 aber ſchreibt man nur 3, und wirft die 3 hinweg. u. ſ. w.

§. 715. Erklär. Dieſe Differenz der Tage heiſſen Epacten, da dann nach 19 Jahren wieder einerley Epacte vorkommt.

§. 716. Lehrſ. Dieſen Cyclum Lunæ findet man für ein gegebenes Jahr, wann man zur Jahrzahl 1 addirt, dann ein Jahr vorher hat er angefangen, und die Summe durch 19 dividirt, der Reſt iſt die güldene Zahl. Bleibt nichts übrig, ſo iſt 19 Jahr die güldene Zahl.

§. 717. Erklår. Der Cyclus indictionum iſt eine Zahl von 15 Jahren.

§. 718. Lehrſ. Dieſe Jahrzahl hat 3 Jahr vor unſerer Jahrzahl angefangen, will man ſie alſo für ein gegebenes Jahr berechnen, ſo muß man zur Jahrzahl 3 addiren, und die Summe durch 15 dividiren, der Reſt wird die geſuchte Zahl ſeyn; bleibt nichts übrig, ſo iſt 15 der Römer Zinszahl.

§. 719. Erklår. Wenn man dieſe 3 Cyclos multiplicirt, ſo heißt das Product davon der Periodus Juliana. Alſo 28 . 19 . 15 = 7980, welchen Periodum Julius Cåſar Scaliger erfunden.

§. 720. Lehrſatz. Wie durch Hülfe der 3 Cyclorum eine gegebene Jahrzahl in eine andere verwandelt werden könne, zeigt uns folgende Rechnung. Das ganze Geſchåft geht nemlich dahin, daß man die kleinſte Zahl finde, und wann ſie durch 15, 19, 28 dividirt wird, allemal die gegebene Reſte oder Cycli übrig bleiben.

Es ſeye die geſuchte Zahl N und die reſidua α, β, γ.

Diviſores	Reſidua.
15	α
19	β
28	γ

damit dieſe Arbeit leichter von ſtatten gehe, ſo wollen wir die 2 erſte Diviſores mit ihren Reſiduis allein durchgehen, ohne den dritten in Acht zu haben, es iſt alſo $15x + \alpha = 19y + \beta$ daher

$$x = \frac{19y + \beta - \alpha}{15}$$ es ſey $\beta - \alpha = \delta$,

ſo iſt $x = \frac{19y + \delta}{15} = y + \frac{4y + \delta}{15}$

es ſey $x = y + a$

ſo iſt $4y + \delta = a$, und

$y = \frac{15a - \delta}{4} = 4a \frac{- a - \delta}{4}$

es ſey $y = 4a - b$ ſo iſt

$b = \frac{a + \delta}{4}$ und $a = 4b - \delta$

alſo y im Wehrt von $b = 15b - 4\delta$

und x in eben dem Wehrt $= 19b - 5\delta$ alſo

$15x + \alpha = 285b - 75\delta + \alpha$

$= 285b - 75\beta + 76\alpha$

die geſuchte Zahl; wo wir nur zween Diviſores betrachtet haben.

Man ſetze alſo die Operation wie im Anfang fort, ſo wird ſeyn $15x + \alpha = 28y + \gamma$ aber oben

$15x + \alpha = 285b + 76\alpha - 75\beta$

$28y + \gamma = 285b + 76\alpha - 75\beta.$

und $y = \frac{285b + 76\alpha - 75\beta - \gamma}{28}$

Weil man b hier erſt in der zweyten Operation wieder ſuchen muß, ſo ſetze man dafür z, alſo wenn man mit 28 wirklich dividirt ſo weit man kann,

$y = 10z - 3\beta + 3\alpha + \frac{5z + 9\beta - 8\alpha - \gamma}{28}$

man ſetze $9\beta - 8\alpha - \gamma = \varepsilon$ ſo iſt

$y = 10z - 3\beta + 3\alpha + \frac{5z + \varepsilon}{28}$

man ſetze $y = 10z - 3\beta + 3\alpha + b$

ſo iſt $b = \frac{5z + \varepsilon}{28}$ und

$$z = \frac{28b - \varepsilon}{5} = 6b - \frac{2b - \varepsilon}{5}$$

man ſetze $z = 6b - c$ ſo iſt

$$c = \frac{2b + \varepsilon}{5} \text{ und } b = \frac{5c - \varepsilon}{2} = 2c + \frac{c - \varepsilon}{2}$$

man ſetze endlich $b = 2c + d$

ſo iſt $d = \frac{c - \varepsilon}{2}$ und $c = 2d + \varepsilon$

folglich wenn man den Wehrt von ε ſubſtituirt,

$$c = 2d + 9\beta - 8\alpha - \gamma$$
$$b = 5d + 18\beta - 16\alpha - 2\gamma$$
$$z = 28d + 99\beta - 88\alpha - 11\gamma$$
$$y = 28.285d + 28.1005\beta - 28.893\alpha - 28.112\gamma + \gamma$$

alſo $N = 28.285d + 28.1005\beta - 28.893\alpha - 28.112\gamma + \gamma$

$$= 7980d + 28140\beta - 25004\alpha - 3135\gamma$$

Durch Hülfe dieſes leztern Satzes kann man eine Jahrzahl in die andere verwandeln. Uebrigens habe von dieſer Julianiſchen Periode in meiner vor 12 Jahren zu Berlin herausgegebenen Chronologia oder Exam. Temporum mediorum weitere Nachricht gegeben.

§. 721. Zuſ. Man kann alſo das Jahr der julianiſchen Perioden finden, welches dem Jahr unſerer Zeitrechnung correſpondirt, wenn man nur der Römer Zinszahl, die güldene Zahl oder den Sonnencirkel weißt.

Von der Reduction verſchiedener Jahrzahlen.

§. 722. Lehrſatz. Ein jedes Jahr der Zeitrechnung läßt ſich in das Jahr des Periodi Julianæ ver-

verwandlen, wenn man nach dem obigen Lehrſatz ſucht, wie viel Jahr vor Chriſti Geburt am Periodo Juliana verfloſſen; addirt man nun zu dieſen Jahren unſere Jahrzahl, ſo hat man das Jahr des Periodi Julianæ. Z. E. vor Chriſti Geburt ſeye am Periodo Juliana verfloſſen

4713
add. 1764
―――――
1477 = anno Per. Jul.

§. 723. Zuſatz. Eben ſo laſſen ſich andere Jahre reduciren, wenn man nur weißt, wenn ſie angefangen haben.

§. 724 Lehrſ. Die Jahre der Erbauung von Rom laſſen ſich in die Jahre des Periodi Julianæ verwandlen, wenn man die Zahl der Jahre, welche vom Periodo Juliana vor Erbauung der Stadt Rom verfloſſen, zu den A. V. C. addirt; es ſind aber 3960. Jahr verfloſſen, folglich iſt A V. C. 200 = 3960 + 200 = 4160.

§. 725. Lehrſ. Die Jahre oder Anni V. C. können in Jahre unſerer chriſtlichen Zeitrechnung verwandelt werden, und dieſe in jene.

§. 726. Bew. Das erſte Jahr der chriſtlichen Zeitrechnung iſt A. V. C. 753, welches erhellet, wenn man den Anfang unſerer Zeitrechnung im julianiſchen Periodo, mit dem Anfang der Römiſchen vergleicht, und die leztere von der erſten ſubtrahirt; es iſt aber Annus 1 Chriſti 4714. Per. Jul. Annus 1 V. C.= 3961
―――――
Reſt = 753

Alſo

Alſo iſt das Jahr 1763 = 1763 + 753 V. C. = 2489 eben ſo A. V. C. 1000 iſt

$$1000 = x + 753$$

$$247 = x = \text{der Jahrzahl.}$$

Z. E. Conſtantinus M. iſt A. V. C. 1059 zur Regierung gekommen, folglich iſt 1059 — 753 = 306 Anno Chriſti.

§. 727. **Erklär.** Die vornehmſte Epochä oder Jahrzahlen der Alten ſind auſſer der æra V. C. die wir ſchon erklärt, Æra Olympiadum und Æra Nabonaſſarea.

§. 728. **Erklär.** Die Æra Olympiadum iſt eine Zeit von 4 Jahren, welche angefangen hat mit dem Jahr des Periodi Julianæ 3938.

§. 729. **Lehrſ.** Wenn man nun ein angegebenes Jahr von den Olympiaden auf ein anderes reduciren will, ſo muß man von der Anzahl der Olympiaden 1 ſubtrahiren, den Reſt mit 4 multipliciren, und darzu das gegebene Jahr der lauffenden Olympiaden addiren, dieſe Summe zu dem Jahr des Periodi Julianæ addirt, und dieſes gibt das reducirte Jahr. Oder

es ſey n = der Anzahl der Olympiad.

α = dem lauffenden Jahr Olymp.

ſo iſt das reducirte Jahr = 3938 + 4(n—1) + L.

§. 730. **Zuſatz.** Das Nabonaſſareiſche Jahr iſt wie die alte egyptiſche Jahre, ein Jahr von 365 Tagen ohne Schalttag, und die Jahrzahl fienge an den 26 Febr. 3967. Nun ſind vom 26 Febr. bis auf den lezten Dec. des vorigen Jahrs 31 + 26 = 57 Tag. Alle vier Jahre aber fängt das Jahr um einen Tag früher an, weil kein Schalttag vorhanden

den iſt, folglich muß man 4 mit 57 multipliciren, das Product iſt 228, dahero fangen die Nabonaſſariſche Jahre nach 228 Jahren um ein Jahr ſpäter an; das iſt, man muß bey der Reduction in dieſem Fall ein Jahr ſubtrahiren. Iſt aber die Anzahl kleiner als 228 Jahr, ſo bleibt die Summe ungeändert.

Es ſeye die Anzahl der Jahre $= n$ ſo iſt

1) Wann $n > 228$ das geſuchte Jahr $= 3967 + n - 1$

2) Iſt $n < 22$ ſo iſt das geſuchte Jahr $3967 + n$.

§. 731. Anm. Wenn man den Tag wiſſen will, mit welchem das Jahr angefangen hat, ſo darf man nur die gegebene Jahre mit 4 dividiren, der Quotient wird anzeigen, der wievielte Tag ruckwarts vom 26 Febr. gerechnet, der Anfang ſelbigen Jahres ſeye, wenn nemlich die Anzahl der Jahre nicht über 228 Jahre beträgt. Iſt aber die Anzahl gröſſer, ſo wird der Anfang des Jahrs in dem Dec. ꝛc. des vorhergehenden Jahres fallen. Z. E. das 100ſte Jahr æræ Nabonaſſ. hat angefangen den 2 Febr. Dann $\frac{100}{4} = 25$, $26 - 25 = 1$ folglich war der Anfang der zweyte Februarius; ferner das 300 Jahr æræ Nabonaſſ. hat angefangen den 14 Dec. des vorhergehenden Jahrs; Dann $\frac{300}{4} = 75$, $75 - 57 = 18$, $31 - 28 = 13$ folglich den 14 Dec. hat annus 300 angefangen.

Von dem Calender und der Feſtrechnung.

§. 732. Erklär. Wie man zweyerley Jahre hat, alſo richtet ſich auch der Calender nach dieſen zweyerley Jahren. Dann wir haben einen alten julianiſchen, und neuen gregorianiſchen Calender.

§. 733. Erklär. Der julianiſche Calender richtet ſich nach dem julianiſchen Jahr, wo alle 4 Jahre ein Schalttag iſt.

§. 734.

§. 734. **Erklär.** Der neue gregorianiſche wurde Anno 1582 durch den Pabſt Gregorium öffentlich in der catholiſchen Welt eingeführt; in ſelbigem Jahr hat man nemlich vom 4 Oct. bis auf den 15 ſelbigen Monats 10 Tag herausgenommen, ſo daß nach dem 4 Oct. der 15 folglich als der 5te gezehlet wurde; Der 4 Oct. war damals ein Donnerſtag, und der 15 ein Montag; weil aber aus dem 15 der 5 wurde, ſo iſt auch der Montag in den Freytag verwandelt worden. Der Sonntagsbuchſtabe war damals G, wie man durch die gewöhnliche Rechnung leicht finden kann, folglich bezog ſich auf den 4 Oct. als den Donnerſtag vor dem Sonntag der Buchſtab D, und da nach denen 10 herausgenommenen Tagen, der neue Sonntag dem alten correſpondirte, ſo wurde der Sonntagsbuchſtabe hernach C, wie aus folgender Tabelle zu erſehen:

Tabelle

Octobr. 1582.

		Feriæ Hebdom.		Literæ correſpondentes.
	4	♃		D
Dies exemti	5	♀		E
	6	♄		F
	7	☉		G
	8	☽		A
	9	♂		B
	10	☿		C
	11	♃		D
	12	♀		E
	13	♄		F
	14	☉		G
5	15	☽	♀	A
6	16	♂	♄	B
7	17	☿	☉	C u. ſ. w.

§. 735. Erklär. Endlich iſt noch der verbeſſerte proteſtantiſche Calender zu merken, der von dem gregorianiſchen in zwey Punkten abgeht. 1) In Berechnung des Oſterfeſts. 2) In den Feſt- und Namenstägen der Heiligen.

§. 736. Willk. Satz. Die Feſtrechnung gründet ſich auf ein Decret des Concilii Niceni nach welchem Oſtern gefeyert werden ſollte an dem Sonntag der auf den erſten Vollmond nach dem Frühlings-Aequinoctio folget, niemahlen aber am Vollmond ſelbſten. Wann alſo der Vollmond auf einen Sonntag fällt, ſo iſt allemal Oſtern um acht Tage ſpäter.

§. 737. Anm. Hierinnen ſind die Proteſtanten mit den Catholiken einig; es geſchiehet aber doch zuweilen, daß Oſtern von jenen früher, von dieſen aber ſpäter und umgekehrt gefeyert wird. Von dieſer Verſchiedenheit gibt Caſſini folgende Urſachen an in der Hiſtoire de l' Academie des Sciences 1701. p. 197. ſeqq.

„ Gregorius hat bey ſeiner Reformation 1582. befohlen, aus „ dem Sonnenjahr 10 Tage heraus zu nehmen und den Cyclum „ Lunæ mit vier Tagen zu vermehren; das erſte iſt geſchehen, „ das leztere aber hat man verfehlt, und in dem Calender nur „ drey Tage hinzugeſezt. Und dieſes Verſehen hat nachgehends „ oft betrübte Wirkungen gehabt, wie im Jahr 1724 und „ 1744. geſchehen.„ Auf dieſe Weiſe wäre die Ehre des Pabſts gerettet und die Catholiken könnten wohl nachgeben, weil in ihrem Calender dieſer Fehler durch eine bloſe Nachläſſigkeit, wie Caſſini berichtet, eingeſchlichen. Von Oſtern hangen nun die beweglichen Feſte alle ab.

§. 738. Zuſatz. Die Gränzen von Oſtern können nie über den April hinaus gehen und nie vor dem 24 oder 25 Merz ſeyn.

§. 739. Zuſatz. Was aber die unbeweglichen Feſte betrift, ſo rücken dieſelbe an eben demſelbigen Tag des Jahrs ein. Z. E. das Neujahrs-Feſt, alle Apoſteltäge, Weyhnacht u. ſ. f.

§. 740.

§. 740. Zuſatz. Die bewegliche Feſte können von Oſtern abhangen. Z. E. Pfingſten, das Himmelfarthsfeſt, die Sonntäge nach Trinitatis, die Sonntäge Epiphanias u. ſ. w.

§. 741. Anm. In der Wirtemb. Kirchenordnung iſt nachgeſezt, daß, wann Mariä Verkündigung in die Oſterwoche fällt, der Freytag vorher gefeyert werden muß, und wenn man ein Schaltjahr hat, der Matthias-Tag an dem nemlichen Tag gefeyert wird und nicht den Tag hernach, wie er im Calender ſteht.

Vier-

Viertes Hauptſtük,
Von der Gnomonik.

§. 742.

Erklärung.

Die kürzeſte Erklärung der ganzen Gnomonik iſt folgende, daß ſie eine Wiſſenſchaft ſeye, Uhren zu verfertigen, durch die man vermittelſt des Schattens der Sonne, oder des Monds, oder der Sterne die Stunden wiſſen kann.

Geſchichte der Gnomonik.

§. 743. Was ich von der Geſchichte der Chronologie geſagt habe, das gilt auch von der Geſchichte der Gnomonik. Sie iſt mit der Aſtronomie und Geographie aufs genaueſte verbunden, und mit dieſen beeden Wiſſenſchaften von Zeit zu Zeit mehr oder weniger empor gekommen, je nachdeme jene ſich mehr oder weniger ausbreiteten. Das practiſche davon iſt ſehr bekannt, und es iſt nicht leicht ein mittelmäßiger mathematiſcher Practicus, der keine Sonnenuhren machen könnte, aber die Theorie iſt weniger gemein. Wer mehr auf die Vervielfältigung der Arten Sonnenuhren zu verfertigen als auf ſubtile Theorie ſieht, der findet in Wal-

pers Gnomonik auch zum Theil in Bions mathem. Weckſchule vieles, das ihn vergnüget. Wer aber die Theorie liebt, dem iſt nach Clavii Gnomonica, de la Hire, Piccard und unter den neueſten Herr Prof. Käſtner in ſeiner Theorie der Verticaluhren anzupreiſen. Vor Alters hieß die Gnomonik Sciatherica oder Schattenuhrwiſſenſchaft; dieſe Uhren ſind übrigens ungleich älter als die mechaniſche Uhren.

Die Sonnenuhren überhaupt, beſonders die Aequinoctial- und Horizontaluhren, welche das Fundament der übrigen ſind.

§. 744. Anm. Die leichteſte Art eine Sonnenuhr zu verfertigen, iſt diejenige, nach welcher man eine Aequinoctialuhr beſchreibet; und dieſe Aequinoctialuhren ſind hernach der Grund aller andern Uhren.

§. 745. Erklär. und Lehrſatz. Man beſchreibt nach *Fig.* 87. eine Aequinoctialuhr, wenn man auf dem Papier einen etwas groſſen Cirkel macht. Z. E. wenigſtens auf ein Quartblatt, damit die Stunden nicht zu nahe an einander zu ſtehen kommen. In dieſem Cirkel zieht man den Diameter mit der Mittagslinie parallel. An dem Ende des Diameters ſchreibt man 12, und hernach auf die Abendſeite die Morgenſtunden, und auf die Morgenſeite die Abendſtunden, weil der Schatten der Morgenſonne gegen Abend fällt, hingegen der Schatten der Abendſonne gegen Morgen. Die Stunden ſelbſt werden in gleicher Weite von einander geſezt. In dem Mittelpunkt wird ein Stift perpendicular aufgericht, welcher ſo lang ſeyn muß,

daß

daß ſein Schatten die Stunden erreicht. Die Länge des Zeigers kann man beſtimmen, wenn man den Schatten um 12 Uhr mißt. Erreicht er die zwölfte Stunde, ſo iſt er lang genug vor alle Stunden, weil der Schatten Vor- und Nachmittags allemal gröſſer iſt, als am Mittag. Auf dieſe Weiſe iſt die Aequinoctialuhr fertig, und iſt nichts übrig, als daß man ſie unter dem gehörigen Winkel richte. Dieſer Winkel iſt der Höhe des Aequatoris über dem Horizont gleich, das iſt, 90°— die Polhöhe des gegebenen Orts. Einen ſolchen Winkel muß die Aequinoctiallinie mit dem Horizont machen, und noch ſo geſezt werden, daß die Stund 12 gegen Mittag ſtehet.

§. 746. Zuſatz. Wenn man die Erhöhung durch einen Bogen macht, wie in *Fig.* 85. zu erſehen iſt, indem ſich die Fläche hin und her bewegen läßt, ſo hat man eine allgemeine Aequinoctialuhr für alle Oerter des Erdbodens, von welchen man die Polhöhe weißt.

§. 747. Erklär. und Lehrſatz. Die Horizontaluhr iſt die nechſtfolgende, welche unmittelbar aus der Aequinoctialuhr beſchrieben werden kann, wie *Fig.* 85. ausweißt, wo von den Stundenlinien der obern Aequinoctialfläche Bögen auf die untere Horizontaluhr gefällt werden, welche auf der Horizontalfläche die nemliche Stunden abzeichnen; hernach wird eben ſo der Zeiger der Aequinoctialuhr verlängert, da er dann mit dem Horizont denjenigen ſchiefen Winkel machen wird, der der geſuchten Höhe des Aequators gleich iſt, und zugleich der Zeiger der Horizontaluhr wird.

§. 748. Lehrſatz. Eine aus der vorgetragenen Methode folgende Art eine Horizotaluhr zu beſchreiben, ſtellt die *Fig.* 88 vor; man ziehet nemlich die Mittagslinie AB, richtet aus C den Perpendikel CD von beliebter Länge auf, und macht den Winkel CAD der Polhöhe des Orts gleich; vornen macht man den Winkel CDE=CAD, und zieht die Linie DE, und durch E die Linie GH, welche die Mittagslinie AB unter rechten Winkeln ſchneidet; ſodann macht man EB=ED und beſchreibt den Quadranten EF, den man in ſechs gleiche Theile eintheilet; aus dem Mittelpunkt B zieht man durch die Theilungspunkte bis an die Linie GH, die Linie Ba, Bb, Bc u. ſ. w. Aus A ziehet man durch alle Theilungspunkte gerade Linien bis in die Pripherie, ſo bekommt man die Stundenlinien A5, A4, A3 u. ſ. w. Aus A wird der Triangel = ADC oder ADE aus AE, von Blech aufgerichtet, ſo iſt die Horizontaluhr fertig.

Die Monds- und Sternenuhren.

§. 749. Erklär. und Lehrſatz. Auſſer denen Sonnenuhren gibt es auch Monds- und Sternuhren. Die leichteſte Manier eine Mondsuhr zu verzeichnen, iſt folgende: Man beſchreibt einen Cirkel und theilt ihn in 29 gleiche Theile ein, weil in 29 Tagen der Mond um die Erde ſo herumlauft, bis er wieder in die Sonnennähe kommt. Innerhalb dieſem Cirkel beſchreibt man einen kleineren concentriſchen Circul, den man nach der Anzahl der Stunden des Tags in 24 gleiche Theile eintheilt.

Die-

Dieſer kleinere Cirkel iſt in dem gröſſeren beweglich. In das Centrum wird ein perpendicularer Stift aufgerichtet, der der Zeiger iſt. Endlich bekommt die Uhrfläche, wie die Aequinoctialuhr, diejenige Elevation, die der Höhe des Aequatars über dem Horizont gleich iſt. Die *Fig.* 91. enthält eine Zeichnung einer Mondsuhr nach den hier gegebenen Beſtimmungen.

§. 750. **Erkl. und Lehrſ.** Was die Sternuhren betrift, ſo werden ſie folgender Maſſen gemacht: Man beſchreibt einen Circel, und theilt ihn in 12 gleiche Theile ein, nach den 12. Zeichen des Zodiaci, oder nach den 12 Monaten des Jahrs. Einen jeden von dieſen 12 Theilen theilt man wieder in 30 kleinere Theile ein, weil ein jedes Zeichen des Thierkreiſes 30° hält. Innerhalb des Cirkels zeichnet man die 12 Monate des Jahrs nach denen 12 gröſſeren Abtheilungen. Im 13° des Novembers wird eine Handhebe angebracht; innerhalb dieſes Cirkels iſt ein kleinerer concentriſcher Cirkel, der um das Centrum beweglich iſt. Man theilt ſeine Peripherie in 24 gleiche Theile ein, nach den Stunden des Tags, und wo die zwölfte Stunde um Mitternacht iſt, bringt man einen gröſſern oder längeren Zahn an, und in jeder Weite einer Stunde, oder nach jedem $\frac{1}{24}$tel werden kleinere Zähne angebracht, wie in einem Kammrad. Weil aber die Tagsſtunden bey dieſer Uhr nicht darfen bezeichnet werden, ſo kann man gegen 8 bis 10 Zähne oben erſpahren.

Allgemeine Theorie der Verticaluhren.

§ 751. Anm. Die Verticaluhren ſind von den Horizontaluhren in der Hauptſache nicht viel unterſchieden, weil es aber ſo vielerley Verticalflächen gibt, die bald gegen Morgen, bald gegen Abend, und zwar unter allerhand Winkeln ſich neigen, ſo wollen wir die Lehre davon nach der allgemeinen Theorie im folgenden vortragen. Die gewöhnlicheSonnenuhren, die man in der Ausübung zu machen pflegt, ſind Verticaluhren, dergleichen man in allen Städten, z. E. an den Thürnen, Rathhäuſern, und andern groſſen Gebäuden ſieht. Da man nun hier die Flächen annehmen muß, wie ſie ſind, indem ſie bald mehr gegen Morgen, bald gegen Abend decliniren, ſo iſt es dienlich, wenn man eine allgemeine Theorie beſonders von den Verticaluhren weißt, welche man auf alle mögliche Verticalflächen appliciren kann. Dann die Theorie der Aequinoctialuhren, wie auch der übrigen Uhren, die wir im erſten Theil erklärt haben, iſt von ſelbſten klar, wenn man nur die aſtronomiſche Wiſſenſchaften damit vergleicht.

§. 752. Erklär. Diß vorausgeſezt, muß man erſtlich wiſſen, was eine Subſtylarlinie ſeye. Es iſt nemlich diejenige Linie, welche gerad unter dem Zeiger auf der Fläche zu ſtehen kommt, wenn man nemlich die Fläche des Weiſers bis auf die Fläche der Uhr verlängert. Man kann ſich dieſe Linie am beſten vorſtellen, wenn man ſtatt des Zeigers, der gemeiniglich eine eiſerne Stange iſt, ein von Blech gemachtes Dreyeck in eben dieſer Form zum Zeiger macht, da dann die Subſtylarlinie an dem Ort ſeyn wird, wo das blechene Dreyeck die Fläche der Uhr ſchneidet.

§. 753. Lehrſatz. Wenn nun in der 93. *Fig.* GLI eine Verticalfläche einer Uhr iſt, die den Horizont, und zwar die Mittagslinie des Horizonts Gg unter dem Winkel GDL ſchneidet, ſo iſt KE der Weiſer der Verticaluhr, KI die Subſtylarlinie, und FKI der Winkel, den der Weiſer mit der Verticalfläche

fläche macht. Man ſezt dabey voraus, FD ſoll nach Norden, und Fg nach Süden gehen, LG ſoll auf der Abendſeite ſeyn.

Man ziehe nun DK perpendicular auf Gg, und mache den Winkel DFK der Polhöhe gleich.

DFK = altitudini Poli = P.

DF = lineæ meridian. horizontali

LI = plano horologii ejusque interſectioni;

ſo iſt $\angle$ DIF = 90°

$\angle$ KIF = 90°

$\angle$ GDL = IDF = angulo declinationis Man ſetze ihn = d.

$\angle$ IKF = inclinationi gnomonis verſus planum Horologii = K.

$\angle$ DKI = angulo ſubſtylaris lineæ cum plano horologii = Z.

Endlich ſetze man KD = c, und DF = b, ſo folgt

I. Satz. $DF = \frac{\cos. P . b.}{r}$

Bew.

r : DF = ſin. DFI : CI.

ſin. DFI = cos. D.

r : DF = cos. D : DI

DF = b

r : b = cos. D : DI

$DI = \frac{\cos. D . b.}{r}$

II. Satz. $KD = \frac{b.t.P}{r}$

Bew.

$$r : t.DFK = DF : KD$$
$$\underline{\text{ſin.} DFK = \text{ſin.} PDF = b}$$
$$r : t.P = b : KD.$$
$$KD = \frac{b.t.P.}{r}$$

III. Satz. $t.Z = \frac{r.\cos.D}{t.P}$

Bew.

$KD : ID = r : t.IKD$, es iſt aber

$r : \cos.D = b : ID$, nr. I. &

$r : t.P = b : KD$, nr. II.

$$\cos.D : t.P = ID : KD.$$
$$\underline{KD : ID = r : t.IKD}$$
$$t.P : \cos.D = r : t.IKD$$
$$\underline{\text{ſin.} IKD = \text{ſin.} Z.}$$
$$t.P : \cos.D = r : t.Z.$$
$$t.Z = \frac{r.\cos.D}{t.P}$$

IV. Satz. $KI = \frac{t.P.b}{\cos.Z.}$

Bew.

$$\cos.Z : r = DK : KI.$$

KI

$$KI = \frac{r \cdot DK}{\cos. Z}$$

$$DK = c$$

$$KI = \frac{r \cdot c}{\cos. Z}$$

$$c = \frac{b \cdot t. P}{r} \quad \text{nr. II.}$$

$$KI = \frac{b \cdot t. P.}{\cos. Z}$$

V. Satz. $IF = \frac{c \cdot \text{ſin.} D}{t. P}$

Bew.

$$DF : EI = r : \text{ſin.} D.$$

$$FI = \frac{DF \cdot \text{ſin.} D.}{r}$$

$$DF = b$$

$$FI = \frac{b \cdot \text{ſin.} D}{r} \quad c = \frac{b \cdot t. P}{r} \quad \text{alſo}$$

$$b = \frac{c\, r}{t. P}$$

$$FI = \frac{c \cdot \text{ſin.} D}{t. P.}$$

§. 754. Zuſatz. Wenn die Horizontal-Mittagslinie DF gegeben iſt, ſo kann man nach nr. I.

& II. KD und DI berechnen; alſo durch die gefundene Punkte K und I die Subſtylarlinie, und durch die gleichfalls gefundene Punkte K und F den Zeiger legen.

§. 755. Zuſatz. Wenn KD gegeben wird, ſo läßt ſich DF daraus finden, nach nr. II. woraus man hernach, wie oben, das übrige finden kann. In der Ausübung ſelbſt werden die Linien wie bey den Horizontaluhren gezeichnet; die 89. *Fig.* ſtellt eine Verticaluhr vor.

Die architectoniſche Wiſſenſchaften,

nemlich

die Civilbaukunſt, und die Militar-baukunſt, nebſt der Artillerie.

Erſtes Hauptſtük, Von der Civilbaukunſt.

§. 756.

Erklärung.

Die Civilbaukunſt oder die bürgerliche Baukunſt iſt die Wiſſenſchaft, ein Gebäude ſo anzugeben, daß es mit den Abſichten des Bauherrn übereinkommt, und nicht nur veſt und dauerhaft, ſondern auch bequem und zierlich oder ſchön gebauet werde. Nach dieſen drey Hauptbegriffen der Veſtigkeit, Bequemlichkeit und Schönheit muß man dieſe Wiſſenſchaft abhandeln, wie wir im folgenden zeigen werden, wenn wir zuvor etwas von der Geſchichte geſagt haben.

Die Geſchichte der Civilbaukunſt.

§. 757. Wie alle Wiſſenſchaften im Anfang ſehr ungekünſtelt waren, ſo richtete ſich auch die Baukunſt anfänglich nur nach den nöthigen Bedürfniſſen der Menſchen; vier Stämme von Bäumen waren vier Stützen eines Daches, unter welchem man vor Regen und Wind ſicher ware. Damit die Stützen unten von der Feuchtigkeit nicht zu bald verderbet wurden, ſezte man ſie auf Steine,

und damit ſie oben von der Laſt des Daches nicht zu bald Riſſe bekämen, ſo wurden ſie mit einem eiſernen Ring umbunden, worauf man einen Querbalken legte, eine Stütze mit der andern zu verbinden; ſo denn legte man wieder in gehöriger Weite von einander andere Balken, deren Köpſe auf den Querbalken hervorragten, auf welchen man das Dach beveſtigte, welches ſchief ſeyn mußte, damit der Regen ablauffen konnte; die Zwiſchenräume zwiſchen den Stützen wurden zu Wänden, und dahero mit Brettern verſchlagen oder auch zugemauert; eine Oeffnung lieſſe man zum Eingang und etliche kleinere Oeffnungen zum Licht.

§. 758. Dieſe allerſimpelſte und älteſte Baukunſt wurde hernach der Grund zu allem dem feinen und ſchönen, was hernach in der Baukunſt noch weiter angebracht wurde; Die vier Stützen nennte man Säulen; die untere Platte worauf ſie ſtunden das Fußgeſimſe (Fr. Piedeſtal;) Die Stütze ſelbſt den Schafft; den oberen eiſernen Ring das Capital; den Querbalken von einer Säule zur andern den Architrab, die Balkenköpſe über den Querbalken den Fries; den Anfang des Dachwerks den Karnis; die Diſtanz von einer Stütze zur andern, die Säulenweite, u. ſ. w. Da dann die griechiſche und römiſche Baumeiſter immer auf neue Erfindungen bey den Säulen beſonders dachten, und fünf Ordnungen herausbrachten, welche bey groſſen Prachtgebäuden ein vorzügliches Anſehen hatten; wobey man immer anf die erſte ſchon gemeldete Gründe zurük ſahe, auf welche noch jetzo ein vernünftiger Baumeiſter zurük ſehen muß, wenn er diejenige Vollkommenheit errei-

reichen will, welche den Griechen und Römern im Bauen eigen war.

§ 759. Die gröſte Vollkommenheit im Bauen herrſchte im auguſteiſchen Jahrhundert, unter den Römern, unter welchen Vitruvius, der die Architectur in 10 Büchern beſchrieben, der vornehmſte Schriftſteller war, dem alle neue Baumeiſter den erſten Rang einmüthig zu erkennen. Die beſte Ausgab iſt die Perraultiſche, ins Franzöſiſche überſezte, und mit guten Anmerkungen verſehene Ausgab; Sie iſt ungleich deutlicher als das vitruvianiſche Original ſelbſt; Perrault hat auch den Anfängern zu lieb, einen Auszug davon herausgegeben, unter dem Titel: Architecture Generale de Vitruve reduite en Abregé.

§. 760. Nach dem Verfall des römiſchen Reiches litte auch die Baukunſt einen groſſen Verluſt, und wurde von den Gothen wieder alle Regeln eines guten Geſchmacks ſo abgeändert, daß man noch an den Ueberbleibſeln der alten gothiſchen Gebäuden, wobey übrigens viele Kunſt aber nicht an den rechten Ort angebracht wird, es ſehen kann, wie groß der Unterſchied zwiſchen den alten guten Gebäuden der Römer und Griechen, und zwiſchen den Gothiſchen in den mittlern Jahrhunderten ſeye.

§. 761. Nachdem aber die Wiſſenſchaften wieder in den Abendländern eine Geſtalt gewonnen, ſo hob auch die Baukunſt wieder ihr Haupt empor; Italien Frankreich und Deutſchland brachte gute Meiſter hervor, an deren Meiſterſtücken von Gebäuden man den wieder hergeſtellten guten Geſchmack der Alten wahrnimmt; wir werden davon unter dem beſondern Titel vom guten Geſchmack in der Baukunſt was ſagen. Unter den italiäniſchen Schriftſtellern iſt heutzutag Vignola vorzüglich anzupreiſen; unter den Deutſchen nach Nic. Goldmanns vollſtändiger Anweiſung zur Civil-Baukunſt, und Leonh. Chriſt. Sturms verſchiedenen Schriften davon iſt beſonders Penther zu nennen, der in vier Folianten mit ſchönen Kupfern, alles das was zur Baukunſt gehöret, erläutert hat.

Allgemeine Grundſätze, und Regeln der Baukunſt, nebſt den Folgen daraus.

§. 762. Erklär. Ein Gebäude iſt ein durch die Kunſt dergeſtalt eingeſchloſſener Raum, daß man ſicher ungehindert, und mit einigem Vergnügen theils darinnen wohnen, theils andere Verrichtungen vornehmen könne.

§. 763.

§. 763. Lehrſ. Ein Gebäude muß veſt, bequem und ſchön ſeyn. Dann wenn es nicht veſt iſt, ſo kann man nicht ſicher und ohne Gefahr die nöthige Verrichtungen vornehmen; wenn es nicht bequem iſt, ſo kann man nicht ungehindert ſolche Geſchäfte verrichten; und wenn es nicht ſchön iſt, ſo wohnet und arbeitet man nicht mit dem Vergnügen darinnen, damit man ſonſten arbeiten würde. Alſo muß ein jedes Gebäude erſtlich dauerhaft oder veſte, zweytens bequem, drittens ſchön oder angenehm ſeyn.

§. 764. Zuſatz. Auch wegen den Zuſchauern, Vorbeygehenden und Fremden, hat man auf die Schönheit eines Gebäudes zu ſehen.

§. 765. Zuſatz. Aus dem was wir zu Anfang der Geſchichte der Baukunſt ſagten, folgt alſo in Vergleichung mit dieſem Lehrſatz, daß die Säulen zur Veſtigkeit vorzüglich gehören; weil aber die Säulen in das Geſicht fallen, ſo ſollen ſie auch neben der Veſtigkeit ſchön und angenehm laſſen.

§. 766. Erklär. Die Uebereinſtimmung des Ganzen und aller Theile zuſammen heißt die Vollkommenheit, und die Vollkommenheit eines Gebäudes beſteht daher in der Uebereinſtiumung deſſelben mit den Abſichten deſſen, der darinn wohnen will, oder es ſonſten zu gewiſſen Verrichtungen gebraucht. Die Schönheit iſt dieſe Vollkommenheit, oder wenigſtens ein nöthiger Schein derſelben, in ſo fern ſie ins Geſicht fällt, und leicht wahrgenommen werden kann.

767. Lehrſ. In der Baukunſt ſind Verhältniſſe, die ſich durch kleine Zahlen ausdrucken laſſen,

die

die ſchönſte. Dann weil die architektoniſche Schönheit ins Geſicht fallen und ſchnell wahrgenommen werden muß, ſo muß die Uebereinſtimmung oder Verhältniß der Theile leicht kennbar ſeyn; das aber kann nicht anders geſchehen, als wenn dieſe Verhältniſſe durch kleine Zahlen ausgedruckt werden, z.E. 1:2, 2:3, 3:4; weil die Seele in einem Blick nach dem Augenmas überſehen kann, ob ein Theil noch einmal oder anderthalbmal u. ſ. w. ſo groß ſeye als der andere, nicht aber ob er 20, 30 mal, oder $\frac{5}{7}$, $\frac{9}{10}$ mal gröſſer oder kleiner ſeye; folglich ſind die kleine Verhältniſſe in der Baukunſt, wie in der Muſik, die ſchönſte Verhältniſſe.

§. 768. Zuſatz. Eine Säule ſoll alſo nicht nur veſt ſondern auch ſchön ſeyn.

§. 769. Erklär. Zur Veſtigkeit gehören drey Haupttheile, ſie ſind nach *Fig.* 98. erſtlich das Poſtement BA, zur Erhöhung der Säule, damit ſie nicht auf der Erde unmittelbar zu ſtehen komme, und Schaden nehme; zweytens die Säule ſelbſt AD, und drittens das Gebälke, oder Haupgeſimſe EF, welches die Balken vorſtellt, die von der Säule getragen werden.

§. 770. Erklär. Ein jedes dieſer Haupttheile hat wieder drey Nebentheile, die auch zur Veſtigkeit dienen; das Poſtement (Piedeſtal) beſteht aus dem Fußgeſimſe BG, dem Würfel HG, und dem Poſtementgeſimſe HA. Zur Säule gehört das Schaftgeſimſe AI, der Schaft IK, der oben etwas dünner als unten iſt, wie ein Baum oder gefällter Stamm, den er vorſtellt, und das Capital oder der Knauf KD. Endlich ſind die Theile

des Gebäudes erſtlich der Architrab DL, der den Querbalken vorſtellt, zweytens der Frieß LO, bey dem man ſich die Balkenköpfe vorzuſtellen hat,, und drittens der Karnies OF, der die Diele und Dachrinnen abbildet, worauf hernach das Dach ruhet.

§. 771. Zuſ. Damit dieſe weſentliche Theile deſto ſchöner ins Geſicht fallen, ſo hat man allerhand kleine Nebenglieder dabey angebracht, wie die ſimpelſte Säule mit ſolchen Gliedern, nemlich die von der toſcaniſchen Ordnung *Fig. 96.* ausweiſet. Die Glieder ſelbſt ſind in den folgenden Figuren der X Tabell gezeichnet.

§. 772 Erklär. Dieſe kleine Glieder ſind in den gezeichneten Lagen, entweder platte oder Cirkelförmige Glieder; die platte heißt man Platten, wenn ſie groß, plättlein aber wenn ſie klein ſind. Die krummen oder cirkelförmige ſind entweder erhaben (convex) oder hohl (concav) oder beedes zugleich; (convex concav) die erhabene können aus einem halben Cirkel, oder nur aus einem kleinen Bogen gemacht werden; in jenem Fall heiſſen ſie Stäbe, wenn ſie groß, Stäblein, wenn ſie klein ſind; in dieſem Fall aber wenn ſie nach einem kleinern Cirkelbogen z. E. nach einem Quadranten gerechnet ſind, Viertelſtäbe. Die hohle Glieder heißt man durchgehends Hohlkehlen; die beedes erhaben und ausgehölt ſind Karnieſſe, wenn ſie groß, und Karnießlein, wenn ſie klein, und verkehrte Karnieſſe, wenn die erhabene Seite oben liegt. Wo ein Glied mit dem andern zuſammenhängt, bekommt es eine Krümme, die man Ab- und Anläuffe nennt. *Fig.* 101—105.

§. 773.

§. 773. Zuſatz. Auſſer dieſen Gliedern hat man noch andere Zierrathen angebracht, die man theils am Capital, theils am Frieß findet, und wodurch man insgemein die Säulenordnungen, unterſcheidet; wir werden aber im folgenden einen andern Grund dieſes Unterſcheids anführen.

§. 774. Wenn im Frieß Einſchnitte angebracht werden, nach der Höhe der Balkenköpfe, welche Einſchnitte in der Baukunſt Triglyphen heiſſen, und *Fig.* 93. in FGEH zu ſtehen kommen, ſo heißt man die Ordnung Doriſch; kommen im Capital acht Schniekel, oder Schneckenlinien vor, wie in den Säulen der folgenden Tabell, ſo heißt die Ordnung Joniſch; kommen endlich Schniekel und zwar an der Zahl ſechszehen und drey Reyhen Blätter vor, ſo heißt die Ordnung Corinthiſch; Römiſch aber, oder vielmehr zuſammengeſezt, wo acht Schnecken, und zwo Reyhen Blätter im Capital ſich befinden; wie die Zeichnung der zweyten Säule ausweißt.

§. 775. Lehrſatz. Aus dem Begriff der Bequemlichkeit folget, daß die Zimmer oder Gemächer rechtwinklich, Vierecke oder Quadrate ſeyn ſollen, weil man ſonſt nicht bequem darinn wohnen könnte; daß ſie ferner nicht zu niedrig, wegen dem Athem und Dampf, aber auch nicht allzu hoch ſeyn ſollen, daß die Fenſter mehr hoch als breit, wegen dem Licht, das dadurch einfallen ſoll; daß die Thüren ebenfalls mehr hoch als breit, nach der Gröſſe der Perſonen die dadurch bequem aus- und eingehen können; daß die Treppen nicht zu ſteil, und wenn das Stockwerk hoch iſt, mit Ruheplätzen inzwiſchen verſehen

ſeyn ſollen, u. ſ. w. auch in Ruckſicht auf die Kü-
chen, Schornſteine oder Camine, Kammern, wo allemal aus der Bequemlichkeit und Veſtigkeit die allgemeinſte Regeln ſich werden herleiten laſſen.

§. 776. **Lehrſatz und Erklär.** Verbindet man noch den Begriff der Schönheit mit den beeden vorigen Begriffen, ſo folget die Symmetrie daraus; oder vielmehr die Eurythmie, das iſt die Aehnlichkeit der Seiten bey einem unähnlichen Mittel, wie am menſchlichen Körper; daß nemlich, wenn die Hauptthüre in der Mitten iſt, zu beeden Seiten gleichviel Fenſter, und die Fenſter von gleicher Höhe ſeyn, in einem Stockwerk; u. ſ. w.

§. 777. **Erklär.** Eine Zeichnung eines Gebäudes kann entweder im Grundriß wie *Fig.* 99. ausweißt, (lat. Ichnonographia) oder im Aufriß (lat. Orthographia) vorgeſtellet werden; die lezte iſt bekannt; alle Kupferſtiche, wo Gebäude vorgeſtellt werden, enthalten ſolche orthographiſche Projectionen.

§. 778. **Erklär.** Der Maasſtab deſſen man ſich in der Civilbaukunſt bedienet, heißt der Modul (Modulus), welcher in 30 Theile getheilet wird wie *Fig.* 97 lehret; und übrigens, wie der verjüngte Maasſtab gebraucht wird; nur daß ſtatt 10 hie 30 Theile vorkommen, in welche das Ganze getheilt wird.

§. 779. Anm. Diß iſt das weſentlichſte, das man in der Baukunſt wiſſen muß, und woraus man ganze Quartanten machen könnte. Allein man wird auſſer dem practiſchen nicht viel mehr daraus lernen, als aus dem bisher beſagten. Der aus dem Begriff der Bequemlichkeit flieſſende obige Lehrſatz könnte in zehen bis zwanzig andere getheilt werden, wie im Wolfiſchen Handbuch; es wäre aber überflüßig. Ein vernünftiger Leſer begreift es aus zwey Worten, warum ein Zimmer ein rechtwink-

lichtes

richtes Viereck, ein Fenſter mehr hoch als breit u ſ. w. ſeyn ſolle, ohne daß man ihm einen etlich Seiten einnehmenden Lehrſatz davon mache; Das nöthigſte iſt alſo hier genugſam geſagt; in folgendem aber werden wir einige Theorien anführen, die man auch in den neueſten architectoniſchen Folianten vergeblich ſucht.

Die Säulenordnungen ſowol hiſtoriſch, als nach einer allgemeinen Theorie betrachtet.

§. 780. Erklär. Man hat von Vitruvii Zeiten an ſich mit fünf Ordnungen der Säulen abgegeben; die heiſſen von den Oertern der Erfindungen: die Toſcaniſche, Doriſche, Joniſche, Corinthiſche und Römiſche, welches aber keine eigene ſondern nur, wie ſie auch genannt wird, eine zuſammengeſezte iſt; die Toſcaniſche kennt man an der Abweſenheit aller Zierathen, indem ſie ausſiehet wie die Säule, davon wir ſchon geredet; die Doriſche kennt man an den Triglyphen in dem Frieß; die Joniſche an den acht Schnecken im Capitale, ohne Blätter; die Corinthiſche an den ſechszehen Schnecken und drey Reihen Blätter im Capital; die Joniſche an den acht Schnecken und zwo Reihen Blättern in Capital. Diß iſt das hiſtoriſche davon.

§. 781. Anm. Wenn es bloß auf dieſe Zierathen ankämte, ſo könnte man etlich Duzend neue Ordnungen in einem Tag ausfindig machen, wie Herr Succov ſchreibt; allein diejenige, die neue Ordnungen erfinden wollten, haben doch immer Schwierigkeiten vor ſich geſehen, durch welche ſie abgeſchröckt wurden; vielleicht haben die Alten den Begriff von der Säulenordnung nicht gehabt, den die neuen Baumeiſter damit verbinden; Vitruv rathet ihnen zwar, ſie ſollen Philoſophen werden, wenn ſie was groſſes leiſten wollen; die wenigſte ſind es, daher iſt es kein Wunder, daß auch die gröſte Baumeiſter einen von den

Ordnungen, und ihren Unterſchied weiter nichts ſagen, als was wir als hiſtoriſche Kennzeichen derſelben angegeben haben. Herr Prof Krafft hat in den Comm. Acad. Scient. Imperial. Petropol. T. XI. eine Theorie bekannt gemacht, die mit Herrn Prof. Eulers muſikaliſchen Theorie viel ähnliches hat; wir wollen das weſentliche daraus hier anführen.

§. 782. Lehrſatz. Wenn mn ein Product aus zwo Zahlen iſt, die nicht weiter ſich zerfällen laſſen; und wenn $n > m$, ſo giebt es nicht mehr Diviſores als 1, m, n, mn; und nicht mehr Verhältniſſe als folgende fünf $1:1$, $1:m$; $1:n$, $1:mn$, $m:n$.

§. 783. Lehrſatz. Weil in einer jeden Säule drey Stücke betrachtet werden, nemlich das Poſtement, der Schaft, und das Gebälke, ſo giebt es, wofern der Modul, als das Maas dieſer Theile, noch dazu kommt, den man $= 1$ ſezt, aus dem obigen Lehrſatz, den Herr Prof. Krafft den Canon nennt, nicht mehr als folgende fünf Ordnungen, in ſo fern ſie nach den Höhen betrachtet werden; nemlich

		I.	II.	III.	IV.	V.
die Höhe des Säulenſtuhls	n	3	5	7	5	7
— Fußgeſimſes	$mn:(1+m+n)$	1	$1\frac{1}{4}$	$1\frac{2}{5}$	$1\frac{2}{3}$	$1\frac{10}{11}$
— Winkels	$nn:(1+m+n)$	$1\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{8}$	$4\frac{9}{10}$	$2\frac{7}{9}$	$4\frac{5}{11}$
— Poſtem. Geſimſ.	$n:(1+m+n)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{87}{11}$
— Schaftes	mn	6	10	14	15	21
— Schaftgeſimſes	$mn:(2+mn)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{12}{23}$
— Stammes	$m^2n^2:(2+mn)$	$2\frac{1}{2}$	$8\frac{1}{2}$	$12\frac{4}{1}$	$13\frac{4}{17}$	$19\frac{4}{23}$
— Knopfes oder Capitals	$mn:(2+mn)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{17}$	$\frac{21}{23}$
— Gebälkes	m.	2	2	2	3	3
— Architrabs	$m:(m+2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
— Frieſes	$m:(m+2)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
— Karniſes	$mn:(m+2)$	1	1	1	$1\frac{4}{5}$	$1\frac{4}{5}$

§. 784.

§. 784. Lehrſatz. Es giebt nicht weiter als fünf Ordnungen die in der Architectur tauglich wären.

Bew.

Man ſetze für m, n, nach und nach andere Prim-Zahlen wie folget, daß je zwey unter einander ſtehende zuſammen gehören

m =	2,	2,	2,	3,	3	
n =	3,	5,	7,	5,	7.	ſo ſind
	I.	II.	III.	IV.	V.	

die fünf römiſche Zahlen die fünf Ordnungen; dann wollte man noch 11 dazu nehmen, ſo würde zwar eine ſechste herauskommen, aber ſie würde ungeheuer groß werden und alſo unbrauchbar ſeyn; der Schaft allein wäre $3 \cdot 11 = 33$. Eben ſo iſt auch die erſte zu klein. Darum ſind eigentlich nur die vier alten Ordnungen erwieſen.

§ 785. Zuſatz. Einer jeden Ordnung Höhe allgemein iſt alſo $m + mn + n$ nemlich das Poſtement, der Schaft und Gebälke addirt.

§. 786. Zuſatz. Weil die erſte Ordnung alſo $2 + 2 \cdot 3 + 3 = 10$. Model hält, und alſo zu moderiren iſt, ſo kann ſie weggelaſſen werden; aber die zweyte kommt mit der Toſcaniſchen, die dritte mit der Doriſchen, die vierte mit der Joniſchen und die fünfte mit der Corinthiſchen oder Römiſchen überein.

Allgemeine Theorie von den Säulenweiten, Ordnung der Balkenköpfe, Triglyphen und ihren Zwiſchenweiten.

§. 787. Lehrſatz. Die Veſtigkeit eines viereckigten Balkens wird gefunden, wenn man das Product aus der Breite in das Quadrat der Höhe, wie

wie er aus der Mauer hervorragt, multiplicirt, das iſt *Fig.* 93. GF^2 FH.

§. 788. Anm. Dieſe Regel haben die Naturforſcher durch Verſuche und daraus gezogene Schlüſſe gefunden; z. E. Muſchenbröck Elem. Phyſ. § 566. ſq. Daher wir den Satz als einen Lehrſatz aus der Phyſik annehmen dürfen. Dieſe Veſtigkeit beruhet eigentlich, um die Sache deutlicher vorzuſtellen, auf einer Verhältniß zweyer hervorragenden Bälken, und heißt ſo viel; wenn zwey Bälken von zerſchiedener Breite und Länge gleichweit aus der Mauer hervorragen, ſo verhält ſich die Veſtigkeit des einen zur Veſtigkeit des andern, wie die gemeldten Producte.

§. 789. Zuſatz. Es iſt leicht begreiflich, daß der Balken mehr trägt, wenn er auf der ſchmahlen Seite liegt; das iſt, wenn der Balkenkopf mehr hoch als breit iſt.

§. 790. Zuſatz. Doch darf er auch nicht auf der Seite wo er liegt, allzu ſchmal ſeyn; dahero alles in der 93 *Fig.* auf die Fläche GFHI ankommt; welche ſich beſtimmen läßt, wenn die Lehre vom größten und kleinſten hie angewandt wird.

§. 791. Zuſatz. Auch iſt aus der Geometrie begreiflich, daß aus einem Baum oder Stamm, bey unveränderten Diameter verſchiedene Bälken gehauen werden können.

§. 792. Lehrſatz. Wenn der Diameter des Baums, oder, welches einerley iſt, die Diagonallinie des Balken IF gegeben iſt, ſo läßt ſich die Fläche des ſtärkſten Balkenkopfs beſtimmen, der aus dem Baum gehauen werden kann; ſie wird ſeyn bey nahe wie 2:3 oder 3:4.

Bew.

Die Diagonallinie FI ſey $= a$; die Breite des Balkenkopfes HF $= x$; ſo iſt nach dem Pythagoriſchen Lehrſatz die Höhe CF $= \sqrt{(a^2 - x^2)}$ alſo weil nach obigem Lehrſatz die Laſt, die ein Balken von dieſer Figur

gur tragen kann $= GF^2 . FH$; alſo in den genannten kleinen Buchſtaben die Laſt

$$= (a^2 - x^2)x = aax - xxx = \text{Maxim.}$$
differenz.
$$a^2dx - 3x^2dx = 0$$
: dx
$$a^2 - 3x^2 = 0$$ und herübergeſezt
$$a^2 = 3x^2$$
√ extr.
$$a = x\sqrt{3}.$$
: √3

Nr. I. $a : \sqrt{3} = x$. die Breite; folglich

Nr. II. die Höhe $GF = \sqrt{(a^2 - x^2)} = \sqrt{(a^2 - \frac{a^2}{3})}$
$= \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\sqrt{2} : \sqrt{3}$. Dahero die Verhältniß folgende iſt:

$$FH : FG = a : \sqrt{3} : a\sqrt{\tfrac{2}{3}}$$
: a
$$FH : FG = \frac{1}{\sqrt{3}} : \sqrt{\tfrac{2}{3}}$$
. √3
$$= 1 : \frac{\sqrt{2} . \sqrt{3}}{\sqrt{3}} =$$ das iſt genau

$FH : FG = 1 : \sqrt{2}$. Wenn die Breite $= 1$, und die Höhe $= \sqrt{2}$, ſo iſt der Balken ſo gehauen, daß er auf die ſchmale Seite gelegt, die gröſſeſte Laſt tragen kann, die ein Balk, der aus einem Baum vom gegebenen Diameter oder Diagonallinie gehauen werden kann, trägt.

§. 793. Zuſatz. Wenn man wirklich die Quadratwurzel extrahirt, ſo iſt $1 : \sqrt{2} = 1 : 1,414 \ldots$ beynahe, nach der Decimalrechnung. Oder welches gleichviel iſt $= 2 : 2,828$, wenn man die obige Verhältniß multiplicirt; das iſt beynahe wie $2 : 3$, oder auch $3 : 4$.

§. 794. Zuſatz. Weil die Verhältniß 2:3 kleiner, folglich ſchöner iſt als 3:4, ſo bleibt man bey der erſten.

§. 795. Anm. Dieſe Verhältniß haben die Alten immer angenommen; aber nicht aus den hier gegebenen Gründen, ſondern nach der Erfahrung; weil ſie gefunden, daß der Balkenkopf in dieſer Verhältniß gehauen am meiſten trage. Sollten ſie aber von ungefehr darauf gekommen ſeyn, ſo ſind ſie ſehr glüklich geweſen; dann dieſe Theorie iſt eine Erfindung der neueſten Zeiten, unerachtet ſie als eine Theorie den meiſten Baumeiſtern unbekannt ſeyn mag; Herr Prof. Krafft hat ſie in einer beſondern Diſſert. de Triglyphis weiter ausgeführt, Tüb. 1747. wir haben hier das weſentlichſte daraus vorgetragen.

§. 796. Lehnſatz. Die Zwiſchentiefe zwiſchen zwey Balkenköpfen muß allemal ein Quadrat ſeyn. Dieſer Satz iſt von allen Baumeiſtern angenommen worden; ſo iſt z. E. EeFG ein Quadrant und Ee = Fe.

§. 797. Aufgab. Die Balkenköpfe ſollen ſo eingerichtet werden, daß die Zwiſchentiefen gehöriger maſſen Quadrate werden, und mitten über jede Säule ein Balkenkopf zu ſtehen kommt.

Auflöſung und Beweis.

Aa und Bb ſeyen die Axen zwoer nächſten Säulen; ACEe die Helfte des Balkenkopfs über Aa, alſo ſeine halbe Breite Ae, und ſeine Höhe eE; der nachfolgende Balkenkopf ſey FHIG; die Zwiſchentiefe des Quadrats EeFG, wo alſo Ee = eF; die halbe Breite des nächſten Balkenkopfs ſey BD = AC.

Nun ſetze man die Höhe eines Balkenkopfs = x
alſo eE = GF = HI = x;
die Verhältniß der Höhe zur Breite = 1 : m; ſo iſt
1 : m = x : mx, alſo mx die Breite = FH.

II. Die Zahl der Balkenköpfe ſeye = y
folglich ſind Zwiſchentiefen (Metopæ) von e bis
D = y + 1. eine Zwiſchentiefe mehr als Balkenköpfe,

köpfe, wie es der Augenſchein in der Figur gibt, rechnet man aber die zween halbe Balkenköpfe dazu, nemlich auf AB und DB, ſo hat man einerley Anzahl, alſo auch Balkenköpfe in einer Säulenweite $= y + 1$.

III. Weil die Breite der Zwiſchenweite der Höhe des Balkenkopfs gleich iſt, alſo $= x$, ſo iſt die Summe aller dieſer Breiten zwiſchen zwo Säulen $= (y + 1)x$; und weil die Breite eines Balkenkopfs mx iſt, ſo iſt auch die Summe aller Breiten der Balkenköpfe zwiſchen zwo Säulen $= (y + 1)mx$. Dieſe beede Ausdrücke zuſammen addirt, geben die ganze Säulenweite; alſo iſt, wenn die Säulenweite $= c$,

$(y + 1)x + (y + 1)mx = c$. und ſchikl. ausgedr.

$$(y+1)(m+1)x = (y+1)x + (y+1)mx = yx + x + mxy + mx$$

$$(y+1)(m+1)x = c. \quad : (y+1)(m+1)$$

$$x = \frac{c}{(y+1)(m+1)}$$ = die Höhe des Balkenkopfs aus der Säulenweite und Anzahl der Köpfe.

IV. Die Balkenweite oder der Abſtand des Mittels von einem Balken zur Mitte des andern iſt einer Zwiſchentiefe und zwo halben Balkenbreiten gleich, nemlich *Fig.* 93. $Ae + eF + \frac{1}{2}FH = 2Ae + eF$, weil $\frac{1}{2}FH = Ae$; aber $2Ae =$ der ganzen Balkenbreite; alſo iſt die Balkenweite gleich $FH + eF$; Man ſetze ſie $= z$; ſo iſt, wenn man den Wehrt von $FH = mx$, und $eF = FG = x$ ſetzet,

$$z = mx + x = (m + 1)x.$$

alſo $z = (m + 1)x$ aber

Nr. III. $(y+1)(m+1)x = c$ folgl. den Wehrt von $(m+1)x$ ſubſtit.

$(y+1)z = c.$ alſo

$(y+1) = \frac{c}{z}$ das iſt, man kann die Anzahl der Balkenköpfe aus der Säulenweite und Höhe der Balkenköpfe finden, wo allemal $\frac{c}{z}$ eine ganze Zahl ſeyn muß.

§. 798. Zuſatz. Wenn c die kleinſte Säulenweite iſt, ſo wird $c+ne$ eine jede gröſſere ausdrücken; iſt nun $\frac{ne}{z}$ eine ganze Zahl, ſo iſt auch $\frac{c+ne}{z}$ eine ganze Zahl; wenn $n = 1$, und $\frac{e}{z}$ eine ganze Zahl; ſo wird $e=z$ oder $e=mz$, das iſt z durch eine ganze Zahl multiplicirt; folglich kann man z für e ſetzen, und anſtatt $c, c+e, c+2e, c+3e$, wird man ſetzen $c, c+z, c+2z, c+3z$. Das iſt, man bekommt die Säulenweite, auf welche ſich die berechnete Balkenköpfe ſchicken, wenn man zur erſten Säulenweite, für die ſie berechnet worden, die Balkenweite 1, 2, 3 mal u. ſ. w. addirt.

§. 799. Zuſatz. Die *Fig.* 93. ſtellt die kleinſte Säulenweite vor; in welcher $y+1=1$, $c:z = 2$, und $z=\frac{1}{2}c$. alſo iſt die Balkenbreite die Helfte der kleinſten Säulenweite; und die Balkenköpfe ſchicken ſich auf alle Säulenweiten, die in arithmetiſcher Proportion wachſen, deren erſtes Glied $= c$, die Differenz aber $=\frac{1}{2}c$, oder die Helfte der kleinſten Säulenweite iſt.

§. 800. Weil bey gekappelten Säulen kein Balkenkopf zwiſchen beyden in die Mitte kommen kann, ſo kann in dieſem Fall die Formel, wo $y+1 = 1$ nicht gebraucht werden; ſondern y muß null werden, oder $y+1=1$.

§. 801.

§. 801. Anm. Es iſt leicht begreiflich, daß man noch weiter Anwendungen machen kann, z. E. wenn Säulen über einander geſtellt werden u. ſ. w. allein in einem Compendio wird es genug ſeyn, ſo viel von einer Theorie zu finden, die man in architectoniſchen Folianten vergeblich ſucht. Sturm ſchreibt in ſeiner vollſtändigen Anweiſung aller Arten von regulairen Prachtgebäuden nach gewiſſen Regeln zu finden, auszutheilen und auszuzieren, benebſt einer doppelten Vorſtellung der ſechs Ordnungen der Baukunſt, in ſolcher Vollkommenheit und Geſchiklichkeit auf alle gebräuchliche Säulenweiten, als vorhero nie geſehen worden. Augſp. 1717. fol. am Ende: Er habe eine Aufgabe aufgelößt, welche die franzöſiſche Baumeiſter für unauflöslich gehalten, und als eine ſolche öffentlich erklärt haben, nemlich die Doriſche Säulen zu Kappeln oder Balkenköpfen auf $\frac{2}{3}$ M. Säulenweiten zu rechnen. Die Methode dieſer unauflöslich geſchienenen Aufgabe hat er nicht gezeigt, ſondern als ein Geheimniß verborgen; Herr Prof. Krafft hat ſie demonſtrirt in der ſchon genannten Diſſert. und Herr Prof. Käſtner iſt auch darauf gekommen. Wenn übrigens Sturm das obige ſagt, ſo iſt es nicht ſo zu verſtehen, als ob er eine gar ſchwere Aufgabe aufgelößt hätte, ſondern nur daß den franzöſiſchen Baumeiſtern eine ſehr leichte architectoniſche Aufgabe unauflöslich geweſen; wie aus der hier vorgetragenen leichten Rechnung erhellt.

Vom guten Geſchmak in der Baukunſt und von den Eigenſchaften eines guten Baumeiſters.

§. 802. **Erkl.** Der gute Geſchmak in der Baukunſt gründet ſich auf die allgemeine Regeln, die in der Geſchichte der Baukunſt und folgenden vorgetragen wurden; und wenn man den guten Geſchmak herſtellen will, ſo muß man die Grundſätze dazu in der vortreflichen Wiſſenſchaft des Alterthums aufſuchen, die in Vitruv und in den Ruinen der ehemaligen prachtvollen römiſchen und griechiſchen Gebäuden uns aufbehalten worden.

§. 803. Anm. In dieſer Abhandlung folgen wir den Gedanken des Herrn Major von Humbert, königl. Preuſ. geh. Raths, welcher in den Ouvrages diverſes ſur les belles Lettres l'Architecture civile & Militaire beſonders auch von dem guten Geſchmak

in der Baukunſt gehandelt, und der als ein vortreflicher Kenner vor andern hier verdient genannt zu werden.

§. 804. Zuſatz. Wenn man bey der allgemeinen Begierde zu bauen eben ſo begierig wäre, gut, und nach dem feinen Geſchmak der Alten zu bauen, ſo würde man die Meiſterſtücke der Alten in Vergleichung mit der Neuern Gebäuden nicht ſo bewundern und für unnachahmlich halten. Allein die Italiäner, Deutſche und Franzoſen, die drey vornehmſte Nationen im Bauen, verſtoſſen ſich gar oft, und machen Hauptfehler gegen den guten Geſchmak, davon wir jezo was ſagen.

§. 805. Was Italien betrift, ſo hat man in dem lezten Jahrhundert beſonders zu Rom die gute Bauregeln ganz aus den Augen geſezt, zu groſſer Verachtung derjenigen herrlichen Denkmäler, deren ſie Bewahrer ſind. Ein Baumeiſter ſoll von allem, was er macht, Grund angeben können. Wenn er aber, wie Michael Angelus in ſeiner Nachahme, die Fenſter mit Säulen ſchmükt, die nichts anders als einen kleinen Fronton zu tragen haben, ſo handelt er wieder die Gründe der Architectur und der erſten Anfänge, nach welchen eine Säule eine Stüze iſt, die eine groſſe Laſt, das ganze Dach, tragen ſolle. Ueberhaupt werden die gute Baumeiſter, die von Mich. Angelus angeführte Frontons gar nicht achten.

§. 806. Eben das müſſen wir von den Halbfenſtern (Mezanines) ſagen, in welche die Italiäner ſo verliebt ſind; es ſind kleine Fenſter, die man in den Frieß der Vertäfelung anbringt. Das iſt wider alle vernünftige Gründe, an ſolchen Ort Fenſter zu machen; doch ſieht man ſie in allen vornehmen

men Gebäuden zu Rom; auch im Palais des Thuilleries zu Paris ſind ſie nachgeahmt.

§. 807. Eines iſt von den Italiänern zu loben, daß ſie ein gutes Dach bauen; dann die Italiäniſche Dächer ſind allen andern nach den Regeln der Baukunſt vorzuziehen. Ein Gebäude ſoll mit dem menſchlichen Cörper einerley Symmetrie haben. Das Dach ſtellt den Kopf vor; es läßt aber nicht fein, wenn ein Rieſenkopf auf einem Kindsleib ſteht; ſo ſehen die meiſte deutſche Dächer aus; die Italiäner folgen darinnen dem guten Geſchmak, und machen das Dach kleiner als alles andere; die Deutſche behaupten, die Dächer müſſen gröſſer ſeyn, weil ſie in Deutſchland und überhaupt gegen Norden keine ſo mäßige Witterung als in Italien hätten. Allein man ſieht in Stockholm verſchiedene ſchöne Gebäude, die keine höhere Dächer als die in Italien haben. Das Gewäſſer von Regen und Schnee thut doch keinen Schaden, und man kann noch anders helfen, als mit ſo ungeheuren Dächern.

§. 808. Anm. Eben ſo iſt die Manſardiſche Bauart, die man noch vielfältig in Deutſchland braucht, nicht vernünftig. Ein ſolches Gebäude läßt von weitem, als wenn es lauter Dach wäre; und man kann von den Innwohnern eigentlich ſagen, daß ſie unter ihrem Dach wohnen. Wenn man noch Zimmer darunter bauet, und ſie zu erleuchten Fenſter hinein macht, und gar einen Theil davon hinwegnimmt, damit das Hauptgeſimſe den Proſpect nicht hindere, ſo ſagte Ballet: „Nur die ungeſchliffenſte Handwerkeleute ſind fähig, einen ſo unverzeyhlichen Fehler zu begehen.„

§. 809. Auch fehlen die Deutſchen mehrmalen gegen den guten Geſchmak durch ihre ſeltſame Mahlereyen und Verblendungen; wie beſonders in Franken und am Rhein, wenn man das ganze Gebäude wie Marmor anſtreicht, und nicht einmal die Fenſterſchläge und Thürflügel damit verſchont; dann

es

es iſt ja wider alle Vernunft, ſolche von Stein zu machen.

§. 810. Anm. Noch ſeltſamer ſind die Schrökgeſichte, perſianiſche Rieſen, Laubwerke, Emblemata u. ſ. w. auch iſt das Verblenden ſelten wohl angebracht; über die gelbe Farb, womit die Deutſche ſo viel Häuſer anſtreichen, macht Herr Humbert die Anmerkung, man habe die Häuſer der Banqueroutirer vor Zeiten ſo angeſtrichen.

§. 811. Die Franzoſen haben unter dieſen dreyen Nationen im Bauen den beſten Geſchmak; hierinn muß man ihren Baumeiſtern Gerechtigkeit wiederfahren laſſen. Nur eines gefällt Herrn Humbert nicht, daß ſie das mittlere Stockwerk, das ſie das Herrenſtockwerk nennen, mehr als das obere und untere verzieren. Wenn man es ja unterſcheiden will, ſo könnte man einen Austritt (Riſſulita) nach deutſchem Geſchmak machen.

§. 812. Anm. Die Perſpectiv iſt ein groſſer Theil einer guten Baukunſt; der P. Labat, ein groſſer Kenner, ſagt von dem Jeſuitercollegio zu Rom oder dem römiſchen Collegio, man ſehe ein Meiſterſtük von dem P. Andr. Del Pozzo in der Mitte des Creuzbogens vom Gewölbe, wo ſtatt der Kuppel eine Perſpective auf Leinwand gemahlet ſeye, welche eine Kuppel ſo natürlich vorſtelle, daß man allemal den Geſichtspunkt trift, man mag ihn, von welcher Seite man will, betrachten. Diß, ſagt er, iſt das erſtaunungswürdigſte und ſchönſte zu Rom, und vielleicht in der ganzen Welt. Hingegen von der Kirche der Trinitaner ſchreibt er: ſie ſey ſchön, aber ſie würde noch ſchöner ſeyn, wenn ſie ſich eines verſtändigeren Baumeiſters als des ſonſt ſo berühmten Borromini bedient hätten.

§. 813. Ueberhaupt würde man in der Baukunſt gröſſere Baumeiſter erhalten, wenn man in groſſen Städten Baumeiſter-Academien errichtete, wo man aber nicht eben duſchen oder mahlen, welches faſt die einige Kunſt vieler Baumeiſter iſt, ſondern andere Wiſſenſchaften, beſonders die Mathematik im eigentlichen Verſtand, nach allen ihren Theilen, die Algebra und höhere Geometrie nicht ausgenommen, lehren, und wie wir gezeigt haben,

auf

auf die Gegenſtände der Baukunſt anwenden ſollte; in welchem Fall man von keinen unauflöslichen Aufgaben in der Baukunſt mehr ſprechen würde, wie wir ein Exempel von den franzöſiſchen Baumeiſtern gegeben; die Nothwendigkeit, daß ein rechter Baumeiſter diß alles verſtehen müſſe, erhellet zur Genüge, wenn man nur die Abſicht des Bauherrns, und die Oerter, wo man bauet, betrachtet. Mit einer geduſchten Mahlerey auf dem Papier iſt das Haus noch nicht auf einem wäſſerichten Grund vor dem Sinken bewahrt; aber zur Waſſerbaukunſt gehört die Kenntniß aller ſtatiſchen und mechaniſchen Wiſſenſchaften; die ganze Optik muß ein Baumeiſter wiſſen, wenn er nach dem Geſicht bauen, und nicht gothiſche Schnizwerke am unrechten Ort anbringen will, die zu entdecken man ein Vergröſſerungsglas brauchen muß. Es iſt nicht genug, daß man einen Bildhauer eine Bildſäule hauen läßt, man muß ihm auch ſagen, wo ſie künftig, wenn ſie fertig iſt, ihren beſtändigen Platz haben ſolle; iſt der Bildhauer ein Opticus wie Phidias, der die Minerva für den Gipfel ihres Tempels bilden ſollte, ſo wird er es nicht achten, wenn das gemeine Volk bey dem erſten Anblik des Bildes ihn tadelt; weil er von dem groſſen Beyfall, der nachfolgt, wenn die Statue an ihren rechten Platz kommt, vorhin und aus mathematiſchen Gründen überzeugt iſt; aber hie begeht man noch immer ungemein groſſe Fehler; welchen nicht anders als durch eine genaue Kenntniß der mathematiſchen Wiſſenſchaften abgeholfen werden kann.

Zweytes Hauptſtük, von der Militarbaukunſt.

§. 814.

Erklärung.

Die Militarbaukunſt iſt eine Wiſſenſchaft, welche lehret, nicht nur wie man einen gegebenen Ort ſo beveſtigen ſolle, daß ihn wenige mit Vortheil gegen viele vertheidigen können, ſondern auch in Rückſicht auf den Angriff, (Attaque) wie ein dergleichen wohl beveſtigter Ort am geſchickteſten und am ſchwächſten Theil mit dem wenigſten Verluſt anzugreifen ſeye.

Geſchichte der Militarbaukunſt.

§. 815. In den älteſten Zeiten ehe die neuere Kriegsbaukunſt und Artilleriewiſſenſchaft empor kam, hatte man eine ganz andere Bauart bey Veſtungen, als heutzutag; die Geſchichte davon gehört in die Critik über die alten claſſiſchen Schriftſteller, z. E. über den Polyb, den Vegetius und andere, wiewolen die meiſte die darüber commentirt haben, entweder zu wenig Critik oder zu wenig Mathematik und Ingenieurswiſſenſchaften verſtehen; das erſtere haben einige von dem berühmten Follardiſchen Werk über den Polyb tadeln wollen; man findet wenigſtens mehr neuere Ingenieurkunſt darinnen als genaue und critiſche Erklärungen, Auslegungen

des

des griechiſchen Textes des Polybius. Doch wir reden von der neuen Geſchichte.

§. 816. Seitdeme die Kriegskunſt nach Erfindung des Pulvers ſich abänderte, hat man den Anfang machen müſſen, ganz neue Veſtungen zu bauen. Die erſte Manieren davon waren die Italieniſche; das Fort von Mayland wurde als ein Meiſterſtück bewundert; und die Ingenieur reißten nach Italien, wenn ſie ihre Kunſt bereichern wollten; aber der Italieniſche Geſchmack verlohr ſich bald, und ſo ſehr man den Veſtungsbau in Italien Anfangs lobte, ſo ſehr tadelte man ihn, als die Holländiſche Manieren aufkamen; Dieſe behielten eine geraume Zeit unter dem Freytag und andern Holländiſchen Ingenieurs den Vorzug, der aber auch wieder herabgeſezt wurde, als die Franzoſen ſich unter Anleitung des Chevalier St. Julien, des Marſchall Blondels und vorzüglich des Vaubans hervorthaten, und in dem Holländiſchen Syſtem verſchiedene Fehler entdeckten, welche ſie ſorgfältig zu vermeiden ſuchten, und dahero bis auf unſere Zeiten die Meiſter von der Kriegsbaukunſt blieben.

§. 817. Nachdeme auch die Artillerie durch neue Kunſtgriffe immer höher getrieben wird, ſcheint es, daß man auch auf neue Arten der Beveſtigung zu denken habe, wie dann verſchiedene unter den Neueren dißfalls allerhand Syſteme angegeben haben, davon wir in der weitern Abhandlung was melden.

§. 818. Anm. Die beſten Schriften die man in der Kriegsbaukunſt nutzen kann, ſind auſſer dem Holländiſchen ſchon genannten Werk, unter den Deutſchen L. Sturms Archit. Militaris Hypothet. Eclectica, worinnen über 70 Manieren in Kupfer geſtochen ſind; und eben deſſelben veritable Vauban; unter

den Franzoſen iſt des Chev. de St. Julien Archit. Militaire bekannt. Auch kann man auſſer dieſen mit Nutzen leſen, Speckles Baukunſt von Veſtungen, Faulhabers Ingenierſchule, und unter den neueſten Hrn. Bilfingers Erläuterung ſeiner Manieren; in Rückſicht auf die Artillerie aber auſſer dem Simionowicz, und Mieth, beſonders Robins Artillerie mit Hrn. Prof. Eulers Anmerkungen, auch Hrn. Struenſee im Jahr 1762. heraus gegebene und nach dieſen Grundſätzen angeordnete Artilleriekunſt.

Allgemeine Regeln der Fortification, und die Namen der Haupttheile.

§. 819. Lehrſatz. Die allgemeine Regeln und Grundmaximen die man bey der Fortification in Acht zu nehmen hat, laſſen ſich aus der ſchon gegebenen Erklärung verſtehen und ſind folgende:

I. Alle Theile eines Platzes müſſen einander wechſelsweis vertheidigen.

II. Eine Veſtung muß rings um ſich herum bis auf einen Canonſchuß weit das Feld frey beſtreichen und folglich den Feind abhalten können;

III. Die Auſſenwerke müſſen niedriger ſeyn, als die innere, weil ſie von den innern vertheidiget werden.

IV. Die Flanken ſollen in Anſehung der übrigen Theile ſo groß gemacht werden, als nach der Verhältniß der übrigen möglich iſt; Dann je gröſſer die Flanken ſind, deſto ſtärker iſt die Vertheidigung. Auch ſollen die Facen in regulairen Veſtungen nicht leicht kleiner ſeyn, als die Hälfte der Courtine.

V. Die Defenslinie ſoll nie über einen Muſquetenſchuß oder 65 Rheinl. Ruthen lang ſeyn, weil die Defenſion durch das kleine Gewehr daſelbſt geſchiehet.

VI.

VI. In groſſen Veſtungen, wo man öfters Ausfälle thut, und Succurs erwartet, ſind trockene breite Gräben beſſer als Waſſergräben.

§. 820. **Erklär.** Die Nahmen der Haupttheile kann man nach dem Umriß und nach dem Profil oder Durchſchnitt ſich bekannt machen, wir wollen ſie nach beeden Zeichnungen deutſch und franzöſiſch anführen.

Nahmen nach dem Umkreiß. *Fig.* 107. a.

Der Wall		Rempart.
Das Bollwerk	ABCD.	Baſtion.
Das äuſſere Polygon	FC.	Polygon exterieur.
Das innere Polygon	GH.	Polygon interieur.
Die Geſichtslinie	BC.	la Face.
Die Flanke	BA.	le Flanc.
Die Nebenflanke	EI od. eI.	le ſecond flanc.
Die Kehle	AHD.	la Gorge.
Die Kehllinie	AH.	la Demigorge.
Die Cortine	EA.	Courtine.
Die Hauptlinie oder Capitallinie	CH.	la Capitale.
Die ſtreichende Defenslinie	CI.	la ligne de défenſe flanquante.
Die einbohrende Defenslinie	CE.	la ligne de defenſe fichante.
Der groſſe und kleine Radius	KC. KH.	les Rayons.
Der Polygonwinkel	AHD.	l'angle du Polygone.
Der Schulterwinkel	ABC.	l'angle d'epaule.
Der Bollwerkswinkel	BCS.	Angle flanque, ou pointe du Baſtion.

Der kleine Winkel	BCF.	Angle diminué.
Der Centriwinkel	GKH.	Angle du Centre.
Der beſtrichene Winkel	COF.	Angle flanquant exterieur.
Der Streichwinkel	CIA.	Angle flanquant interieur.

§. 821. Die Nahmen nach dem Durchſchnitt oder Profil ſind folgende *Fig.* 111.

Die innere Boſchung	AK.	Talud interieur.
Der Wallgang	AB.	Terreplein.
Das Bänklein	BD.	Banquette.
Die Bruſtwehr	EF.	Parapet.
Die äuſſere Boſchung	FI.	Talud exterieur.
Die Berme	GI.	La Berme, Liſiere.
Die innere Doſirung oder Boſchung des Grabens.	GH.	Eſcarpe.
Der Graben	HL.	le Foſſé.
Die äuſſere Doſirung oder Boſchung des Grabens	ML.	Contreſcarpe.
Der bedeckte Weg	MN.	Chemin couvert, Coredor.
Das Glacis.	QR.	Glacis, Eſplanade.

§. 822. Die Nahmen der Auſſenwerke (les Dehors) ſind folgende, wie ſie *Fig.* 107. β zu ſehen.

Ein Ravelin.	Ravelin.
Ein halber Mond.	demi Lune.
Ein Contregarde.	Contregarde.
Eine einfache Scheer.	Tenaille ſimple.
Eine doppelte Scheer.	Tenaille double.
Ein Hornwerk.	Ouvrage à corne.

Ein

Ein Cronenwerk.	Ouvrage à couronne.
Ein kleiner Graben im groſſen.	Cunette (im Blondelliſchen Syſtem.)
Eine Katze.	Cuvallier. (im Blond. Syſtem)
Eine Brille.	Lunette (im Vauban. I. Syſtem.)
Traverſen.	Traverſes.
Waſenplätze.	Places d'armes.
Schießſcharten.	Embraſures.
Contremine.	Contremine.

§. 823. Zuſ. Auſſer den Zeichnungen die aus der Elementargeometrie auch Trigom. von den Polygonen bekannt ſind, werden wir in den folgenden von den verſchiedenen Syſtemen die Anweiſung dazu geben.

Die verſchiedene Syſteme der regulairen Veſtungen, vornemlich die Holländiſche, die Franzöſiſche, beſonders beede Vaubaniſche, auch unter den Deutſchen die Bilſingeriſche.

§. 824. Erklär. Eine regulaire Beveſtigung iſt die Beveſtigung eines regulairen Vielecks, z. E. ein Fünfecks, Sechsecks, Sieben = Acht = Neunecks u. ſ. w. Wo man der Centri = und Polygonwinkel nach Geom. und Trigon. Gründen findet, und die übrige Zeichnungen nach den vorigen Artikeln anbringt.

§. 825. Anm. Das Drey = und Viereck pflegte man ſonſten nicht unter die Syſteme zu zehlen, ſondern rechnete ſie nur zu den Feldſchanzen, weil ſie nicht ſo gut wie die übrigen Polygonen ſich beveſtigen lieſſen. Aber Hr. Geb. Rath Bilſinger hat gezeigt, daß ihre Beveſtigung ſo dauerhaft und gut, ja beſſer als der übrigen ſeye; wie wir im folgenden zeigen werden.

§. 826. Erklär. Das Holländiſche Syſtem iſt das bekannteſte, aber nicht das beſte; es unterſcheidet ſich *Fig.* 107. *a* von dem übrigen dadurch,

daß die Flanken auf die Courtine perpendicular gezogen werden, und hernach groſſe Secondflanken dabey entſtehen.

§. 827. Zuſatz. Aber eben dieſe zwey Hauptcharactere ſind zween wahre Fehler in dieſem Syſtem; dann wenn die Flanke auf der Courtine perpendicular ſtehet, ſo iſt die Defenſion von da aus ſchief, eine ſchiefe Defenſion aber iſt bey weitem nicht ſo ſtark als diejenige, die unter einem rechten Winkel geſchiehet. Eben das gilt von den Secondflanken, wo die Defenſion noch ſchiefer iſt.

§. 828. Erklär. Nach dem Holländiſchen Syſtem kamen die Franzöſiſche empor, unter welchen das Paganiſche *Fig.* 110. eines der erſten war. In dieſem ſind die Flanken auf die Defenslinie perpendicular gezogen, wodurch der Fehler im Holländiſchen Syſtem vermieden iſt; zweytens hat die Perpendicularlinie, welche das äuſſere Polygon in zween gleiche Theile theilet, und die beede einander durchſchneidende Defenslinien beſtimmt, in allen Vierecken einerley Gröſſe, nemlich 15 Toiſen. Drittens die Flanken ſelbſt ſind zurück gezogen, und zwey- bis dreyfach angelegt, auch von dem ſogenannten Orillon, das die Helfte der Flankenſeite iſt, bedeckt; viertens haben die Baſtionen über dem Graben eine Einkleidung, (fr. Contregarde), welche mit den Facen parallel gezogen werden.

§. 829. Zuſatz. Allein auch dieſes Syſtem hat ſeine Fehler; denn die Flanken, wovon doch die Hauptvertheidigung abhangt, ſind zu klein, weil die Orillon die Helfte davon wegnehmen; und durch die Vervielfältigung der hinter einander gelegten Flanken wird der Wallgang zu enge; auch ſind die

Con-

Contregarden zu groß, und können dem Feind, wenn er ſich einmal davon Meiſter gemacht hat, zu einer Batterie gegen die Veſtung dienen.

§. 830. **Erklär.** Aus dieſem Grunde hat man das Blondelliſche Syſtem dieſem vorgezogen. Sein Hauptcharacter beſteht darinn, daß man vor allen Dingen den kleinen Winkel (angle diminué) beſtimmt, welcher in dieſem Syſtem bey allen Polygonen beſtändig iſt, nemlich $45° - \frac{1}{3}$ vom Centriwinkel. Der Centriwinkel wird aus geom. Gr. gefunden, wenn das Polygon gegeben iſt. Zweytens wird das Orillon ungleich kleiner als im Paganiſchen Syſtem, nemlich 3 bis 4 Toiſen; die Flanken ſelbſt werden auch verdoppelt, und perpendicular auf die Defenslinie geſezt; drittens ſind die Contregarden hie gleichfalls angebracht, aber ungleich kleiner; im Graben der ſehr breit iſt, wird noch ein kleiner Graben in deſſen Mitten (fr. un Cunette) angelegt. Innerhalb der Baſtion findet ein Cuvallier Platz, worauf man 10 bis 12 Canonen pflanzen kann.

§. 831. **Zuſatz.** Weil in dieſem Syſtem alles auf den kleinen Winkel (angle diminué) ankommt, ſo wollen wir ſolchen für die Vielecke vom VI Eck bis aufs XII Eck hieher ſetzen; überhaupt, wenn der Centriwinkel $= a$, ſo iſt der kleine Winkel $=$
$45° - \frac{a}{3}$;

alſo im VI Eck $= 25°$	im X Eck $= 33°$
im VII Eck $= 28°$	im XI Eck $= 34\frac{1}{3}°$
im VIII Eck $= 30°$	
im IX Eck $= 31\frac{2}{3}°$	im XII Eck $= 35°$

§. 832. **Zuſatz.** Doch hat dieſes Syſtem die Fehler des vorigen nicht ſonderlich verbeſſert; denn die Polygone müßten viele Ecke haben, wenn man ſie

beveſtigen will; die 4, 5, 6, 7 Ecke laſſen ſich nicht beveſtigen, weil die Kehlen dabey zu eng werden, wenn man alle Regeln des Blondeliſchen und Paganiſchen Syſtems befolgen will; je mehr Eck aber das Polygon hat, deſto koſtbarer iſt die Beveſtigung, und deſto gröſſer wird die Veſtung; dahero man auch deſto mehr Mannſchaft dazu nöthig hat. Es iſt eben nicht gut, wenn man eine halbe Armee in eine Veſtung legen muß, mit der man in freyem Felde mehr ausrichten könnte

§. 833. **Erklär.** Aus dieſem Grunde hat der Marſchall von **Vauban** zwo andere Manieren angegeben, nach welchen verſchiedene Plätze wirklich beveſtiget ſind. Das erſte Syſtem zeigt die 115 *Fig.* die Kennzeichen ſind folgende: Man theilt das äuſſere Polygon in 6 gleiche Theile; zween davon geben den Perpendikel in der Mitte, durch deſſen Extremität die beeden Defenslinien beſtimmt werden; die Facen bekommen $\frac{2}{7}$ des äuſſern Polygons; die Diſtanz der Schulterwinkel, oder der Extremitäten der beeden Facen beſtimmt die Länge der Flanken; das Orillon bekommt 5 bis 6 Toiſen und wird convex, die Flanke aber concav; vor der Courtine wird eine einfache Tenaille angebracht, welche durch die einander durchkreutzende zwo Defenslinien beſtimmt wird; vor die groſſe Graben kommt das Ravelin, welches zu beeden Seiten Brillen, auch oben noch eine kleinere Brillen hat; auf dem bedeckten Weg werden Traverſen und Waſenplätze angebracht.

§. 834. **Zuſatz.** An dieſem Syſtem ſetzte man aus, daß die Brillen zur Seiten des Ravelins zu groß, und dem Feind zu Batterien gegen die Veſtung

ſtung dienen könnten, und daß die Batterien ſelbſt zu ſehr entblößt ſeyen.

§. 835. Erklär. Herr von Vauban gab dieſer Einwendung Gehör, und dachte auf ſein zweytes Syſtem, welches *Fig.* 116 vorgeſtellt wird; Sein Hauptcharakter, wodurch es vom vorigen unterſchieden wird, beſteht darinn, daß es doppelte oder abgeſonderte Baſtionen, nemlich äuſſere, die Vauban *Revetemens* nennt, und innere hat; die innere Baſtionen werden durch parallel Defenslinien von den äuſſern in der Weite von vier bis fünf Toiſen beſtimmt; die Brillen ſind weggelaſſen, an deren ſtatt vor dem groſſen Graben ein doppeltes Ravelin iſt.

§. 836. Zuſatz. Man hat auch hie eingewendet, die abgeſonderte (detachirte) Baſtionen und das doppelte Ravelin ſeyen zu groß, und können dem Feind zu Batterien dienen; allein Vauban antwortete, wenn die Baſtion verlohren, ſo ſeye ohnehin die ganze Veſtung verlohren; in ſeinem zweyten Syſtem aber würde der Feind doch durch die abgeſonderte kleine Baſtion noch einige Tage aufgehalten.

§. 837. Anm. Man hat noch verſchiedene Syſteme, welche alle nur zu nennen, ſchon viel zu weitläuftig wäre; inzwiſchen kann man unter den Franzöſiſchen auch das Belidoriſche behalten, in welchen ſtatt der Tenaille ſogenannte Widderhörner (Cornes de Belier) um die Enfiladen zu verhindern, angebracht ſind. Unter den Deutſchen aber iſt das Bilfingeriſche Syſtem noch zu beſchreiben, weil es von allen übrigen zween beſondere Vorzüge hat, die angemerkt zu werden verdienen.

§. 838. Erklär. Das Bilfingeriſche Syſtem, davon die Zeichnung *Fig.* 114. 113. für das Dreyeck, und *Fig.* 117. 118 für das Viereck vorgeſtellt werden, hat folgende zween Hauptcharakte-

re,

re, daß erſtlich nach demſelben Drey- und Vierecke ſo gut oder beſſer als andere Polygonen beveſtiget werden können, da man vorher glaubte, die Drey- und Vierecke dienen nur zu Feldſchanzen und Redouten; zweytens, daß, wenn ſchon eine Baſtion verlohren iſt, deswegen die ganze Veſtung noch nicht verlohren iſt, wie bey allen übrigen Syſtemen; ſondern der Feind muß eine Baſtion nach der andern einnehmen, wenn er Meiſter davon werden will; in welchem Fall, wenn man es aufs äuſſerſte ankommen laſſen will, freylich die Veſtung ſelbſt ein Steinhaufen wird.

§. 839. Lehrſ. Die Art eine Veſtung nach dieſer Manier zu zeichnen iſt nach geom. Gründen leicht.

I. Fall, für das Dreyeck *Fig.* 114.

Man beſchreibt einen Cirkel, und trägt den Radius in der Peripherie ſechsmal herum; in dem Cirkel beſchreibt man zwey gleichſeitige einander durchſchneidende Dreyecke, deren Spitzen an den bezeichneten Punkten der Peripherie ſich endigen werden. Die Seiten desjenigen Dreyecks, das man eigentlich beveſtigen will, theilt man in zween gleiche Theile, und ziehet von den Theilungspunkten die drey Linien in den Mittelpunkt des Cirkels, und mit ſelbigen in der gegebenen Weite zu beeden Seiten Parallellinien, ſo hat man den Grundriß zu Beveſtigung des Dreyecks, und die detachirte Baſtionen fallen von ſelbſt durch die in proportionirter Weite gezogene Parallelen aus; den Graben, den bedekten Weg, das Glacis ziehet man nach *Fig.* 113. wo der äuſſere Umkreiß der Mantel (Manteau) von Hrn geh. Rath Bilſinger genannt wird.

II.

II. Fall, für das Viereck *Fig.* 118.

Man beſchreibt ein Quadrat, und zieht die Diagonallinien, und noch über das durch ihren Durchſchnittspunkt, mit den beeden Seiten des Quadrats Parallellinien; wodurch das groſſe Quadrat in vier kleinere gleiche Quadrate eingetheilt wird, und wegen den Diagonalen, die in gehöriger Weite zu beeden Seiten gezogene Parallelen ſich beſtimmen laſſen; daß der Grundriß, oder nach Hrn Bilſingers Benennung, das Andreascreuz, ſich von ſelbſt gibt, und die abgeſonderte Baſtionen herausfallen; die Beveſtigung ſelbſt wird wie im erſten Fall nach *Fig.* 117. ausgeführt.

§. 840. Zuſatz. So viele Vorzüge dieſes Syſtem hat, welches noch überdas das wohlfeilſte im Bauen iſt, und die wenigſte Mannſchaft zur Beſazung erfordert, ſo hat man doch auch eines und das andere dargegen eingewendet. Inzwiſchen wird, beſonders bey der neuern Artilleriekunſt, und wenn man mit Bombardiren alles zwingen will, kein Syſtem mehr möglich ſeyn, das man vor andern anpreiſen dörfte. Uebrigens ſolle die Citadell in Neiß nach dieſem Bilſingeriſchen Syſtem beveſtiget ſeyn.

Von der irregulairen Beveſtigung.

§. 841. Erkl. und Lehrſ. Wenn man einen irregulairen Platz beveſtigen will, ſo muß man ihn ſo viel möglich zu einem regulairen Vieleck zu machen ſuchen; wie *Fig.* 108. ausweißt. Es ſey der Platz ABCD gegeben; man beſchreibe eine von dem Cirkel nicht viel abweichende Ellipſe ABCDF darum, und ziehe die Polygonen ſo, daß keines über 95 Ruthen

und keines unter 70 Ruthen bekommt, hernach beveſtige man das Polygon, wie in der regulairen Beveſtigung.

§. 842. Zuſatz. Wenn eine Linie allzugroß werden ſollte, wie z. E. *Fig.* 112. die Linie nach DF, ſo ſucht man zweyfache bis dreyfache Abſätze zu den Flanken zu machen, damit die Defenſionslinien ID, und HF zu beyden Seiten richtig von den kleinern Flanken HG und IK beſtrichen werden können.

§. 843. Erkl. Wenn man im Felde eine Beveſtigung in der Schnelle aufführen will, ſo heißt ſolche kleine und nur auf kurze Zeit daurende Beveſtigung eine Redoute oder Schanze; eine dreyeckigte iſt *Fig.* 109. gezeichnet; es gibt aber auch viereckigte Redouten; ferner ſechseckigte, die man Sternſchanzen nennt, u. ſ. w. wo alles nach den Gründen der regulairen Beveſtigung eingerichtet wird, nur daß es nicht ſo dauerhaft werden darf.

§. 844. Erkl. Eine Citadelle iſt eine kleine regulaire Veſtung, insgemein ein Sechseck, das angelegt wird, eine groſſe Stadt theils im Zaum zu halten, theils wenn ſie unbeveſtigt iſt, gegen die nächſte Angriffe zu vertheidigen.

§. 845. Anm. Was die Angriffe (Attaquen) betrift, ſo gehören dieſe zur Kriegskunſt überhaupt, welche ein eigenes Werk erfordern, worinnen man von den Märſchen, Rukmärſchen, Bedeckungen, Ausfällen, Succurſen und von allen in der Kriegsſchule vorzutragenden Wiſſenſchaften Nachricht gibt; man iſt aber, auſſer der Kriegsbaukunſt, nicht gewohnt, ſolche in einem mathematiſchen Lehrbuch auszuführen.

Etwas von der Artillerie.

§. 846. **Erkl.** In der Artillerie gibt man Unterricht vom Gebrauch des Pulvers und der Werkzeuge, die man im Krieg ſowohl als auch bey Luſtfeuerwerken nöthig hat.

§. 847. **Erkl.** Die vornehmſte Werkzeuge, die man im Krieg gebraucht, ſind auſſer dem kleinen Gewöhr, Stücke oder Canonen und Mörſer für die Bomben, welche zuſammen das groſſe Geſchütz heiſſen.

§. 848. **Erkl.** Der Maasſtab in der Artillerie heißt der Caliberſtab, auf welchem die Diameter der Kugeln von verſchiedenen Gewichtern, wie damit geſchoſſen wird, verzeichnet ſind; man bemerkt dabey drey Maaße; erſtlich den Diameter oder Caliber des Stüks, das iſt der Oeffnung, woraus geſchoſſen wird; den Diameter der Kugel, welche daraus geſchoſſen wird; und den Unterſchied beyder Diameter, welche der Spielraum heiſſen.

§. 849. **Erkl.** Wenn man die Weite oder Dicke der Stücke mit ihrer Länge vergleicht, ſo gibt es zweyerley Gattungen; erſtlich Carthaunen, welche ſehr weit aber dabey kurz ſind; zweytens Schlangen, welche lang aber nicht ſo weit ſind.

§. 850. **Erkl.** Der Mörſer iſt ein Inſtrument, daraus man Bomben wirft; die Bomben ſind hohle eiſerne mit Pulver gefüllte Kugeln, die in dem Mundloch eine hölzerne Röhre haben.

§. 851. Die Richtung der Stücke und Mörſer geſchiehet durch meſſingene Cirkel oder Quadranten, die in Grade eingetheilt ſind, auf welche der Bleywurf weißt.

§. 852.

§. 852. Erkl. Der horizontale Schuß heißt der Kernſchuß; alle andere heiſſen Bogenſchüſſe; iſt die Elevation nur ein Grad, ſo heißt er der Viſierſchuß; iſt er 45°, ſo heißt er der Bogenſchuß nach der höchſten Elevation.

§. 853. Erf. Der Kernſchuß einer ganzen Carthaune geht 500 Schritte; und der Bogenſchuß von 45° geht 6000 Schritte weit, ſo hat man auch die Verſuche bey den übrigen gemacht.

§. 854. Anm. Unter die noch mangelnde Sätze der theoretiſchen Artillerie gehört die Beſtimmung der richtigen Länge eines Stüks in ihrer Verhältniß zur Weite, wobey die augenblikliche Entzündung des Pulvers, die Gewalt des Stoſſes, das Reiben in der Höhlung oder Mündung u. ſ. w. in die Rechnung gezogen werden muß; ferner die Beſtimmung der krummen Linie, welche die Kugel nimmt, wenn ſie aus dem Mörſer geworfen oder aus dem Stuk abgeſchoſſen wird; wenn man den Wiederſtand der Luft nicht in Betrachtung ziehen dörfte, ſo würde der Weg der Kugel eine Parabel ſeyn, die durch die Schwere der Kugel gegen die Erde, und durch ihren geradlinigten Schuß beſtimmt würde; weil man aber den Wiederſtand der Luft nicht hintanſetzen darf, ſo begreift man leicht, daß die krumme Linie, welche die Kugel nimmt, von der Parabel ſehr abweichen muß; daher man den Mathematikverſtändigen billigen Dank wiſſen wird, wenn ſie dieſe Linie genau berechnen, und auf einen Schritt den Ort beſtimmen können, wo die Kugel hinfällt, wann ſie unter einer gegebenen Richtung abgeſchoſſen wird. Wer im Kriegsweſen erfahren und bey öffentlichen Feldſchlachten geweſen iſt, wo man heutzutag faſt alles durch das groſſe Geſchütz zu entſcheiden pflegt, wird den Wehrt dieſer Bemühungen ſo gut als die Seefahrer den Wehrt der genauen aſtronomiſchen und geographiſchen Rechnungen zu erkennen und zu ſchätzen wiſſen. Herr Prof. Euler hat theils in ſeiner Mech. L. I. c. 6. theils in Robins erläuterten Artillerie 2 Cap. das zuverläßigſte davon geſagt. Man wird aber immer noch weiter kommen, wenn beſonders diejenige, die mit der Artillerie ſich beſchäftigen, auch mit der höhern Geometrie und Mechanik ſich genauer bekannt machen wollen.

Anhang

Anhang
von der
Naturwiſſenſchaft,
oder
Kurzer Plan
der Naturgeſchichte und der
Experimentalphyſik.

Erſtes Hauptſtück.

Von der Natur-Geſchichte.

Erklärung.

Wenn man die Naturgeſchichte nach ihrem ganzen Umfang nimmt, ſo iſt ſie ein Syſtem aller Beſchreibungen, Erklärungen und Beobachtungen von dem, was ſich in der ganzen Welt unſern Sinnen darſtellt; man kan ſie dahero in die himmliſche und irrdiſche eintheilen, von jener haben wir das nöthigſte in der Aſtronomie geſagt; dahero die irrdiſche hie unſer Augenmerk beſonders ſeyn wird. Auf dem Erdboden trift man nach dem Ausdruck des Herrn von Linnäus Elemente und die aus den Elementen beſtehende Cörper oder Naturalien an; Man könnte alſo die irrdiſche Naturhiſtorie in zween Theilen vortragen, davon der eine von den Naturalien der andere von den Elementen handelt; oder man könnte das Naturalienreich und das Elementenreich zum Gegenſtand der Naturhiſtorie machen. Zu jenem, das mehr in die Sinne fällt, und folglich zu erſt

vorgeleget werden dörfte, gehörten die ſogenannte drey Naturreiche, das Thier-Pflanzen- und Mineralien-Reich, wozu man auch Stein und Erde rechnet. Zu dieſem aber, das Waſſer- Lufft- und Feuerreich. Der erſte Theil iſt mehr ausgearbeitet; es würde aber eine eben ſo löbliche und gemeinnützige Bemühung der Gelehrten ſeyn, wenn ſie das Elementenreich auf eine ähnliche Weiſe beſchreiben wollten; Börhave hat einen guten Anfang darzu gemacht, Wallerius hat vom Waſſer insbeſondere gehandelt, in ſeiner Hydrologie; Denſo von dem Feuer; die Lufft hat außer dem was in der angewandten Mathematick und in der Phyſick davon geſagt wird, noch keinen eigenen Commentator in der Naturhiſtorie bekommen, ſo viel uns bekannt iſt.

Anm. Unerachtet wir übrigens hier nur einen kurtzen Plan der Naturgeſchichte anzeigen, ſo wollen wir doch auch melden, was zu einer vollſtändigen Einleitung in die Naturwiſſenſchaft gehöre, welches wir mit den Worten des Hrn. Linnäus am beſten ſagen können. Es kommet dabey an, auf die Nahmen, beſonders auch Lateiniſche und griechiſche, die man erklären muß. Zweytens auf die Theorie nach denen Claſſen, Ordnungen und Gattungen; Drittens auf die natürliche, weſentliche, und künſtliche Charactere der Hauptgattungen, (Generum) Viertens auf die ausführliche Beſchreibung der Arten nach allen ihren Theilen, welche auch in Kupfer vorzuſtellen ſind: Fünftens auf die Umſtände der Zeiten, wenn die Naturalien entſtehen, ihre Vollkommenheit erreichen, und wieder abnehmen u. ſ. w. (tempus productionis, incrementi, vigoris, copulæ, partus, decrementi, interitus) Deß Orts, wo ſie vorzüglich zu finden (locus naturalis, Provincia, cum longitudine & latitudine loci; Clima, ſolum) Sechstens auf ihren Nutzen und Gebrauch in der Oeconomie, in der Diätetik, in der Phyſik, in der Chemie, in der Artzney-

wiſſen-

wiſſenſchaft bey Kranckheiten beſonders. Endlich ſiebendens auf die gelehrte Hiſtorie der Naturalien, z. E. wer dieſe oder jene Naturalien zuerſt entdeckt, was man für hiſtoriſche Traditionen davon habe, u. ſ. w. Dieß aber gehört wie gemeldt in eine vollſtändige Einleitung die uns bißher in Ruckſicht auf das Ganze noch fehlt. Dieſes vorausgeſetzt wollen wir von dem Naturalien-Reich in Anſehung der Thiere, Pflantzen und Foßilien in einem kurtzen Plan nur das allernöthigſte ſagen.

Das Naturalienreich und zwar erſtlich das Thierreich.
(regnum Animale.)

Zum Naturalienreich werden Steine, Pflanzen und Thiere gerechnet, weil ſie alle drey miteinander in gewißen Stücken übereinkommen; dann die Steine wachſen, die Pflanzen wachſen und leben, die Thiere wachſen, leben und empfinden; wie ſich Herr von Linnäus ausdruckt.

Was nun die Thiere insbeſondere betrifft ſo werden ſie in ſechs Claßen eingetheilt; dann ſie ſind entweder vierfüßige Thiere (quadrupedia) dahero die Tetrapodologie, oder Vögel (aves) dahero die Ornithologie, oder zu Waſſer und zu Land lebende Thiere, (Amphibia) oder Fiſche (Piſces) daher die Ichtyologie, oder Inſecten, oder Würmer (Vermes.) Dieſe ſechs Claßen machen das Thierreich aus, welches auch die Zoologie heiſſet.

Die vierfüßige Thiere, wohin auch der Menſch als der Herr der Thiere gerechnet wird, werden in Arten und Gattungen einge-

theilt, deren Unterſchied von den Zähnen hergenommen wird. Denn entweder haben ſie Tab. XIII. Fig. 1. vier vordere Zähne (dentes primores inciſores) wie der Menſch und Menſchen ähnliche Thiere, oder ſechs vordere Zähne wie die Raubthiere, (Fig. 2.) oder gar keine Zähne, (Fig. 3.) hingegen eine deſto längere cylindriſche Zunge wie der Ameißenbär, (Agriæ) oder nur zwey vordere Zähne, (Fig. 4.) wie die rattenartige Thiere, (Glires) oder nur oben keine Vorderzähne, (Fig. 5.) hingegen unten ſechs biß acht wie die wiederkauende Thiere, (Pecora) oder endlich anomaliſche Zähne, (Fig, 6.) die von allen bißherigen Arten durch ihre Anomalie unterſchieden ſind, wie die Thiere mit Pferdgebiß. (Iumenta.)

Dieſen Unterſchied von den Zähnen hergenommen hat beſonders Herr von Linnäus bemerkt; und da ſein Syſtem eines der neueſten iſt, ſo haben wir hie ſelbigen folgen wollen, obſchon bekanntermaſſen das Linnäiſche Pflanzenſyſtem nur das vorzüglichſte iſt.

Bey den Vögeln iſt der Unterſchied der Arten von den Schnäbeln hergenommen, dann entweder haben ſie einen hackigten eingebogenen Schnabel (roſtrum uncinatum) wie die Raubvögel, (Accipitres) oder ſie haben einen oben erhabenen oder convexen Schnabel, (Roſtrum convexum, compreſſum,) wie die

Spechte

Spechtartige Vögel, (Picæ,) oder ſie haben einen Sägformigen Schnabel (dentato-ſerratum) wie die Schwimm-Vögel, anſeres, oder einen cylindriſchen langen Schnabel, (cylindricum, teretiuſculum) wie Stachelſchnäbel, (Scolopaces) oder ſie haben einen coniſchen, kegelförmigen etwas eingebogenen Schnabel (conico-incurvum) wie die Hüner-artige, (Gallinæ,) oder ſie haben einen coniſch-kegelformig ſich zuſpizenden Schnabel, (conico attenuatum) wie die Sperlingsartige. (Paſſeres.)

Die Amphibia machen nur zwo Arten, die man an den Füſſen kennt; dann entweder haben ſie keine Füſſe, wie die Schlangenartige (ſerpentia,) oder ſie haben vier Füſſe und heiſſen kriechende Amphibia, (Reptilia) wie die Eydexen, Drachen ꝛc.

Die Fiſche werden nach den Schwänzen, Floßfedern und Ohren nach ihren Aten unterſchieden, welchen Unterſchied Herr Pet. Artede ein Schwede angemerkt, nach dem Herr Linnäus ſich deßfalls in ſeinem Syſtem richtet; ihm zu Folge haben die Fiſche erſtlich Plattſchwänze und heiſſen Plagiuri, wie das Wallfiſchgeſchlecht, oder in Ruckſicht auf die Floßfedern haben ſie Knorpelfloßfedern und heiſſen Chondropterygi, oder ſie haben Beinohren, und heiſſen Branchioſtegi, oder ſie haben ſpitzige Floßfedern, und heiſſen Acan-

thopterygii, oder ſie haben weiche Floßfedern, und heiſſen Malacopterygii.

Die Inſecten kennt man an den Flügeln, und Flügeldecken; dann entweder haben ſie ganze Flügeldecken, (Coleoptera,) wie die Käfer; oder halbe Flügeldecken (hemiptera,) wie die Baumwanzen, oder ſie haben vier adrigte Flügel, (Neuroptera,) oder ſie haben vier Schmetterlingsflügel, (Lepidoptera,) wie die Tag- und Nachtvögel (Papiliones & Phalænæ;) oder ſie haben vier Membraneſe Flügel, (Hymenoptera,) wie die Bienen; oder ſie haben nur zween Flügel, (Diptera,) wie die Mücken; oder ſie haben keinen Flügel, (Aptera,) wie die Spinnen ꝛc.

Die Gewürme theilen ſich in vier Claſſen; die erſte enthält die kriechende Reptilia, die zweyte die pflanzenartige Zoophyta, die dritte die ſchaaligte Gewürme Testacea z. E. Schnecken, die vierte Corallengewächſe, (Lithophyta.)

Anm. Was die Inſecten und Gewürme betrifft, welche manche ihrer Aufmerkſamkeit nicht würdigen, ſo kan man dieſes Vorurtheil am beſten heben, wenn wir von dem Schaden, Nutzen, und Vergnügen das ſie verurſachen, etwas melden. Der Schaden iſt bekannt genug; Mücken, Spinnen, Scorpion, Flöhe, Läuße geben einen allgemeinen Beweiß davon. Aber noch kleinere und dem Auge kaum ſichtbare Inſecten richten noch gröſſern Schaden an. Die Acari, die allerkleinſte Würmer, die ſich in dem menſchlichen Cörper aufhalten, und eine Demüthigung für die Aerzte ſind, weil ſie ſolche mit aller Kunſt nicht ausrotten können, verurſachen mehrmalen die gefährlichſte Ausſchläge, (Exanthemata.) So vielen Schaden aber die Inſecten und Gewürme verurſachen, ſo haben ſie doch auf der andern Seite

auch

auch ihren Nutzen; hieher gehören der Gebrauch der Coccinellen, Kermes, Cocus u. ſ. w. in der Färberkunſt, der Cantharides in der Chirurgie, der Seidenwürmer in Verfertigung der Kleidung, der Bienen und ihres Honigs in der Oeconomie u. ſ. w. Was endlich das Vergnügen betrifft, ſo wollen wir mit den Worten des Herrn Linnäus aus ſeiner Rede de proprietatibus Inſectorum nun folgendes anführen. Inſectorum proprietates qui conſiderare velit curioſus ſcrutator, vix ullibi majori afficietur voluptate: Examina modo roſtrum Curculionis, cornua Lucani, Antennas Cerambycis, (welcher Tab. XIV. als das erſte von den Coleoptris geſtochene Inſect vorgeſtellt wird.) Articulos Meloes, alas Forficulæ, plumas Papilionis, Oculos Tubani, Ventriculum Ricini, aquleum crabronis, colorem Cantharidis, elaſticitatem elateris, Stridorem Grylli, odorem cimicis, Exilitatem Acari, Coitum Libellullæ, Nidum Ichnevmonis, favos apum, hibernaculum Oeſtri, ædificium Veſpæ, teſtam eremitæ, vitam Ephemeræ, acervum formicæ, foveam Formicaleonis, telam araneæ, Nata, tum Monoculi, curſum Gyrini aqu. Phoſphorum Lampyridis, ſcintillas ſcolopendræ, Renovationem Cancri, Motum ſpiralem Erucæ ex muſca cærulea provenientis, vitam fere indeſtructibilem Erucæ aquaticæ Tubani & metamorphoſes ſic dictas fere omnium inſectorum &c. Man kann hieher auch, wenn man die Sachen gemahlt ſehen will, die Ledermülleriſche, Roeſeliſche und andere Sammlungen von Inſectenbeluſtigungen rechnen. In Rückſicht auf die Vögel iſt die Friſchiſche Sammlung vorzüglich zu melden welche beſonders die Innländiſchen oder deutſchen Vögel in Kupfer geſtochen vorſtellt. Unter den Alten iſt die Johnſtoniſche Sammlung vom Thierreich nach allen Hauptclaſſen auch nicht zu vergeſſen.

In Abſicht auf das Thierreich, ſo betrachtet man

a. die vierfüßige Thiere. (quadrupedia.)
b. die Vögel. (aves.)

 c. die

c. die Fiſche. (piſces.)
d. die zu Waſſer und Land lebende Thiere. (amphibia.)
e. die Inſecten mit und ohne Flügel. (inſecta.)
f. die Gewürme. (vermes.)

Die erſte Hauptclaſſe der vierfüßigen Thiere, welche alleſamt in ſechs Gattugen eingetheilt werden und zwar nach ihren Zähnen dann entweder haben ſie

1. oben und unten vier gleiche Vorderzähne (dentes primores) wie der Menſch,
2. haben ſie oben und unten ſechs Vorder-Zähne, wie die wilde Thiere,
3. haben ſie oben und unten nur zwey Vorderzähne, wie die Rattenähnliche Thiere,
4. haben ſie oben keine vordere Zähne wie die Schaafe und Ochſen,
5. haben ſie weder oben noch unten Zähne wie der Ameiſen-Bär,
6. haben ſie anomaliſche Zähne wie das Pferd.

Die erſte Claſſe in Ruckſicht auf die Zähne begreifft unter ſich

a. den Menſchen,
b. den Affen,
c. das Faulthier oder Bradypus.

Zweyte Claſſe iſt die Claſſe der wilden Thiere, unter welche gehört:

a. der Bär,
b. Katzenartige Thiere, (feles,)

dahin

dahin gehören:

1. der Löwe,
2. der Tiger,
3. der Panther,
4. die wilde Katz,
5. die Hauskatze,
6. der Luchs.

c. Alle Arten der Marder (Muſtela.)

1. Hausmarder,
2. Iltis,
3. Wieſelin,
4. der Hermelin,
5. der Zobel,
6. die Biberkatze,

d. alle Gattungen von Hunden, dahin gehören:

1. Haushunde,
2. Jagdhunde,
3. Mopſe, (canis fricatrix,) u. ſ. w.
4. der Wolff, (canis cauda incurva,)
5. der Fuchs, (banis cauda recta,)

e. alle Arten von Daxen, (Meles,) dahin gehören:

1. der gewöhnliche Dax,
2. das Zibeth-Thier,
3. der Egyptiſche Ichnevmon, oder die Pharaoniſche Maus,

f. alle Arten von Igel, (Erinaceus,)

g. die Zottelthiere, (Daſypus,) ſind ausländiſche Thiere,

h. die

h. die Maulwürffe und ihre Arten, (Talpæ,)
i. die Fledermaus, (Veſpertilio,)

Die dritte Claſſe iſt die Claſſe der Rattenartigen Thiere. Hieher gehören:
a. das Stachelſchwein, (Hyſtrix,)
b. das Eichhorn, (Sciurus,)
c. die Haaſen und Caninchen, (Lepores,)
d. der Biber, (Caſtor,)
e. die Mäuſe und Ratten, (Glires & Mures,)
f. die Murmelthiere, (Marmota,)

Die vierte Claſſe begreifft in ſich wiederkauende Thiere. (lat. pecora.) Hieher gehört:
a. das Cameel, (Camelus,)
b. das Moſchus-Thier, (Animal moſchiferum)
c. der Hirſch und das Reh, (Cervus) dahin auch das Elend- und Renn-Thier gehören.
d. alle Arten der Böcke, dahin gehören auch die Gemſen und Steinböcke u. ſ. w.
e. Schaafe und ihre Gattungen, (Oves)
f. Ochſen Boves und Büffel-Ochſen, (Bubali)

Fünffte Claſſe, die weder oben noch unten Zähne haben. (Agriæ.) Dahin gehört:
a. der Ameiſen-Bär, (Myrmecophaga)
b. ein ausländiſch Thier Manis, genannt.

Die ſechſte Claſſe begreifft in ſich Thiere mit Pferdgebiſſen, dergleichen ſind:

a. der

a. der Elephant, (Elephas)
b. das Nashorn, (Rhinoceros)
c. das Meerpferd, (Hippopotamus) (gehört eigentlich zu den Amphibiis)
d. das Pferd und die Eſel, (Equus, aſinus, mulus)
e. das Schwein. (Sus & aper.)

Die zweyte Hauptclaſſe begreifft in ſich die Vögel wovon es ſechs Gattungen giebt, die man an den Schnäbeln unterſcheiden kan:

Die erſte Gattuug, iſt die Gattung der Raubvögel, die einen ganz gebogenen Schnabel haben.

Die zweyte Gattung iſt die Gattung der Spechte, die einen etwas längern aber auch gebogenen Schnabel haben.

Die dritte Gattung iſt die Gattung der Gänſe, deren Schnabel lang und ſägenförmig (ſerratum roſtrum) iſt.

Die vierdte Gattung iſt die Gattung der Stachelſchnäbel, die einen ſpitzigen und langen Schnabel haben.

Die fünffte Gattung iſt die Gattung aller Hüner, und

Die ſechſte Gattung iſt die Gattung der Sperlingsartigen Vögel.

Erſte Gattung der Raubvögel, (Accipitres.) Hieher gehören

a. alle Arten der Uhu. Strix. Dahin auch die Nachteule und das Käutzlein ꝛc. gehören.

b. alle Arten der Falcken, nemlich:
1. gewöhnliche Falcken.
2. Adler.
3. Geyer.
4. Weyhen.
c. Alle Arten der Pappagey. (Pſittacus.)

Zweyte Gattung Spechtartige Vögel, (Lat. picæ.) Dahin gehören

a. alle Arten von Raben (Corvi) nemlich:
1. der gewöhnliche Rab,
2. die Krähe, (Cornix)
3. die Dole, (Monedula)
4. die Elſter, (Picacauta)
b. die Spechte ſelber (Picus) nemlich:
1. der Schwartzſpecht,
2. der Grünſpecht,
3. der Bunteſpecht,
c. der Guckug (Cuculus) u. ſ. Arten,
d. der Widhopff, (Upupa) u. ſ. Arten,
e. der Paradiesvogel, der Romphaſtos aus Braſilien, auch (Buceros,) und die Waſſerraben (Hydrocoraces)

Dritte Gattung iſt die Gattung der Schwimmvögel, (Anſeres) und zwar:

a. die Gänſe überhaupt, (Anas) dahin gehört
1. die gewöhnliche Gans,
2. der Schwan,
3. die Ente,
b. die Taucher und ihre Arten, (Mergus)

c. die

c. die Pelicane und ihre Arten,
d. einige Ausländiſche Thiere dieſer Arten,
1. der Phönixvogel, (Phœnicopterus)
2. die Magellaniſche Gans.

Vierdte Gattung iſt die Gattung der Stachelſchnäbeln, (Scolopaces) dahin gehören
a. die Arten der Storchen, (Ardea) u. Reiger
1. der Grannich, (Grus)
2. der Reiger, (Ardea)
3. der Rohrdommel, (Ardea ſtellaris)
4. der Storch, (Ciconia)
b. die Arten der Schnepffen.

Fünfte Gattung iſt die Gattung der Hüner, dahin gehören
a. der Strauß, (Struthio) u. ſ. Arten,
b. der Pfau, (Pavo)
c. der Welſche Hahn, (Meleagris) und ſeine Arten,
d. der Haushahn, (Gallus & Gallina)
e. der Faſahn, (Phaſianus)
f) der Auerhahn, (Tetrao) u. ſ. Arten,
1. der Auerhahn ſelbſt (Urogallus)
2. Birckhuhn,
3. Haſelhuhn,
4. Rebhuhn, (Perdrix)
5. Wachtelhuhn,

Sechſte Gattung der Sperlingartigen Vögel, (Paſſeres,) dahin gehören
a. die Taube, (Columba)
1. die Haustaube, (Columba domeſtica)

2. Rin-

2. Ringeltaube, (Palumbus)
3. Turteltaube,

b. alle Arten der Amſeln, (Turdus & Merula)

c. der Staar und ſeine Arten, (Sturnus)

d. die Lerche, (Alauda) und ihre Arten,

e. der Finck, (Fringilla) und ſeine Arten. Dahin gehören
1. der Buchfinck,
2. der Diſtelfinck,
3. der Hänffling,
4. der gewöhnliche Sperling, (Paſſer domeſticus)
5. der Canarienvogel,

f) alle Arten der Embrizen, (Emberiza) dahin gehören.
1. Goldammer,
2. Grünfincke,
3. Schneevogel,

g. alle Gattungen der Steltzen, (Motacilla) dahin gehören
1. die Bachſteltze,
2. Rothkehlchen,
3. Zaunkönig,

h. alle Arten der Mayſen, (Parus) z. E.
1. Blaumayſe,
2. Spiegelmayſe,
3. Kohlmayſe,

i. alle Arten der Schwalben, (Hirundo) z. E.

1. die

1. die Hausſchwalbe,
2. Feldſchwalben,
3. Meerſchwalben,

k. das ſogenannte Wettervögelein,

Die dritte Claſſe begreifft in ſich die Fiſche, wovon es fünf Haupt-Gattungen giebt.

1. Plattſchwäntze, (Plagiuri)
2. mit knorplichten Floßfedern, (Chondropterygii,)
3. mit Beinohren, (Branchioſtegi)
4. mit ſpitzigen Floßfedern, (Acanthopterygii)
5. mit weichen Floßfedern, (Malacopterygii)

Erſte Gattung der Plattſchwäntze, dahin gehört das gantze Wallfiſchgeſchlechte,

a. Der Wallfiſch,
b. das Meerſchwein, (Delphinus)
c. die Seekuh,

Zweyte Gattung mit Knorpel-Floßfedern, dahin gehört

a. der Seehund, (Carcarias) auch der Meerfuchs,
b. der Stör,
c. die Lamprette, (Lampetra)
d. die Neunaugen, (Enneophthalmus)

Dritte Gattung der Beinohren, dahin gehören

a. der Meerfroſch und Meerhaſe,
b. der Stachelfiſch, (Hiſtrix)

Vierdte Gattung mit ſpitzigen Floßfedern, dahin gehören

a. alle Arten der Brachsmen, (Sparus)
b. alle Arten der Schleyhen, (Lat. Labrus)
c. der Schwerdfiſch, (Xiphias)

Fünfte Gattung mit weichen Floßfedern, dahin gehören

a. alle Arten der Karpffen und Barben,
b. alle Arten der Weißfiſch und Stockfiſche,
c. alle Arten der Heringe,
d. alle Arten der Lachſen und Forellen,
e. alle Arten der Hechte,
f) alle Arten der Grundeln,
g) alle Arten der Aale.

Die vierdte Claſſe begreift in ſich die zu Waſſer und Landlebende Thiere. Sie theilen ſich ein

1. in Schlangenartige, (Serpentia)
2. in kriechende, (reptilia)

Erſte Gattung der Schlangenartigen, dahin gehören

a. die Schlange ſelbſt,
b. alle Gattungen der Nattern und Vipern, (Coluber & Vipera)
c. die Amphisbalnen und Klapperſchlangen, (ausländiſche)

Zweyte Gattung der kriechenden Reptilia.

a. Drachen,
b. Eidexen, (Lacerta) dahin gehören
   1. Crocodil,
   2. Salamander,
   3. gemeine Eidex,

4. Camæleon,

c. Alle Arten der Fröſche Rana

1. der Waſſerfroſch.

2. der Laubfroſch.

3. die Kröte.

d. Alle Arten der Schildgrotten Teſtudo.

Fünfte Claſſe der Inſecten, deren giebt es ſechſerley Gattungen, dann es ſind

1. Coleoptera mit Flügeldecken, wie alle Käfer.
2. Hemiptera, mit halben Flügeldecken.
3. Nevroptera, mit adrigten Flügeln.
4: Lepidoptera, wie die Schmetterling, Baufälter, Papilionen.
5. Hymenoptera, mit membranoſen Flügeln.
6. Diptera, mit 2 Flügeln.
7. Aptera, ohne Flügel.

Erſte Gattung (Coleoptera) begreifft in ſich:

a. alle Schröter (Scarabæi.)

b. alle Käfer.

c. die Kornwürme (Curculio)

d. die Kochinelle (Coccinella.)

e. alle Schaben und Grillen (Blattæ & Grylli.)

Zweyte Gattung mit halben Flügeldecken, dahin gehören

a. die Heuſchrecken (Cicada.)

b. alle Arten von Wantzen (Cimices.)

c. alle Baumläuſe.

Dritte Gattung, die vier adrigte Flügel haben, dahin gehören

a., die Panorpa. Eine Fliege mit dem Scorpion-Schwantz (Scorpiurus.)

b. Hemerodius, Muſca fœtida u. Chryſops.

c. die Ephemera und Libellula. (Waſſernymphe.)

Vierdte Gattung, der Schmetterling,

a. alle Tagvögel, (Papiliones.)

b. alle Nachtvögel (Phalænæ) dahin auch der Seidenwurm gehört.

Fünffte Gattung Hymenoptera,

a. alle Gattungen der Bienen (apes)

1. Horniſſe (crabro) und Weſpe,

2. die gemeine Bienen (Apis gregaria)

3. die Humeln, (fucus)

b. alle geflügelte Ameiſen, (formica)

Sechſte Gattung Diptera

a. alle Brämſen, (Oeſtrum)

b. alle Mücken. (Muſcæ & culices.)

Siebende Gattung Aptera

a. alle Arten von Läuſen (Pediculi)

b. alle Flöhe (Pulices)

c. alle Gattungen von Spinnen

d. alle Scorpionen

e. alle Arten von Krebſen.

Sechſte Claſſe der Würmer.

Erſte Gattung, kriechendes Gewürm, (reptilia.)

a. der Regenwurm, (Lumbricus)

b. Hi-

b. Hirudo Blutſauger

Zweyte Gattung, pflanzenartige Gewürme (Zoophyta)

a. Limax, (Schnecken ohne Haus)

b. Hydra und Polypi (Vielfuß)

c. Meduſa und Vrtica marina (Seeneſſel)

Dritte Gattung teſtacea dahin gehören:

a. alle Cochleæ (Schnecken mit Häuſern)

b. alle Conchæ (Muſcheln, Auſtern,)

c. alle Gattungen des Nautilus.

Vierte Gattung (Lithophyta) dahin gehören die Madrepora, Millepora und Sertularia.

Das Pflanzenreich (Regnum vegetabile.)

Anm. Da man ſich in Ruckſicht auf das Pflantzenreich vornemlich nach dem Linnäiſchen Syſtem zu richten hat, ſo findet man hier eines Theils die Erklärung von den Haupttheilen der Pflantzen nach Herrn D. Schäffers botaniſcher Einleitung, anderntheils, beſonders die Linnäiſche Claſſification der Pflantzen nach dem Sexualſyſtem, das unter den Neuern das vorzüglichſte und beſte iſt.

Eine Pflanze heiſſet alles dasjenige, was aus der Erde hervorwächſt, ernährt wird, Saamen bringt und endlich ſtirbt.

Einer jeden Pflanze ſind beſtändige und unbeſtändige Theile eigen. Die beſtändige ſind die Wurtzel, (Radix,) nnd der Stammen (Truncus.) Die unbeſtändige ſind das Laub oder Blätter (Folia,) die Blüthe, (Flos,) und die Frucht (Fructus.)

Die **Wurtzel** heißt derjenige Theil der Pflanze, welcher ordentlicher Weiſe in der Erden ſteht, und unter derſelben fortwächſet.

Der Stamm, welcher bey kleinen Pflanzen auch Stiel heißt, entſpringt aus der Wurzel, und breitet ſich oberhalb auf mancherley Weiſe aus.

Das Laub oder die Blätter ſind Fortſäze und Anhänge der Pflanzen, die ſich in die Länge und Breite erſtrecken, und meiſtens grünfärbig ſind.

Die Blätter gehen nach verſchiedenen Betrachtungen ganz ungemein, und dergeſtalt von einander ab, daß kein Blatt dem andern vollkommen gleich kommt, ſo daß es faſt unmöglich iſt, ihre Abweichungen alle zu beſtimmen.

Die **Blume** iſt derjenige hautige Theil der Pflanze, welcher durch ſein zärteres Gebäude, und ſeine Schönheit der Farbe, ſich von den übrigen Theilen unterſcheidet und der Frucht allezeit vorangeht.

Eine jede Blume hat theils weſentliche (eſſentiales) und gewiſſe, theils zufällige (accidentales) und ungewiſſe Theile. Jene ſind die **Staubgefäße** (Stamina) u. **Staubwege** (Piſtilla) dieſe ſind: der **Kelch**, (Calix) die **Blüthe**, (Corolla) die **Frucht**, (Fructus) die **Saftgrube**, (Nectarium.)

Der Kelch iſt die äuſere hautige Blumendecke

decke, welche unmittelbar, oder vermittelſt der Blüthe, die Staubgefäße und Staubweege umgiebt, und in ſich faßt.

Betrachtet man den Bau des Kelchs, ſo beſteht ſolcher entweder aus einem einzigen Blatte, oder aus mehreren zugleich. Iſt das erſtere, ſo heißt er Einblätterig (monophyllus) und zwar nach ſeinen Einſchnitten, (inciſuræ,) entweder 2. 3. vielſpaltig (bi-tri-multifidus) oder 2. 3. vielzähnig (bi-tri-multidentatus.) Iſt das letztere, ſo heißt er entweder nach der Geſtalt und Lage der Blätter: Ziegelförmig, (inbricatus) ſchuppenförmig, (ſquamoſus) oder nach der Anzahl der Blätter, 2. 3. 4. vielblätterig, (bi-tri-tetra-polyphyllus.)

Die Blüthe, welche ſonſt auch der Blumenkranz genennt wird iſt die innere häutige Blumendecke, welche ſich insgemein durch die Schöne, und von dem Kelche verſchiedene Farben merklich unterſcheidet.

Die Saftgrube iſt derjenig honigreiche Theil der Blume, welcher ſich entweder in eigenen von den Blumen abgeſonderten Blättern befindet; u. zum Unterſcheid die Safthonigblätter petala nectariſera, oder an den ordentlichen Blumenblättern bald eine Grube fovea bald eine Drüße Glandula, bald etwas anders vorſtellt.

Nun kommen wir dem Linnäiſchen Syſtem näher und betrachten die Staubgefäſſe und

Staubwege, welche beſonders in Ruckſicht auf das Sexualſyſtem die weſentlichſte Theile ſind.

Die Staubgefäſſe ſind die innere Theile der Blume welche die Staubwege umgeben. Sie beſtehen aus den Staubfäden (filamenta) und aus den Staubfachen, (antheræ.)

Die Staubfache ſizen oben auf den Staubfäden, und enthalten denjenigen männlichen Saamen, der, wann er zu ſeiner Reife gelanget iſt, aus und von ihnen ſtaubet. Sie heiſſen ſonſt auch die Spitzen, (Apices) die Häuptlein (Capitula) die Hoden, (Teſticuli) die Körnlein, (Granula)

Es ſind dieſe Staubfache bey verſchiedenen Blumen verſchiedener Art. Der Anzahl nach ſind ihrer entweder eben ſo viele (pares) oder mehr und weniger plures, pauciores, als der Staubfäden. Den Fachen (Loculamenta) nach ſind ſie 2. 3. 4. vielfach bi-tri-quadri-multiloculares. Dem Baue nach ſind ſie einfach und (ſimplices) einzel vor ſich (diſtinctæ,) oder zuſammen gewachſen. (coalitæ) Der Geſtalt nach ſind ſie länglecht (oblongæ) kugel= (Globoſæ) und pfeilenförmig (ſagittatæ.)

Die Staubfäden tragen und ſtützen die Staubfache. Manchmal fehlen ſie oder ſind doch ſo klein, daß ſie gänzlich zu fehlen ſcheinen, alsdann werden an ihrer Statt die Staubfache gerechnet. Auch

Auch die Staubfäden haben ihren mannigfaltigen Bau und ihre beſondere Benennung, der Anzahl nach giebt es derer von einem biß auf 10. 20. und mehrere.

Die Staubwege, welche zuſammengenommen auch der Stempel (Piſtillum) heiſſen, ſind diejenige Theile der Blumen welche ganz in der Mitte ſtehen, von den Staubgefäſſen umgeben ſind, und aus dem Eyerſtock (ovarium) dem Grifel (tuba, ſtylus) und der Spitze (apex) beſtehen.

Der Eyerſtock iſt der unterſte Theil der Staubwege, welcher die erſte Grundlage der Frucht oder den Saamen enthält.

Der Griffel, welcher auch der Stil, die Säule (Columna) der Staubgang genennt wird, ſtehet allezeit auf dem Eyerſtock, in welche derſelbe ſich erhöhet und auslauft.

Die Spitze iſt der gantz oberſte theil des Griffels in welchen derſelbe ſich endet, und den männlichen Saamenſtaub auffängt.

Die Frucht folget auf die Blüthe und iſt der ausgedehnte Eyerſtock. Sie beſtehet aus dem Saamenbehältniß (Pericarpium) und aus dem Saamen (Semen) ſelbſt.

An dem Saamenbehältniß bemerkt man 3. beſondere Stücke. Die äußere Decke, welche auf mancherley Weiſe ſich auseinander begibt, heißt die Klappe, (valva, valvula,) dieſe leere Höhlung aber ſo vor den Saamen be-

ſtimmt iſt, werden Fächer genannt, (loculus.)

Der Saame macht das Weſen der Frucht aus, und faßt die Grundlagen der neuen Frucht in ſich.

Anm. Da ſich unter den Pflanzen eine gewiſſe Uebereinſtimmung und Abweichung befindet; ſo hat dieſes den Kräuterlehrern Anlaß gegeben, ſie in gewiſſe Ordnungen (Genera) abzutheilen, und nach Maßgabe derſelbe eigene Lehrarten aufzurichten; die drey vornehmſte ſind das Tournefortiſche, das Riviniſche und das Linnäiſche Syſtem, welchem letztern Herr von Haller, Herr Prof. Ludwig, Herr Prof. Gmelin, drey groſſe Kenner des Pflanzenreichs nebſt andern den Vorzug geben.

Anm. In dem Riviniſchen Syſtem wird die äuſſere Beſchaffenheit der Blumen angenommen; da eine Blume entweder Decken hat oder nicht; ferner mit Staubgefäſſen verſehen, in welchem Fall ſie (Flos perfectus) heißt, oder deſſelben beraubt, (Flos relativus) jene hat entweder Blätter oder nicht u. ſ. w. Doch iſt das dritte Syſtem, nemlich das Linnaiſche, das vornehmſte davon wir jetzo das nöthigſte noch ſagen.

Das Linnäiſche Lehrgebäude legt die Staubgefäße (Stamina) und die Staubwege (Piſtilla) zum Grund. Und weil man aus unzähligen Beobachtungen und Erfahrungen überzeugt worden iſt, daß vermittelſt der Staubgefäße und Staubwege eben ſo etwas vorgehet, wozu die männliche und weibliche Zeugungs-Glieder ſonſt beſtimmt ſind, ſo werden die Staubgefäſſe und Staubwege das Geſchlecht Sexus, und dieſes darauf ſich gründende Lehrgebäude das Geſchlecht-Gebäude Syſtema Sexuale genannt.

Die Staubgefäße und Staubwege befinden ſich entweder in ſichtbaren, (viſibiles,) oder an

faſt unſichtbaren (vix viſibiles) Blumen. Von den leztern handelt die XXIV, Claſſe, welche die verborgen Ehige (Cryptogamia) genennet wird, weil die Zeuguns-Glieder ſowohl, als andere damit verknüpfte Umſtände, noch nicht haben können deuttich gemacht werden, wie Tab. XIV. Fig. 24.

Die Staubgefäſſe und Staubwege ſind in den ſichtbaren Blumen nicht einerley, ſondern von verſchiedener Art und Beſchaffenheit. Sie gehen inſonderheit auf eine vierfache Weiſe voneinander ab. In Anſehung der Blume, des Zuſammenhangs, des Verhältniſſes und der Anzahl.

In Anſehung der Blume befinden ſich entweder die Staubgefäſſe und Staubwege in einer und eben derſelben Blume oder man findet die Staubgefäſſe in der einen und die Staubwege in der andern, von jener abgeſonderten Blume.

Wann beyde die Staubgefäſſe und Staubwege in einer Blume ſich befinden, ſo ſind die Staubfaden in Anſehung des Zuſammenhangs entweder gantz und gar nicht oder an einem gewiſſen Theile zuſammen gewachſen.

Sind die Staubgefäſſe nicht zuſammen gewachſen, ſo ſind ſie entweder von einer unbeſtimmten oder beſtimmten Länge.

Wann die Staubgefäſſe eine unbeſtimmte Länge haben, ſo findet man der Anzahl nach

nur

nur ein Staubgefäß, oder deren oft mehr als zwölfe, und zwar ſind ſie im leztenFall entweder dem Kelche angewachſen und ihrer insgemein zwanzig, oder ſind ſie dem Kelche nicht angewachſen, und mehr als zwanzig. Davon ſind dieſe Claſſen entſtanden. Einmännige Monandria, Cl. I. zweymännige Diandria Cl. II. Dreymännige Triandria Cl. III. viermännige Tetrandria Cl. IV. und ſo weiter biß auf zwölfmännige Dodecandria, und zwanzigmännige Icoſandria, und vielmännige Polyandria Cl. XIII.

Was Linnäus männige heißt, das nennen andere fädig anthera, einfädig, dreyfädig ꝛc. (monanthera, dianthera &c.)

Wann die Staubgefäße eine beſtimmte Länge haben, ſo ſind ſie einander ungleich: Und zwar ſind entweder zwey oder vier länger als die übrige. Iſt das erſtere, ſo entſtehet die XIV. Claß, und heißt doppeltmächtige (Didynamiæ) findet ſich das leztere, ſo entſteht die XV. Claß, welche die vierfachmächtige (Tetradynamia) genennet wird Tab. XIV.

Wann die Staubgefäße zuſammen gewachſen ſind, ſo findet man ſolches entweder an den Fäden (Filamentis) oder an den Fachen (Antheris) oder es ſind die Staubgefäße den Staubwegen angewachſen.

Sind die Fäden zuſammgewachſen, ſo ſind ſie ſolches entweder nur einfach, oder zweyfach

oder

oder vielfach, die einfach zuſammen gewachſene machen die XVI. Claße, und heißt die Einbrüdrige (monadelphia.) Die zweyfach zuſammen gewachſene machen die XVII. Claße, und heißt die zweybrüderige. Die vielfach zuſammengewachſene machen die XVIII. Claße und heißt die vielbrüderige (polyadelphia.)

Wann die Staubfache alſo zuſammengewachſen ſind, daß ſie eine Röhre machen ſo entſtehet die XIX. Claß, welche die gemeinſchafftliche Syngeneſia genannt werden könnte.

Wann die Staubgefäſſe an den Staubwegen ſitzen, und mit ihnen zuſammengewachſen ſind, ſo entſtehet die XX. Claß welche die Weibermännige heißt Gynandria.

Sind die Staubgefäße und Staubwege in von einander abgeſonderten Blumen, ſo befinden ſich ſolche entweder beyde an einer Pflanze, oder ſo wol in einer als auch in verſchiedenen Blumen. Im 1ſten Fall entſteht die XXI. Claſſe, welche die einhäußige (monœcia) heißt, im andern Fall die XXII. Claß welche die zweyhäußige diœceſia heißt; im 3ten Fall die XXIII. Claſſe, welche die vielehige (Polygamia) heißt.

Die Claſſen von dem Pflanzenreich.

Das Pflanzenreich theilet Herr von Linnäus in 24. Claſſen.

Die Claſſen ſind folgende:

1. Die Monandria, einmännige Pflanzen, die nur einen Mann haben. Man kan ſie erkennen daran, daß ſie nur ein einiges (Stamen) haben.

2. Diandria biß auf Icoſandria, welche von 2. au biß auf 20. Stamina haben, alſo 2. biß 20. Männeriche heiſſen; das geht biß zur 12. Claſſe. Die

13. Claſſe iſt Polyandria, vielmännerige Pflanzen, das iſt, Stamina die von 20. biß 1000. gehen.

14. Claſſe, Didynamia, zweymächtigt Pflanzen. Dieſe haben 4. Stamina, davon je 2. und 2. einander gleich, oder davon das eine paar länger als das andre iſt.

15. Claſſe, Tetradynamia, viermächtige, welche 6. Stamina haben, wovon 4. etwas länger, die 2. äuſſerſte aber etwas kürzer ſind.

16. Claſ

16. Claſſe, Monadelphia; rechte Brüder, wo die Stamina durch Filamenta

17. Claſſe, Diadelphia, halb=Bruder, wo die Stamina in 2. ſolche Cörper durch Filamenta zuſammen wachſen.

18. Claſſe, Polyadelphia, viel=Geſchwiſter, wo die Stamina in 3. oder mehrere Cörper durch die Filamenta zuſammen gewachſen.

19. Claſſe, Syngeneſia, Schwäger, wo die Stamina in einem Cylinder ohne Filamentis zuſammen wachſen.

20. Claſſe, Gynandria, Weibermänner, wo die Stamina aus dem Piſtillo herauswachſen, und kein beſonders Behältniß haben.

21. Claſſe, Monœcia, einhäußigte, wo männliche und weibliche Pflanzen beyſammen ſind und aus einer Wurzel hervorwachſen, doch ſo, daß ſie von einander verſchieden ſind. (in eadem domo ſed non in eodem thalamo.)

22. Claſſe, Diœcia, zweyhäußigte, die aus verſchiedenen Wurzeln hervor wachſen.

23. Claſſe, Polygamia, vielfache Ehen.

24. Cryp-

24. Cryptogamia, heimliche Ehen, Pflanzen, deren Blüthe und Stamina man nicht ſehen kan.

Um einige Erläuterung zu geben, wollen wir nur folgendes mercken, daß z. E. Amomum zur 1. Claſſe, Jasmin, Ehrenpreis, Rosmarin, Salbeyen zur 2ten, Lolium, Gerſten, zur 3ten ꝛc. gehören. Oelmagen gehören zur 13. Claß, Lavander und Yſopen zur 14. Claß, Kohl braſſica & crambe zur 15ten, Erbſen zur 17ten, Diſtel, Carduus, zur 18ten, Violen zur 19ten, Röſſel, zur 21ten, Weiden, (ſalices) zur 22ten, und alle Gattungen von Schwämmen (fungis) zur 24ten.

Die Zeichnungen von dieſen vier und zwanzig Claſſen der Pflanzen findet man auf der zweyten Helfte der XIV. Kupfertafel; wo die ein= zwey= drey= vier= fünfmännige vorgeſtellt werden; ferner die vielmännige, welches die 13. Fig. iſt, hernach in der Ordnung die zweymächtige, viermächtige, rechte Brüder, halb=Brüder, viel-Geſchwiſter, Schwager, Weibermänner, Einhäußige, Zweyhäußige, vielfache Ehe, heimliche Ehe.

Von dem Foßilien-Reich,
oder
die Oryctologie.

Welche drey Claſſen in ſich begreifft, nemlich

a. Fels-Steine, petras, (lapides ſimplices,
b. Minern, mineras, (lapides compoſitos)
c. Die eigentliche Foßilien, (lapides aggregatos.)

Die erſte Claße,

Der Fels-Steine, begreifft drey Gattungen in ſich, die

1. Gattung begreift diejenige, die im Feuer zu Glaß werden, (vitreſcentes.)
2. begreifft die Kalck-Steine, die durch Feuer in Mehl oder Pulver ſich verwandlen, (calcarei lapides)
3. die unveränderlichen Steine, die im Feuer unveränderlich bleiben, (apyri)

Erſte Gattung,

Glaßartige Steine, vitreſcentes ſind

1. alle Arten der Sand-Steine (cos) dahin gehören Schleifſtein, Werckſtein, Mühlſtein 2c.
2. alle Quartz-Steine (Quartzum) dahin gehören alle Kieſel, und alle unächte Edelſteine, 2c.

3. alle Feuerſteine (Silices) wohin auch die geringere Edelſteine gerechnet werden z. E. Achat, Carniol, Onyx.

Zweyte Gattung

Kalckſteine, dahin gehören

1. Alle Gattungen von Marmor und Alabaſter.
2. alle Gattungen von Spath, (Spatum)
3. alle Gattungen von Schiefer (Schiſtus) wohin auch Rödel und ſchwarze Kreide gehört.

Dritte Gattung.

Apyri, oder Feuer-beſtändige Steine, dahin gehören

1. alle Arten von Glimmern (Mica) z. E. Marien-Glaß.
2. alle Gattungen von Talck (Talcum) z. E. Serpentin-Stein.
3. alle Gattungen von Amiant (Amiantus)
4. alle Gattungen vom Aſbeſt (Asbeſtus)

Die zweyte Claße.

Begreifft in ſich die Mineras, davon es 3. Gattungen gibt

a. Salia, Salz.
b. Sulphura, Schwefel.
c. Mercurialia, Queckſilber.

Erſte Gattung.

Die Salia laſſen ſich im Waſſer auflöſen, dahin gehört

1. Kalck-Salz (Natrum) wohin auch das Maur-Salz und Purgir-Salz gehört.
2. Selenites, eine Cryſtall-Art.
3. Nitrum, oder Salpeter.
4. alles Koch-Salz (Muria)
5. alle Gattungen von Alaun (Alumen)
6. alle Gattungen von Vitriol z. E. Eiſen-Vitriol, Kupferwaſſer ꝛc.

Zweyte Gattung.

Die Sulphura oder Schwefel, die im Feuer ſich auflöſen laſſen, und einen Rauch geben, dahin gehören

1. Bernſtein und Agſtein d. i. alle Gattungen vom Electro.
2. Berg-Pech (Bitumen) wohin auch die Steinkohlen gehören.
3. Kieß (Pyrites) z. E. Operment, Kupfer-Erz ꝛc.
4. Arſenicum.

Dritte Gattung.

Mercurialia. Dahin gehört

1. Queckſilber und Zinnober.
2. Stibium oder Spießglaß, (Antimonium)
3. Zincum, Zinck.
4. Wißmuth, Vismutum, wohin auch der Kobalt gehört (Cobaltum)
5. Eiſen, Zinn, Kupfer, Silber, Gold, Bley.

Die dritte Claße.

Die eigentliche Foßilien begreiffen drey Gattungen in ſich

1. Concreta, zuſammen gewachſene Steine.
2. Petrificata, verſteinerte Sachen.
3. Erden, Terras.

Erſte Gattung.

Sind die Concreta oder zuſammen gewachſene Steine, dergleichen ſind

1. Saxum, Waacke, mixtum ex heterogeneis particulis.
2. Tophus, Toph-Stein.
3. Stalactites, Tropf-Stein.
4. Pumex, Bimſen-Stein.
5. Aetites, Adler-Stein.
6. Tartarus, Wein-Stein.
7. Calculus, Blaſen-Stein, dahin man auch rechnet

Gallen-Stein Calculus felleus.

Bezoar-Stein calculus gaſtricus ſolidus, tunicatus.

Krebs-Stein auch

Perlen calculus teſtae concharum.

Zweyte Gattung.

Petrificata. Dahin gehören

1. petrificata vermium, helmintholithus, dergleichen ſind
   a. Verſteinerte Corallen.
   b. Muſchel-Stein z. E. cornu Ammonis

2. pe-

2. petrificata inſectorum, Entomolithus, z. E. verſteinerte Krebſe.
3. petrificata piſcium, Ichthyolithus, z. E. Fiſch-Schiefer, Fiſch-Marmor, Zungen-Stein, wann ſich ein Zahn oder überhaupt nur ein Theil von einem Fiſch abdruckt, dahin auch der Krotten-Stein gehört.
4. petrificâta Amphibii, Amphibiolithus welche ungemein rar ſind, z. E. verſteinerte Schlangen, Fröſche ꝛc.
5, petrificata avium, ornitholithus, dahin gehören
   a. petrificirte ganze Vögel, die rar ſind.
   b. petrificirte Theile von Vögel, z. E. Schnäbel, die man in der Schweiß findet,, Federn, Vogel-Neſter ꝛc.
6. petrificata animalium, quadrupedium, Zoolithus, dahin gehören
   1. petrificirte Menſchen, die ungemein rar ſind.
   2. petrificirte Hirſche und andere Thiere, dergleichen man in Geneve gefunden.
   3. petrificirte Knochen, die man in Rußland und Siberien findet.
7. petrificata plantarum, Phytholithus, welches die gemeinſte ſind, z. E.
   1. petrificirte Wurzeln.
   2. Blumen, Blätter, Früchte ꝛc.
8. petrificata picturae ſimilia, graptolithus,

z. E. Landcharten-Steine, dergleichen man in Schonen gefunden, Stern-Steine, auf welchem ſich Sterne abbilden, auch in Schonen, Circul und Punckt-Steine, auf welchem concentriſche Circul und Punkte ſich vorſtellen.

Dritte Gattung.

Iſt die Gattung der Erden, davon die 1ſte Ordnung iſt Mergel, Marga, z. E.

a. Stein-Mergel und
b. Ochern-Mergel.

Mergel iſt überhaupt eine harte Erde, welche der Stein-Art ſehr nahe kommt. Die 2te Ordnung Ochra oder Ochern, iſt die Erde, ſo übrig bleibt, wann die Metalle ſolvirt werden, z. E. Eißen-Ochern, Berg-grün, Bergblau oder Kupfer-Ochern, Bleyweiß, Bley-Ochren u. ſ. w. Die 3te Ordnung iſt die Kreide, welche weiß oder roth-lecht ſeyn kan. Die 4te Ordnung iſt Thon, dahin gehört

1. Porzellan-Thon, argilla calcarea.
2. Töpfer-Thon, argilla teſſelata.
3. Pfeiffen-Thon, argilla nivea.
4. terra ſigillata, wie ſie in der Apotheck heißt, oder argilla ore liqueſcens.
5. argilla ſabuloſa, Leimen.

Die 5te Ordnung iſt Sand. arena,

1. arena ſubfarinacea, reiner Sand.
2. arena quartzoſa, fliegender Sand.

3. arena

3. arena micacea, goldglänzender Sand.
4. arena ferrea, Eiſſen-Sand.
5. arena aurea, Gold-Sand, dergleichen im Fluß Ganges ſich findet.

Die 6te Ordnung iſt Garten-Erde, humus, dergleichen ſind

1. humus lapidea ſchiſti, röthlichte Schiefer-Erde.
2. humus paludoſa, radicibus intertexta, Torf-Erde.
3. humus vegetabilis aquatica, Schlamm, Moraſt.
4. humus vegetabilis communis. Gemeine Garten-Erde, die man auf allen Aeckern, Wieſen und Gärten findet.
5. humus animalium tam brutorum quam humanorum, d. i. Erde von verfaulten Thieren und Menſchen.

Anm. Der Herr Profeſſor Vogel in Göttingen hat eine andere Einrichtung der Oryctologie 1763. bekannt gemacht, und damit auch unſere Leſer von den Vorzügen dieſer Eintheilung urtheilen können, ſo legen wir ihnen hier einen kurzen Abriß vor, der billig verdienet abgedruckt zu werden. Ordo I. Terræ argilloſæ. Gen. I. Argilla vulgaris. Gen. II. Limus.. Gen. III. Argilla fiſtularis. Gen. IV. Argilla Porcellana. Gen. V. Argilla fullonum, Smectis. Gen. VI. Lithomarga. Gen. VII. Tripela. Ordo II. Terræ calcareæ. Gen. I. Creta. Gen. II. Lac lunæ. Gen. III. Calx nativa. Ordo III. Terræ ſiliceæ ſ. arenoſæ. Gen. I. Arena. Ordo IV. Margæ. Gen. I, Marga vulgaris. Gen. II. Marga argilloſa. Gen. III. Marga tubuloſa. Gen. IV. Marga tophacea. Ordo V. Terræ ſeleniticæ. Gen. I. Fa-

rina foſſilis. Gen. II. Terra ſpatoſa gypſea. Gen. III. Nihili album foſſile. Ordo VI. Terræ talcoſæ. Ordo VII. Terræ micaceæ. Gen. I. Mica aurea. Ammochriſos. Gen. II. Mica argentea. Gen. III. Vitrum Moſcowiticum. Gen. IV. Molybdæna. Gen. V. Mica farinoſa. Gen. VI. Mica ferrea. Ordo VIII. Terræ inflammabiles. Gen. I. Sulfur foſſile. Gen. II. Terra ſulfurea. Gen. III. Terra bituminoſa. Gen. IV. Umbra. Ordo IX. Terræ ſalſæ. Gen. I. Terra vitriolica. Gen. II. Terra aluminoſa. Gen. III. Terra nitroſa. Gen. IV. Terra ſalis communis. Ordo X. Terræ metallicæ & ſemimetallicæ. Gen. I. Arena aurea. Gen. II. Minera argenti mollior. Gen. III. Terra plumbaria. Gen. IV Arena ſtanni. Gen. V. Arena ferrea. Gen. VI. Mica ferrea. Gen. VII. Ochra ferri. Gen. VIII. Ochra Cupri. Gen. IX. Viride montanum. Gen. X. Cæruleum montanum. Gen. XI. Cadmia foſſilis. Gen. XII. Terra Cobalti. Gen. XIII. Terra arſenicalis. Gen. XIV. Terra Mercurialis. Ordo XI. Terræ rurales *Humi*. *Lapides*. Ordo I. Lapides argilloſi. Gen. I. Steatites. Gen. II. Lapis nephriticus. Gen. III. Lapis ſerpentinus. Ordo II. Lapides calcarei. Gen. I. Calcareus vulgaris. Gen. II. Lapis ſuillus. Gen. III. Lapis St. Stephani. Gen. IV. Marmor. Gen. V. Lapis Armenius. Ordo III. Lapides margacei. Gen. I. Lithomarga tubuloſa. Gen. II. Margodes dentriticus. Gen. III. Margodes gypſeus. Gen. IV. Margodes tofaceus. Ordo IV. Lapides ſeleniticı, vulgo gypſei. Gen. I. Gypſeus vulgaris. Gen. II. Alabaſtrum. Ordo V. Pyromachi. Cl. I. Arenarius. Gen. I. Arenarius vulgaris. Gen. II. Filtrum. Gen. III. Arenarius fiſſilis. Gen. IV. Arenarius maculatus. Gen. V. Quadrum. Gen. VI. Lapis nannieſtenſis. Cl. II. Silices. Gen. I. Silex arenarius. Gen. II. Silex quarzoſus. Gen. III.

Jaſpis.

Jaſpis. Gen. IV. Silex verus. Gen. V. Silex concretus. Cl. III. Cornei. Gen. I. Corneus vulgaris. Gen. II. Achates. Gen. III. Corneus vitreſcibilis. Cl. IV. Quarzum. Gen. I. Quarzum vulgare. Gen. II. Criſtallus. Gen. III. Quarzum druſicum. Gen. IV. Gemma. Ordo VI. Schiſti. Gen. I. Schiſtus argilloſus. Gen. II. Schiſtus calcareus. Gen. III. Schiſtus metallicus. Gen. IV. Schiſtus aluminoſus. Gen. V. Schiſtus reniformis. Ordo VII. Lapides lamelloſi. Cl. I. Lapides Micacei & Talcitæ. Cl. II. Spata. Gen. I. Spatum calcareum. Gen. II. Spatum ſeleniticum. Gen. III. Lapis Bononienſis. Gen. IV. Spatum metallicum. Ordo VIII. Lapides fibroſi. Gen. I. Calcareus fibroſus. Gen. II. Gypſum fibroſum. Gen. III. Amianthus. Gen. IV. Asbeſtus. Ordo IX. Lapides *Salini*. Gen. I. Lapis atramentarius. Gen. II. Lapis aluminoſus. Gen. III. Sal cæduum. Ordo X. Lapides metallici. Cl. I. Lapides argentiferi. Cl. II. Lapides cupriferi. Cl. III. Lapides plumbiferi. Gen. I. Spatum plumbiferum. Gen. II. Minera plumbi Viridis. Gen. III. Minera plumbi alba Cryſtallina. Gen. IV. Galena mineraliſata. Cl. IV. Lapides martiales. Gen. I. Minera ferri lapidea. Gen. II. Minera ferri alba. Gen. III. Rubrica. Gen. IV. Smiris. Gen. V. Spuma lupi. Gen. VI. Baſaltes. Gen. VII. Magnes. Cl. V. Lapides *Stanniferi*. Cl. VI. Lapides *Zinci*. Gen. I. Spatum Zinci. Gen. II. Pſevdogalena. Gen. III. Lapis calaminaris. Ordo XI. Lapides *Vitreſcibiles*. Gen. I. Pumex. Gen. II. Zeolites Cronſtedt Gen. III. Lapis lazuri. Ordo XII. Petræ. Saxa. Ordo XIII. Pori, Toſi. Gen. I. Tofus vulgaris. Gen. II. Stalactites. Gen. III. Incruſtatum. Ordo XIV. Lapides novi. Turmalinus. Noch erinnern wir, daß der berühmte Herr Verfaſſer die beſte Beſchreibungen jederzeit beygeſetzt, und kurze Tabellen von den bekannteſten Lehrgebäuden der beſten Schriftſteller von den Erden und

Steinen hinzugethan hat. In Diſſert. de terrarum & lapidum Partitione. 1762.

Kurzer Plan von der Elementen Wiſſenſchafft oder Geſchichte, und zwar erſtlich von dem Waſſer, oder die Hydrologie.

In dieſem Plan der Geſchichte der Elementenwiſſenſchafft, oder des Elementenreichs, wie ſie Herr von Linnäus nennt, und die noch von niemand ſo, mie das Naturalienreich ausgearbeitet worden iſt, geben wir deß Herrn Prof. Volz Abriß eines Plans der Naturgeſchichte, der in unſern Nov. Amœnit. literariis Faſc. IV. eingeruckt iſt, und hoffen, fleißige Naturforſcher werden mit der Zeit ſich angelegen ſeyn laſſen, auch dieſe Geſchichte ausführlicher vorzutragen; denn was Herr Wallerius in dem Waſſerreich, oder Herr Denſo in dem Feuerreich geleiſtet haben, ſind bißher doch in Vergleichung mit dem eigentlichen Naturalienreich, nur kurze Abriſſe zu nennen. Dieſes vorausgeſezt handeln wir zu erſt die Hydrologie ab.

Die Hydrologie oder das Waſſerreich kan man unter 2. Haupt-Claſſen bringen. Die I. begreift das gemeine Waſſer die II. das mineral-Waſſer in ſich.

Das

Erſte Claße.

Das gemeine Waſſer hat 2. Gattungen, nehmlich

1. Das in der Lufft erzeugte Waſſer, aquam äeream,
2. Das auf der Erde ſich befindende Waſſer, aquam terreſtrem.

Erſte Gattung.

Das in der Lufft befindliche Waſſer beſtehet

a. aus wircklichem Waſſer, dahin gehört
   1. der Thau, ros.
   2. der Regen, pluvia.
   3. Wolckenbrüche, fractura nubium.

b. aus gefrohrenem Waſſer, dahin gehört
   a. der Reiffe, pruina.
   b. der Hagel, grando.
   c. Schnee, nix.

Zweyte Gattung.

Das auf der Erden befindliche Waſſer begreifft in ſich

1. lebendiges Waſſer, aqua viva dahin gehört
   a. Brunnquellen-Waſſer, aqua fontana.
   b. Schöpf-Brunnen-Waſſer, aqua Putealis.
   c. Fluß-Waſſer, aqua fluvialis.
2. Stillſtehendes Waſſer, aqua ſtagnans, dahin gehört
   1. See-Waſſer, aqua ſtagni.
   2. Sumpf-Waſſer, aqua paludoſa & lacuſtris.

3. Se-

3. Gefrohren Waſſer, glacies, dahin gehört
   1. das Herbſt-Eiß, glacies autumnalis.
   2. Frühlings-Eiß, glacies vernalis.

Zweyte Claße.

Das Mineral-Waſſer hat auch 2. Gattungen, nehmlich

1. das warme,
2. das kalte Mineral-Waſſer.

Erſte Gattung.

Das kalte Mineral-Waſſer, aqua mineralis frigida begreifft in ſich

a. die ſpirituoſe Waſſer, aquas minerales ſpirituoſas, dahin gehören
   1. die vitriol-volatilien,
   2. die alcaliſche-volatilien.

b. Die rohe (crudæ) Mineral-Waſſer, aquas minerales crudas, dahin gehört
   a. Toph-Stein-Waſſer, aqua Tophacia.
   b. Vitriol-Waſſer.
   c. Alaun-Waſſer, aqua aluminoſa.
   d. Alcaliſches-Waſſer, aqua alcalina.
   e. Spieß-Glaß-Waſſer, aqua ammoniacalis.
   f. Harz-Waſſer, aqua bituminoſa.
   g. Schwefel-Waſſer, aqua ſulphurea.
   h. Arſenical-Waſſer, aqua arſenicalis.

c. Die Sauer-Waſſer, aquas acidulares, dahin gehört
   1. Eißen artige Sauerbronnen, acidulæ martiales.

3. Salz-

2. Salzigte Sauerbronnen, acidulæ muriaticæ.
3. Alcaliſche Sauerbronnen, alcalinæ.
4. Vermiſchte oder neutrales acidulæ.

Zweyte Gattung.

Das warme Mineral-Waſſer, aqua mineralis calida, gr. thermæ, begreifft in ſich,

a. einfache warme Waſſer, thermæ ſimplices, die nicht viel mineraliſche Theile haben, und zum theil auch ſpirituos ſeyn können.
b. Vermiſchte warme Waſſer, thermæ minerales compoſitæ, dahin gehören
   a. diejenige, ſo Eißen bey ſich führen, thermæ martiales,
   b. die alcaliſche, alcalinæ.

Etwas
zur Hydrologie von den Säfften,

welche theils natürlich, theils künſtlich ſind, ſucci naturales & artificales,

I. Die natürliche Säffte, begreifen in ſich

a. die Mineral-Säffte, ſucci minerales, dahin gehören
   1. der Vitriol-Geiſt,
   2. Petroleum, Stein-Oehl.
   3. Metallen-Geiſt, ſpiritus metallorum.
b. Die Säffte aus dem Vegetabilienreich, ſucci vegetabiles, dahin gehört
   1. der Honig-Thau, ros melleus.

2. die

2. die Söffte aus Pflanzen, liquores plantarum.
3. Harz, reſina.
4. Campfer, camphora.
5. Gummi.

c. Die Thier-Säffte, ſucci animales, dahin gehört
a. Blut, ſanguis.
b. die wäſſerichte Feuchtigkeit, lympha & humor.
c. Rotz, mucus.
d. Lebensgeiſter, ſpiritus animales.

II. Die künſtliche Säffte begreifen in ſich
1. deſtillirte Waſſer, als Roſenwaſſer ꝛc.
2. alle Arten von Oel, olea,
3. alle Arten von Spiritus, z. E. Weingeiſt, Kirſchengeiſt ꝛc.
4. alle extracte, Extracta, z. E. rectificirte Brandenwein,
5. alle Arten von Liqueurs, liquores.

Kurzer Plan der Aerologie und Meteorologie.

Dabey hat man zu ſehen
1. auf die Lufft an und vor ſich ſelbſten
2. auf die Eigenſchafften der Lufft.

Die Lufft ſelbſten wird betrachtet
a. in ſo fern ſie rein und vor ſich allein iſt aër in Atmosphæra, Lufft oder Dunſt-Kreiß, welcher

1. in

1. in ſeinem Ruhe-Stand oder Gleichgewicht, æquilibrio
2. in der Bewegung betrachtet werden kan, in motu, dahin gehöret vornehmlich der Wind. Die Winde betrachtet man
   a. nach ihrer Währung, ſecundum durationem, und da ſind ſie
      1. allgemeine Winde, univerſales,
      2. jährliche Winde, anniverſarii,
      3. unbeſtändige Winde, vagi.
   b. nach ihrer Richtung, ſecundum directionem, in welchem Fall ſie ſind
      1. Horizontal-Winde, nach den 32. Welt-Gegenden,
      2. ſchiefe Winde, obliqui,
      3. Vertical-Winde, verticales.
   c. nach ihrer Gewalt, oder Geſchwindigkeit, davon gemeiniglich 3. biß 4. Gr. angegeben werden.

b. In ſo fern ſie vermiſcht iſt, (de aëre mixto,) dieſe wird betrachtet
1. in ſo fern ſie in der Atmosphær mit verſchiedenen fremden Theilen ſich vermiſcht befindet z. E.
   a. in Nebel, in nebula
   b. in den Wolcken, in nubibus
   c. überhaupt in verſchiedenen Ausdünſtungen, in vaporibus diverſis.
2. in ſo fern ſie in allen irrdiſchen Cörpern zerſtreuet iſt.

II. Die

II. Die Eigenſchafften der Lufft ſind
1. die Flüßigkeit,
2. die Schwehre,
3. die elaſticitæt, wovon in der Aërometrie gehandelt worden iſt.

Kurzer Plan der Pyrologie, oder vom Feuer.

Von der Pyrologie oder von dem Feuer, wo man handlen kan
1. vom natürlichen Feuer, de igne naturali, und zwar
   a. in ſo fern es allgemein iſt, de igne natur. univerſali. Dahin gehört vornehmlich das Licht, das in dem ganzen Weltall ſich befindet, wobey man betrachtet
      1. die Wärme,
      2. die Nahrung des Lichts (nutrimentum lucis.)
      3. die Schwehre, gravitas,
      4. die Farben, colores,
      5. die Ueberbleibſel des Lichts, reſidua ex nutrimentis ignis.
   b. in ſo fern es zerſtreut iſt, de igne naturali diſperſo, wo man handeit
      a. von dem Feuer der himmliſchen Cörper, de igne corporum cœleſtium, dahin gehört
         1. das Sonnen-Feuer überhaupt, oder das Fix-Sternen-Feuer.

2. das

2. das Cometen=Feuer.
3. das Planeten=Feuer,
4. das Feuer der zu unſerm Syſtem gehörigen Sonne, de igne ſyſtematis noſtri ſolis.

b. von dem Feuer unſerer atmosphær, de igne atmosphæræ noſtræ, dahin gehört:
1. das Feuer aus der Sonne durch die atmosphær gebrochen,
2. das Feuer aus dem Mond,
3. das Feuer aus den Planeten,
4. das Feuer aus den Fix=Sternen, wie es in unſerer atmosphær gebrochen wird und beſchaffen iſt,
5. das der atmosphær eigene Feuer,
6. das durch reflectirte Sonnen=Strahlen entſtehende Feuer,
7. das von den Ausdünſtungen in der atmosphær entſtehende Feuer, de igne ab exhalationibus orto.

c. von dem irrdiſchen Feuer, de igne terreſtri, welches betrachtet wird:
1. im Mineralien=Reich,
2. im Pflanzen=Reich, in regno vegetabili,
3. im Thier=Reich, in regno animali.

2. Von dem künſtlichen Feuer, de igne artificiali, dahin gehört:
   1. das Oeconomiſche Kuchen-Feuer, de igne aperto & clauſo in oeconomia,
   2. das Feuer in der experimental-phyſic,
   3. das chymiſche Feuer,
   4. das optiſche Feuer, de igne in Optica conſiderato,
   5. das Feuer in der Artillerie- und Feuerwercks-Kunſt, de igne in Pyrobologia conſiderato.

Zweytes Hauptſtück
oder
kurzer Plan
von der Experimental-Phyſik.

Die Experimental-Phyſik ſetzet nicht nur eine Kenntniß der reinen und angewandten Mathematik, ſondern auch der Naturgeſchichte voraus, wenn man anders dieſe vortrefliche Wiſſenſchafft nicht nach Art der Marktſchreyer vortragen, und den unwiſſenden Zuſchauern allerhand Zauberkünſte vorſpiegeln will, die ſie nur bewundern und nicht verſtehen ſollen. Aus dieſem Grunde trag ich den Plan davon am Beſchluß des ganzen Werks vor, weil ich glaube, man werde alsdann in kurzer Zeit, wenn man das vorhergehende inne hat, den Curſus der Experimental-Phyſik verſtändlich nnd deutlich erklären kőnuen. Wenigſtens habe ich je und je in Zeit eines Monats oder längſtens ſechs Wochen ein ſolches Collegium unter den vorgetragenen Bedingungen nicht ohne Nutzen gehalten, und ich darf mich, dieſe Methode auch vor ſolchen Perſonen, die eben keine Kenner ſind, zu rechtfertigen, auf einen

der gröſten Experimentator unſers Jahrhunderts, nemlich auf den Franciſc. Hauksbee, der in Verfertigung der Inſtrumente in England ſeines gleichen wenig hatte, deſſfalls berufen. Wilh. Whiſton gab 1700. ein dazu dienliches Handbuch in quart heraus unter dem Titel: Courſe of Mechanical, Magnetical, Optical, Hydroſtatical and Pnevmatical Experiments, to be performd by *Francis Hauksbee*, and the explanotory Leitures read by *William Whiſton*, M. A. Daſ iſt einer der erſten in England herausgekommenen Experimentalcurſus, in deſſen Vorrede es heiſt, er werde innerhalb acht und zwanzig Tagen durchgemacht, und ein jeder Zuhörer bezahle drey Guineen; Hauksbee mache die Experimenten vor, und Whiſton erkläre ſolche in jeder Lection aus phyſikaliſch und mathematiſchen Gründen. Doch die Natur der Sache bringt es mit ſich, daſ wenn man die Theorie, die Mathematiſche Wiſſenſchafften und die Naturgeſchichte weiſ, ein Experimentalcurſus in wenig Wochen ſo deutlich als vollſtändig vorgetragen werden kan. Da nun unſer Herzogliches Ober-Gymnaſium Illuſtre allhier in Stuttgardt, mit dem ich unter den vielen Gymnaſiis in Teutſchland keines als etwa das Hamburgiſche und das ehemalig Joachimsthaliſche, nunmehro aber Königlich-Berliniſche, in Anſehung der darinnen vorgetra-

getragenen Wiſſenſchafften, als auch der nach academiſchem Fuß eingerichteten Lectionen, zu vergleichen weiß, einen Vorrath von Inſtrumenten hat, den manche Univerſitäten nicht haben, ſo wollte ich hier von dem Plan eines ſolchen Collegii kürzlich Nachricht geben, und nur bey einer einigen Claſſe von Experimenten etwas ausführlicher ſeyn, damit ein Lehrer wiſſe, wie er bey allen übrigen Experimenten die Sache auf eine faßliche und angenehme Art erleichtern ſoll.

Plan des Collegii ſelbs.

Bey einem Experimental-Collegio wird zu erſt die Geſchichte der ganzen Experimental-Phyſik vorgetragen, damit man wiſſe, was man ſeit den Zeiten der Welt darinn geleiſtet habe, und wie man in unſern Tagen ungleich weiter als jemals gekommen ſeye; ſie theilet ſich

1. In die alte Geſchichte; von Ariſtoteles biß auf den Archimedes, von dem biß auf die Hypatia, die Tochter des Throns, und einige folgende.
2. In die neue Geſchichte, welche durch eine zwiſchen Zeit von 1500. Jahren von den alten getrennt iſt; wo
   a. in Italien dieſe Wiſſenſchaft unter dem Cardinal Cuſanus wieder empor ge-

kommen, von dem 1550. Dialogus de Staticis Experimentis heraus kam; ſodann wird von Athan. Kircher, Galilæo Galilæi, dem Großherzog von Etrurien Leopold Nachricht gegeben, der die Acad. del Cimento 1657. geſtifftet, und in den neuern Zeiten

b. in England; wo von dem Wiederherſteller der nützlichen Wiſſenſchafften Franc. Baco de Verulamiis, derunter andern Werken auch ſilvam ſilvarum ſive Hiſt. Natur. Centur X. heraus gab 1621. Ferner von Wilh. Gilbert, in Rückſicht auf die Magnetiſche Experimente, Rob. Boyle, Iſ. Newton, Fr. Hauksbee, Ioh. Veil, und beſonders unter den neueſten von Desaguliers, deſſen cours de Phyſique Experimentale 1751. von Pezenas S. t. Franzöſiſch überſetzt wurde.

c. In Holland auſſer Willebr. Snellius und einigen ältern beſonders von Wilh. Jac. s'Graveſand, Joh. und Petr. von Muſchenbroeck Bemühungen um die Experimental-Phyſik

d. In Frankreich von Carteſius, Mariotte, Petr. Poliniere, vorzüglich aber dem Abbt Nollet,

e. In Teutſchland nach dem Guerike

und

und andern von Ioh. Chriſtoph Sturm, der zu erſt in Teutſchland 1672. ein Collegium Experimentale zu Altdorf geleſen, von Elias Camerarius in Tübingen in Diſſertat. Taurinens. Epiſtol. wo er Diſſ. XX. ſeinen ganzen Experimentalcurſum beſchreibt, von Jac. Leupold, dem Leipziger berühmten Mechanicus, von dem Freyherrn von Wolf und deſſen nützlichen Verſuchen 1721. Fol. in drey Theilen, und andern Nachricht zu geben iſt; wovon die jedesmal dem Hauptſtück der angewandten Mathematik vorangeſchickte Geſchichte, auch Herr Prof. Krafft in Diſſert. de Præcipuis Experimentorum phyſicorum Scriptoribus nachgeſehen werden kan.

Die Ordnung der Experimenten.

Man kan die Experimente entweder nach den Hauptabtheilungen der angewandten Mathematik vortragen, wenn man nur aus der Naturlehre, die Lehre von dem Zuſammenhangen und Zuſammenſtoſſen der veſten-Cörper in die erſte Claſſe noch mit nimmt; oder man kan ſie nach der Elementengeſchichte eintheilen, und daraus vier Haupt-Claſſen machen, deren erſtere die Experimente mit den veſten

irdiſchen Cörpern, die zweyte die Experimente mit dem Waſſer, die dritte mit der Lufft, die vierte mit dem Feuer in ſich begreifft; wir wollen bey unſerer Abtheilung der angewanten Mathematik bleiben und handeln:

Von den Statiſchen Experimenten:

I. Von den bloß mechaniſchen, und zwar:

1. vom Gleichgewichte der veſten Cörper, dahin gehören:
   a. die Experimente mit dem Hebel überhaupt und von der zuſammengeſetzten Bewegung,
   b. die Experimente mit den verſchiedenen Gattungen der Hebel, der Wage, der Schnellwage,
   c. die Experimente mit dem Räderwerk, den Kloben, (Trochleis) dem daraus entſtehenden Flaſchenzug, den ſchiefen Flächen, dem Keil.
   d. Als eine Zugabe könnten hier die Modelle vom neuen Ackerbau, welche alle aus dem vorhergehenden ſich erweiſen, gezeiget, und nach den Mathematiſchen Gründen demonſtrirt, auch überhaupt die zur Experimental-Phyſik gehörige Inſtrumenten erklärt werden.
2. vom Zuſammenhang der veſten Cörper nach der Newtoniſchen Attractions- und Repulſionslehre,

Anm.

Anm. Dahin gehören:

a. die neuen Experimente mit den *Phialis Vitreis*, wobey vorkommen:

1. die verſchiedene Nahmen; ſie heiſſen: Phialæ Italicæ, auch ova Philoſophica;
2. die gelehrte Geſchichte; nemlich ihre Erfindung in Italien, entweder zu Florenz oder zu Mayland, wo ſie ungefehr im Jahr 1743. bekannt gemacht wurden;
3. die Art und Weiſſe, wie ſie zubereitet werden; in den Glashütten läßt man ſie, wie andere Phialas unten etwas bauchigt und dichte, gegen die obere Oefnung aber dünner zubereiten, und hernach aus der größten Hitze nicht in den Kuhlofen, ſondern unter die freye Luft oder in feuchten Sand ſetzen, biß ſie nach und nach die Veſtigkeit eines dick innwendig hohlen Glaßes bekommen.

α. Die Experimente ſelbs.

1. Wenn man ein noch ſo kleines Stücklein eines Kieſelſteines hinein fallen läßt, ſo wird die Phiala zerſpringen.
2. Wenn man aber mit einem Hammer auf ihren bauchigten Deckel mit aller Macht ſchlägt, ſo wird ſie nicht ſo leicht zerſchlagen werden.
3. Wenn man ſie noch einmal glüend werden läßt, und ſodann in den Kühlofen ſezt, ſo wird ſich die nemliche Wirckung äuſſern. (Damit die Hand nicht verletzt werde, wenn der Bauch der Phialä zerſpringt, ſo kan man, ehe man die ſpitzige Kieſelſtücklein hineinfallen läßt, ſolche mit Baumwachs wie mit einem Halſe umgeben.)

b. Die Phyſikaliſche Urſachen dieſer Experimente ſcheint die Newtoniſche Attraction und Repulſion zu ſeyn; dann weil dieſe Phialä ganz glüend der freyen Lufft ausgeſetzt werden, ſo werden die äuſſere Theile eher als die innere und alſo nicht gleichförmig erkalten, dahero das Gleichgewicht gehoben wird, und zwar vornemlich in der inwendigen untren Cavität oder Cirkelfläche, wo die attractions-Sphäre am meiſten in Unordnung gebracht wurde; ſie müſſen alſo von innen durch den kleinſten Riz ſpringen, von auſſen aber nicht ſo bald, man muß ſie mit ſpitzigen Steinlein ritzen, oder mit einem Hammer ſchlagen. (Diß iſt ein Exempel, wie man die einzele Experimente wirklich ausführlich erklären und deutlich machen ſolle.)

b. Die Experimente mit den Lacrymis Hollandicis; dabey kommen vor:

1. die verſchiedenen Benennungen; ſie heiſſen Lacrymæ Hollandicæ, vitrei, auch vermiculi von ihrer geſtalt.

2. die gelehrte Geſchichte. Sie ſind zu erſt in Holland erfunden worden; wie Reyher ſchreibt de aere, XIII. man habe ſie ihm zu Leyden, wohin ſie aus einer Amſterdamer Glashütte geſchickt worden, zu erſt 1656. gezeigt; von dannen ſeyen ſie nach Deutſchland, und im Jahr 1661. nach Londen durch den Herzog von Cumberland an die Societät der Wiſſenſchaften gebracht worden:

3. Die Art und Weiße, wie ſie zubereitet werden; Man nimmt nemlich einen geſchmolzenen Glastropfen, und gießt ihn in kalt Waſſer, ſo wird ein glaſſerner unten etwas dichterer Körper daraus, der ſich nach und nach in eine etwas länglichte und zackigte Endung verliehrt;

a. Die Experimente ſelbs;

1. bricht man dieſe Endung ab, ſo wird der untere dichtere Cörper in die kleinſte Stücke, wie in Stäublein zerſpringen, die in der Hand nichts verletzen, ſondern nur einen Stoß geben.

2. Wenn man auf den untern dichtern Glascörper mit einem Hammer ſchlägt, ſo zerſpringt er nicht.

3. Wenn man das Experiment mit abbrechen der ſubtilen Endung im leeren Raum macht, ſo folgt eben die Wirckung.

4. Wenn man den untern dichten Cörper mit Wachs oder Leimen wie mit einem Halſe umgiebt, und bricht hernach die obere Endung ab, ſo bekommt der ebenfalls zerſpringende dichtere Cörper circular- und Kegelformige Brüche.

5. Wenn man ſolchen Glascörper noch einmal glüend macht, und hernach in den Kuhlofen ſezt, ſo findet ſich die vorige Wirkung nicht wieder.

b. Der Grund dieſer Wirkung iſt wie bey dem vorigen Experiment in der Newtoniſchen Attractionslehre zu ſuchen. Dann durch die ſchnelle Verkaltung des glüenden Glaßes im kalten Waſſer, weil das Gleichgewicht den zuſammenhangenden Theil aufgehoben, und nur gleichſam die äuſſere Rinde mit den Filamentis oder ſubtilen Endungen zuſam-

zuſammenhangend; dahero wenn dieſer Sack oder Rinde bricht, das eingeſchloſſene nicht mehr zuſammenhangende Glas wie Staub verſchüttet wird. (Dieſe beede Exempel ſind zum Unterricht genug, wie man bey allen ſowohl vorhergehenden als nachfolgenden Experimenten verfahren ſolle.)

c. Die Experimente mit dem Magnet;
1. mit dem gewöhnlichen Magnet,
2. mit dem künſtlichen, der nicht mit dem Magnetſtein beſtrichen iſt.

d. Von den Bewegungen der veſten Cörper;
1. von den perpendicular-Bewegungen, oder dem Fall der veſten Cörper nach dem Geſetz der Schwere,
2. von der Horizontal-Bewegung, oder der colliſion in geraden Linien,
   a. von der Colliſion der weichen Cörper,
   b. der elaſtiſch und harten Cörper.
3. von der krumlinigten beſonders Circular-Bewegung.

II. Von den Hydroſtatiſchen Experimenten.
1. vom Abwägen der veſten Cörper im Waſſer, und andern flüßigen Materien,
2. von dem Verhältniß flüßiger Cörper, gegen einander;
3. von Abſonderung der flüßigen Cörper, leichter und ſchwererer Art.

III. Von den Aerometriſchen Experimenten.
1. Von der Lufftpumpe, dahin gehören:
   a. die Experimente mit den Hemisphæriis Magdeburg. als die älteſte,

b. die

b. die Experimente unter der Glocke,

1. die Experimente vom verminderten und endlich unhörbaren Schall der ſchallenden Cörper unter der von Luft ausgepumpten Glocke,
2. die Experimente vom Licht, das erſtlich in der Kugel formirt wird, und dann verlöſcht. Dahin auch die Experimente mit Flintenſteinen und Flintenſchloß zu rechnen,
3. die Experimente vom Aufſteigen der Dünſte und Witterung nach Beſchaffenheit der dünnen oder dicken Lufft,
4. die Experimente von gleichförmiger, druckender Schwere auf lockere und veſte Cörper, die zugleicher Zeit in luft leerem Raum zu Boden fallen;
5. die Experimente mit den Thieren, im luft leeren Raum;
6. die Experimente mit flüßigen Materien, z. E. mit Bier, verſchiedenen Gattungen von Waſſer, darein ſie in luft leeren Raum gebracht werden.

c. die Experimente mit andern Recipienten, da gezeigt wird:

1. wie der Mercurius durch Holz
2. durch Leder von der Luft durchgepreßt werde,
3. wie flache Gläßer, z. E. Fenſterſcheiben nach dem erſten Zug, wenn ſie nicht

nicht Glockenförmig ſind, zerbrochen werden.

2. Von dem Torricelliſchen Leeren oder der Torricelliſchen Röhre; dahin gehören:

a. die Experimente mit dem Barometer,

b. mit dem Thermometer,

c. mit dem Hygrometer,

d. mit dem Manometer,

3. Von den Experimenten mit dem Schall,

a. von Fortpflanzung des Schalls überhaupt,

b. Von Verſtärckung des Schalls durch das Sprachrohr;

c. vom Wiederſchall oder Echo,

IV. Die Hydrauliſche Experimente.

1. mit den Hebern überhaupt, (ſiphones)

a. mit dem Stechheber,

b. mit dem Wirtembergiſchen Heber,

c. mit dem Anatomiſchen Heber,

2. mit den Springbrunnen und Waſſerſprizen,

a. mit dem Heronsbronn, (fons Heronis)

b. mit dem Heronsball,

c. und Comiers Springbronnen, der nicht naß macht u. ſ. w. davon in der Hydr. S. 110.

Die Optiſche Experimente.

I. Die Optiſche insbeſondere, dahin gehören:

1. die vom Licht und Schatten,

a. von

a. von der Fortpflanzung des Lichts, und verſchiedenen Entfernungen,

b. von dem Schatten und den Erſcheinungen in einem verfinſterten Zimmer,

2. die Experimente von den Farben,

a. die Theilung eines Lichtſtrahls, darinnen ein dreyeckigt Prisma in der Cam. obſc.

b. die Wiedervereinigung der ſiebenfärbigten Strahlen, in einen einigen.

II. Die Catoptriſche Experimente.

1. mit ebenen Spiegeln, in ſo fern ſie Bilder repräſentiren,

2. mit krumlinigten Spiegeln (Speculis curvis)

a. wenn ſie bloß Bilder repräſentiren,

1. in cylindriſchen Spiegeln, und den dazu gehörigen perſpectiviſchen Malereyen,

2. in coniſchen Spiegeln mit den Malereyen,

b. wenn ſie entzünden

1, metallene circularconcave Brennſpiegel,

2. gläßerne Brennſpiegel, und Brenngläſer,

3. paraboliſche Spiegel.

III. Die Dioptriſche Experimente.

1. mit den Feuerröhren und Teleſcopiis nach allen Arten, die in der Dioptrick vorkommen, ſowohl mit weißen als gefärbten Gläſern.

1. mit

2. mit den Microſcopiis
   a. mit einfachen, nach Muſchenbroeckiſcher Art,
   b. mit zuſammengeſetzten überhaupt,
   c. mit zuſammengeſezten Microſc. Solaribus nach Herrn Pf. Biſchoffs Verbeſſerungen.

Die Aſtronomiſche Wiſſenſchafften werden durch die auf dem Obſervatorio zu machenden Anſtalten erläutert; die Architectoniſche aber durch beſondere Modelle von Saulenordnungen und Veſtungs-Syſtemen. Statt einer Zugabe kommen noch die Electriſche Experimente vor, welche bißher noch aus der Naturlehre ihre weitere Erklärung erwarten, und noch kein Theil der angewandten Mathematik geworden ſind. Aus dem was wir theils in dem II. Theil der angewandten Mathematik theils in der Probe zu zwey Experimenten in den Statik vorgetragen, läßt ſich dieſer kurzer Plan erläutern und weiter ausführen. Zu einem Plan hat man an dem geſagten genug.

Nachleſe.

In dem erſten Theil §. 199. lin. 7. ließt man mc = a; und lin. 9. ließt man a = mc und eben ſo wird lin. 10. und lin. 16. das Zeichen = für > geſezt. Seiten 191. iſt zu dem

dem Saz Fig. 22. der kleine Buchſtabe s in der Fig. bey A nicht recht ausgedruckt, man ſezt alſo in den Winkel BAE den Buchſtaben s hinein; Seite 209. lin. 13. ließt man AC = AF; und in der dazu gehörigen Fig. 51. druckt man die Linie GC beſſer aus, auch Fig. 98. die gerade Linie PM. Seite 329. lin. 6. ließt man in der Beſchreibung der Eberhardiſchen neuen Meßtafel. Im II. Theil, Seite 152. lin. 8. ließt man PP : FC = FB : FA.

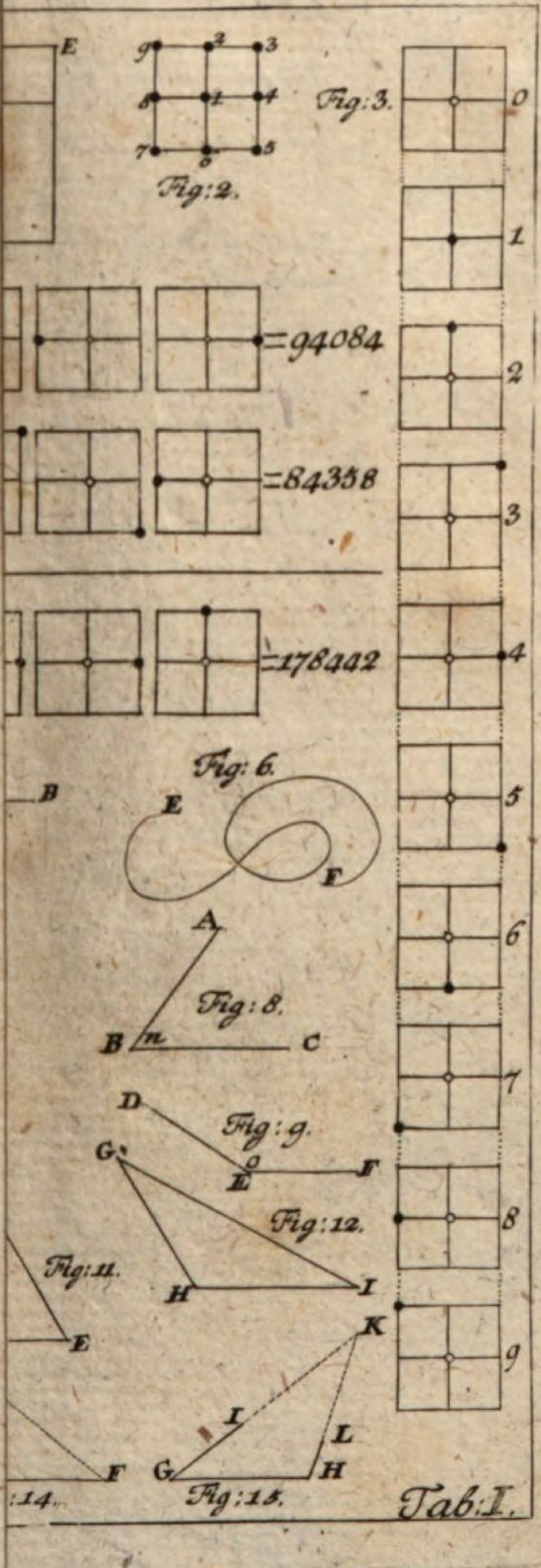


Fig:2.
Fig:3.
=94084
=84338
=178442
Fig: 6.
Fig: 8.
Fig: 9.
Fig: 11.
Fig: 12.
:14.
Fig: 15.
Tab: I.

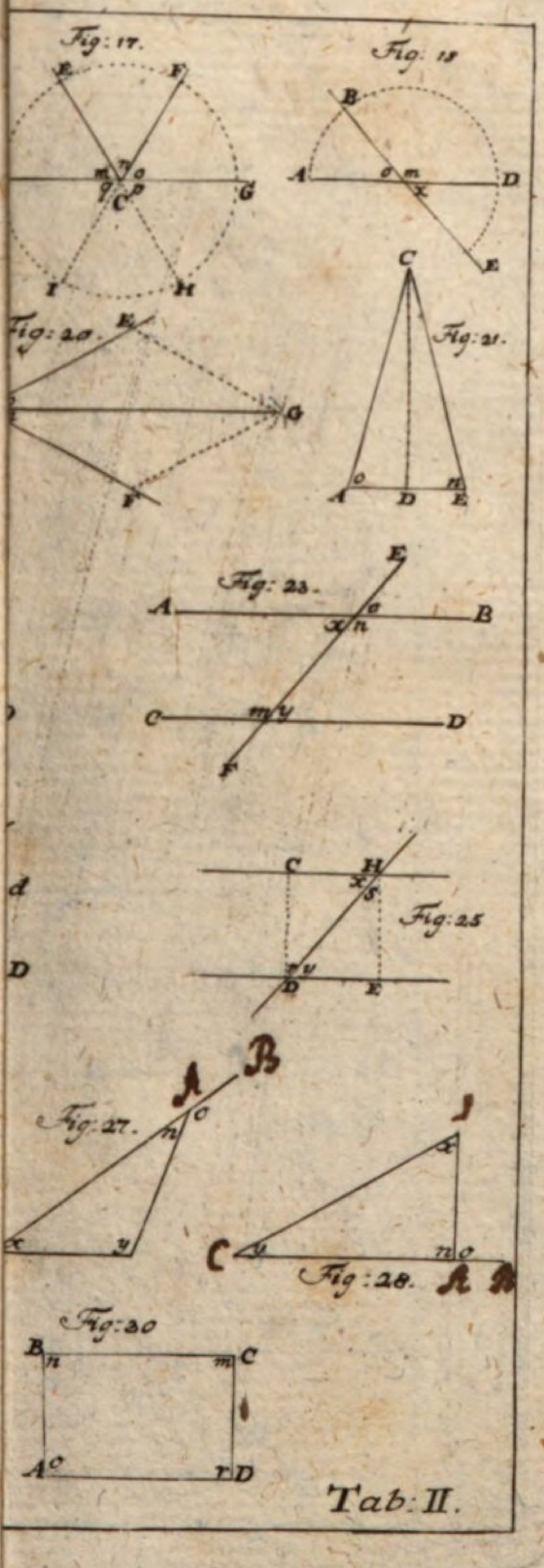


Fig: 17.
Fig: 18
Fig: 20.
Fig: 21.
Fig: 23.
Fig: 25
Fig: 27.
Fig: 28.
Fig: 30
Tab: II.

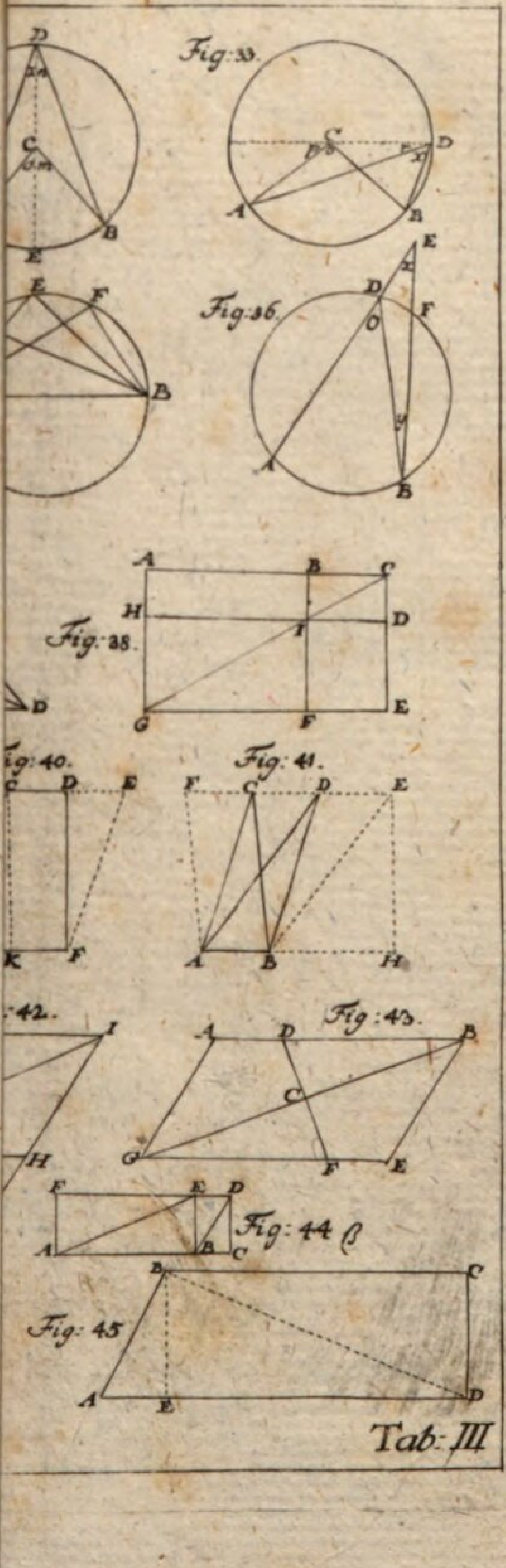
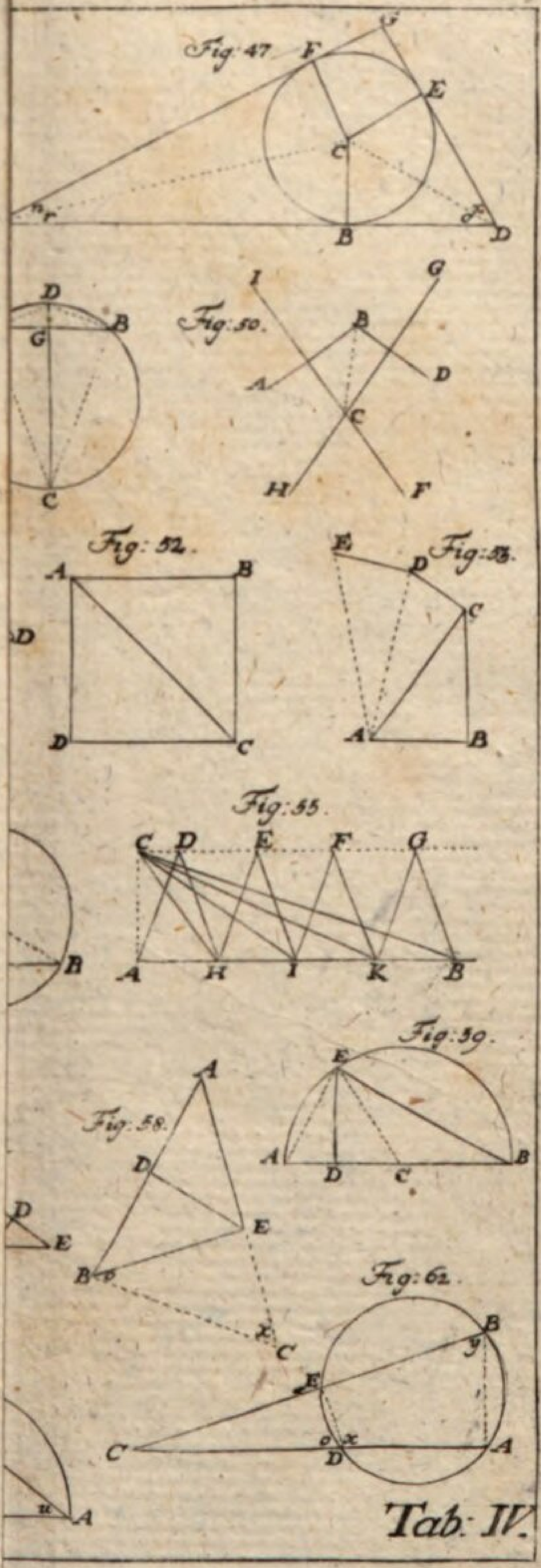


Fig: 35.
Fig: 36.
Fig: 38.
ig: 40.
Fig: 41.
: 42.
Fig: 43.
Fig: 44 β
Fig: 45
Tab: III



Tab: IV.

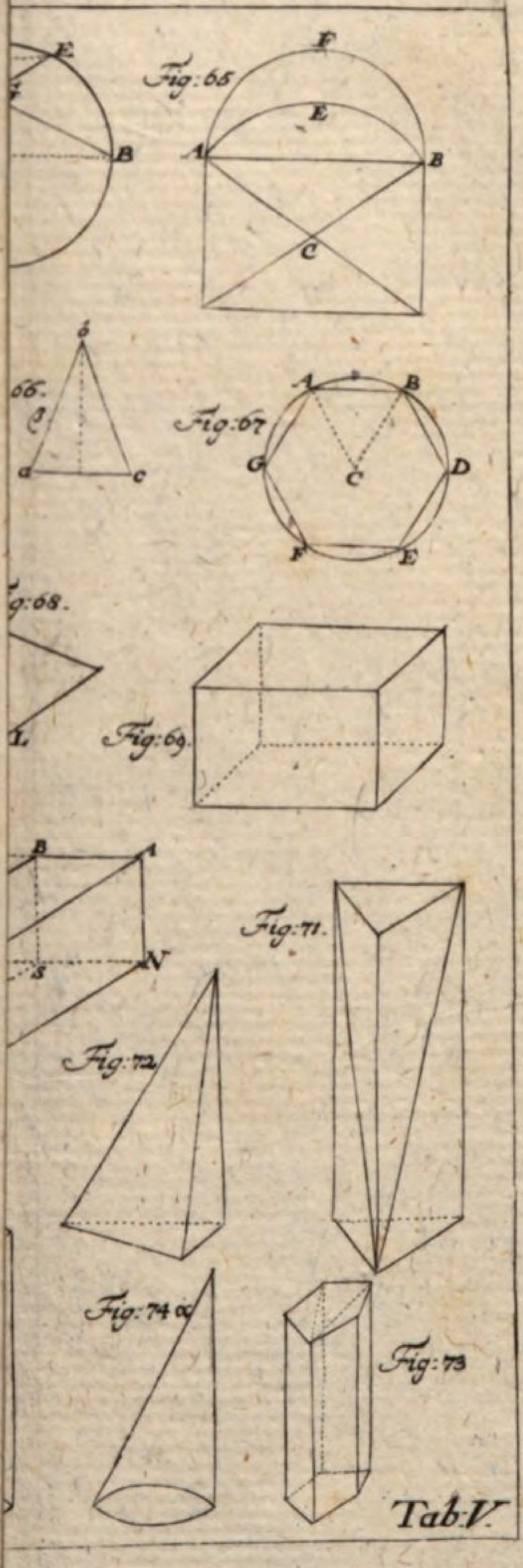


Fig:65
A
B
C
E
F
66.
Fig:67
A
B
C
D
E
F
G
g:68.
L
Fig:69.
B
A
S
N
Fig:71.
Fig:72
Fig:74
Fig:73
Tab:V.

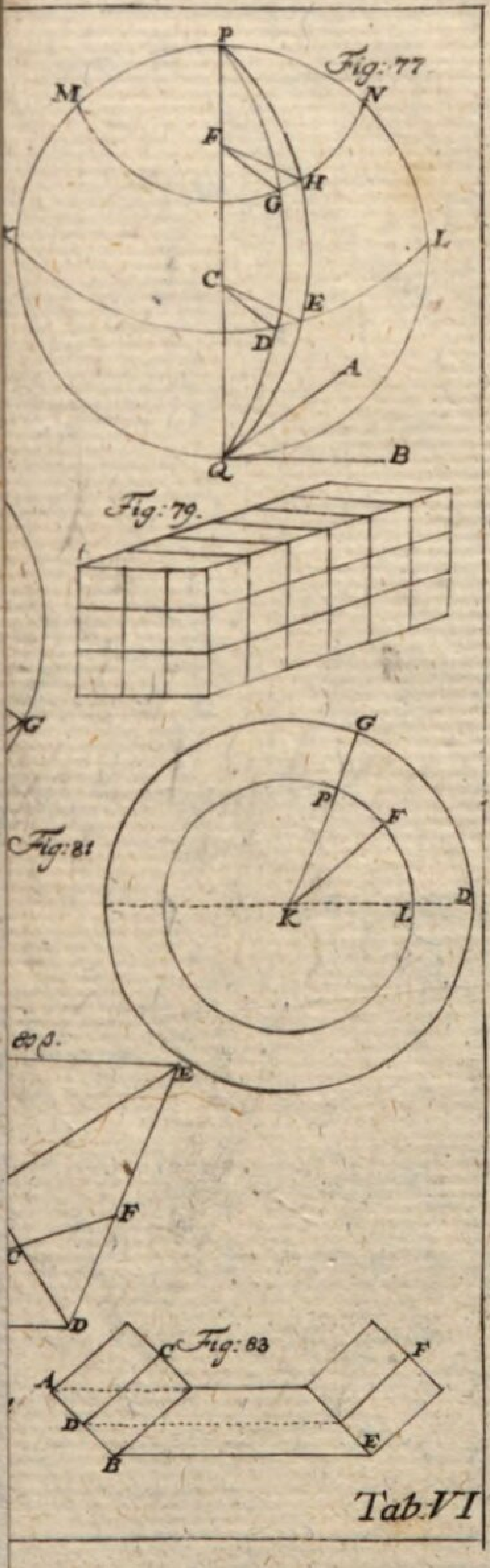


Fig:77
Fig:79.
Fig:81
80 ß.
Fig:83
Tab:VI

Fig: 85

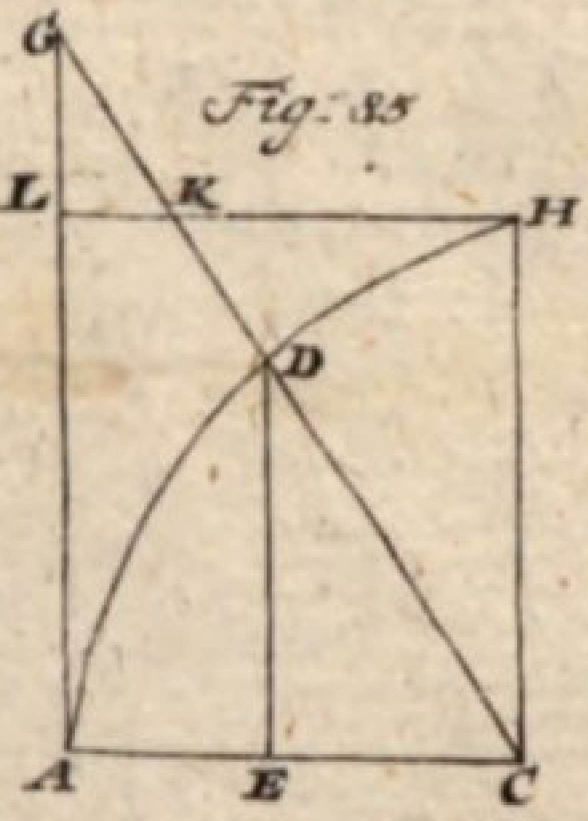
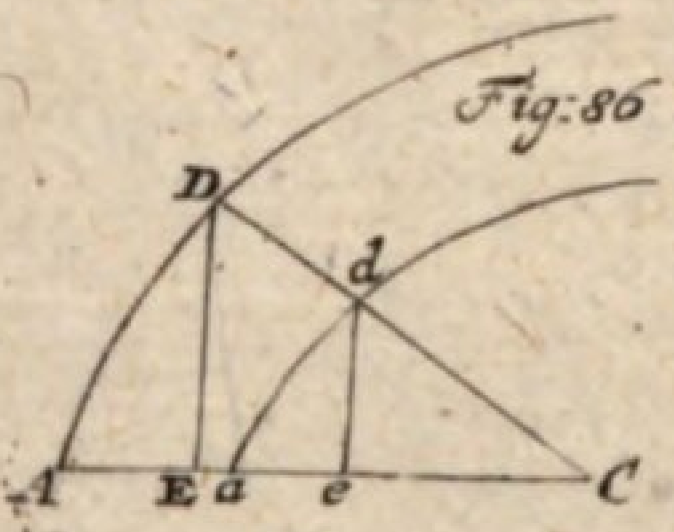
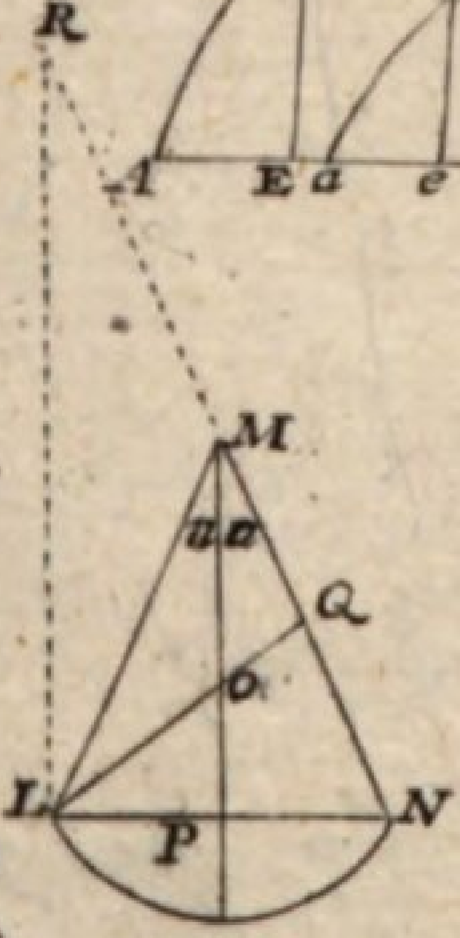


Fig: 86



g: 88 β



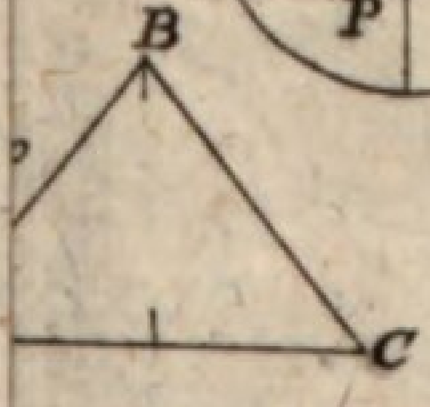


Fig: 91

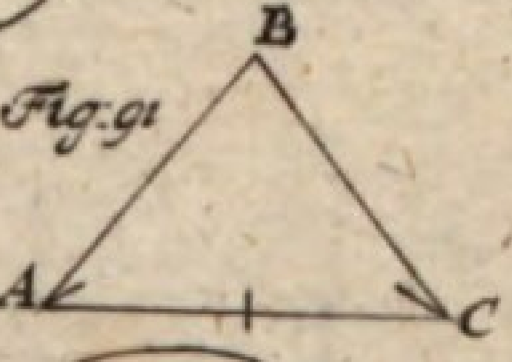
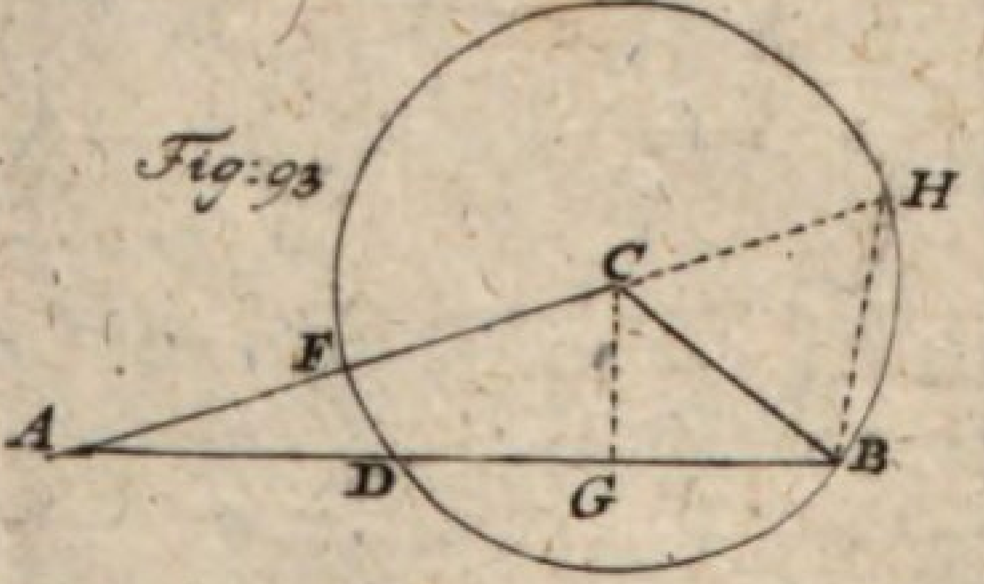


Fig: 93



Tab: VII.

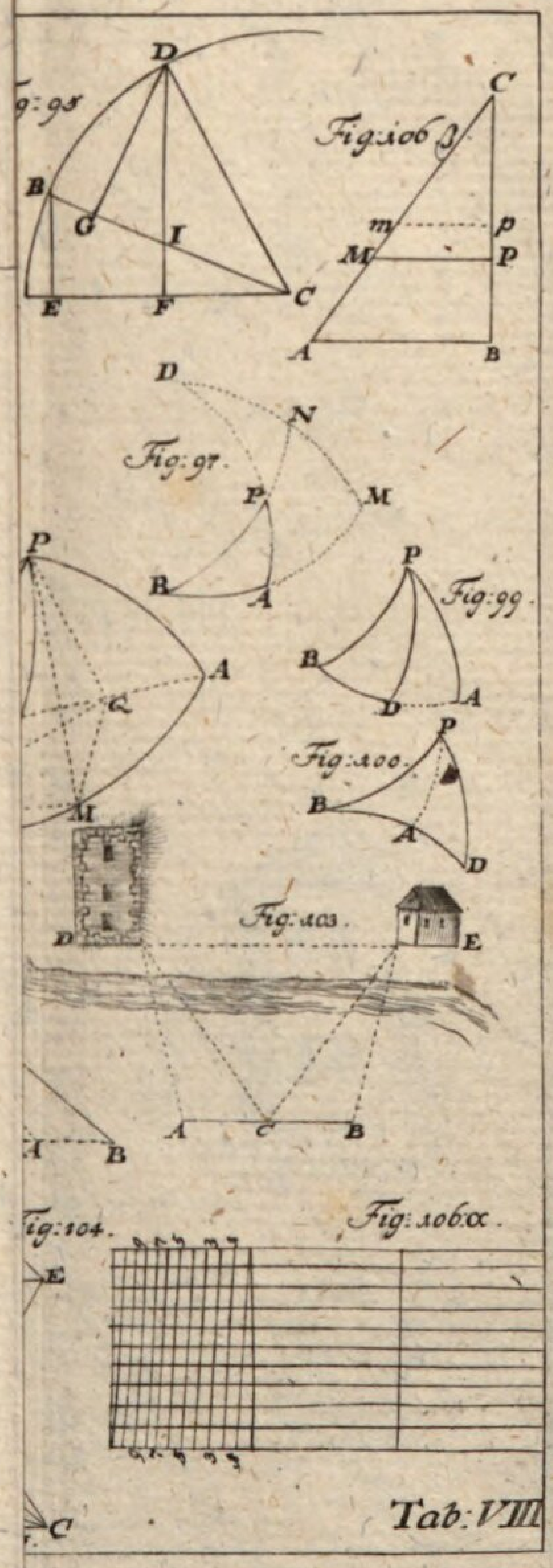

g:95
Fig:106 β
Fig:97.
Fig:99.
Fig:100.
Fig:103.
Fig:104.
Fig:106.α.
Tab:VIII

Fig: 108

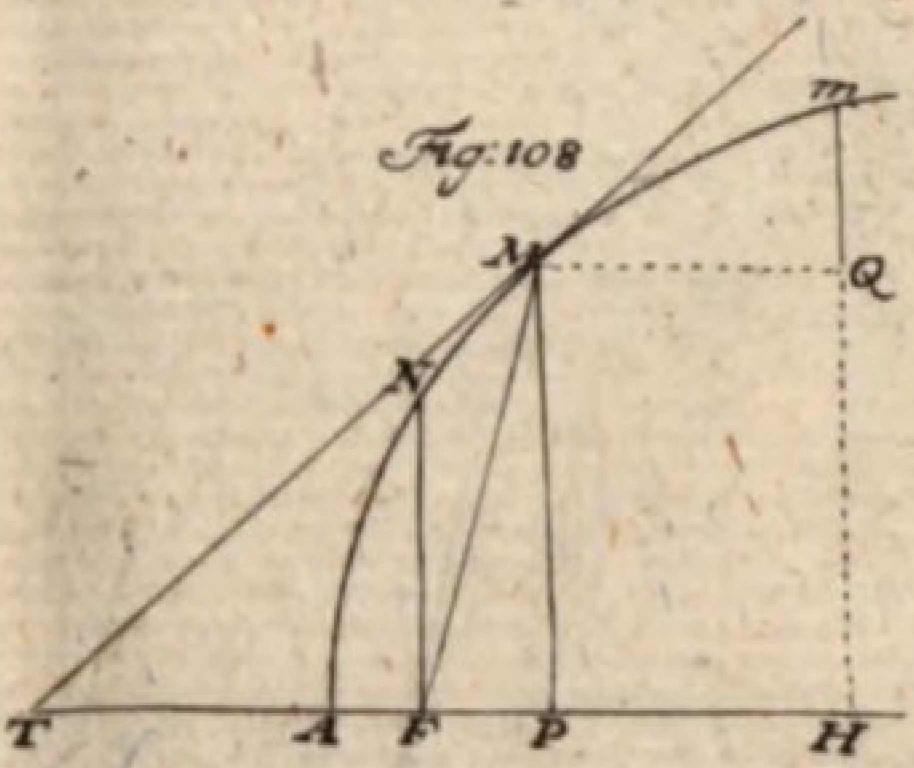
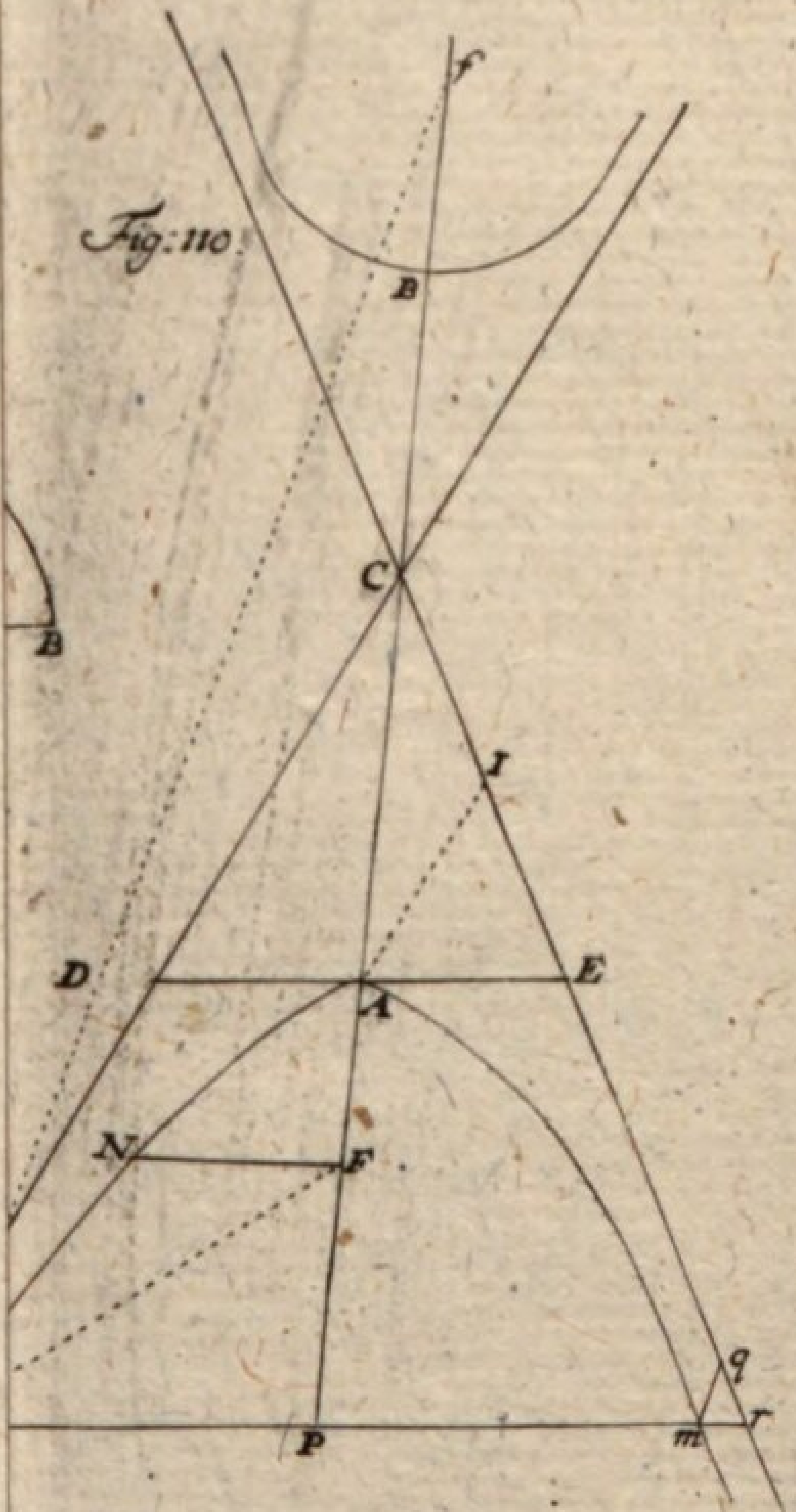


Fig: 110



Tab: IX

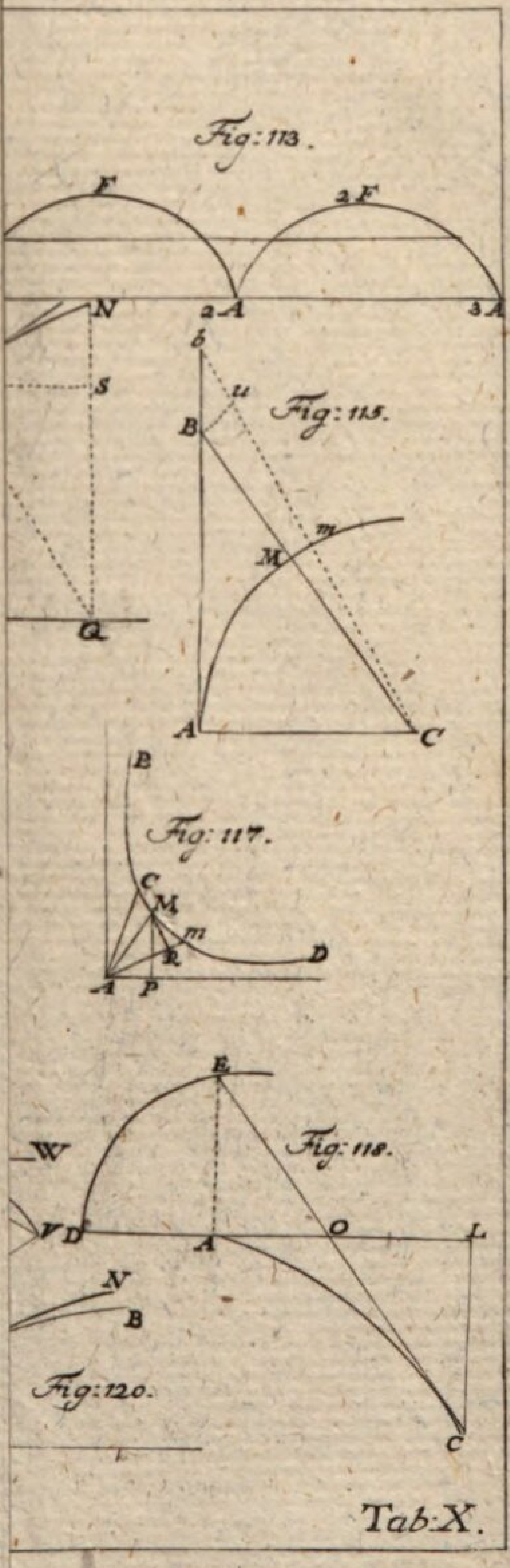


Fig:113.
F
2F
N
2A
3A
S
Q
b
u
Fig:115.
B
m
M
A
C
B
Fig:117.
C
M
m
R
D
A
P
E
W
Fig:118.
V
D
A
O
L
N
B
Fig:120.
C
Tab:X.

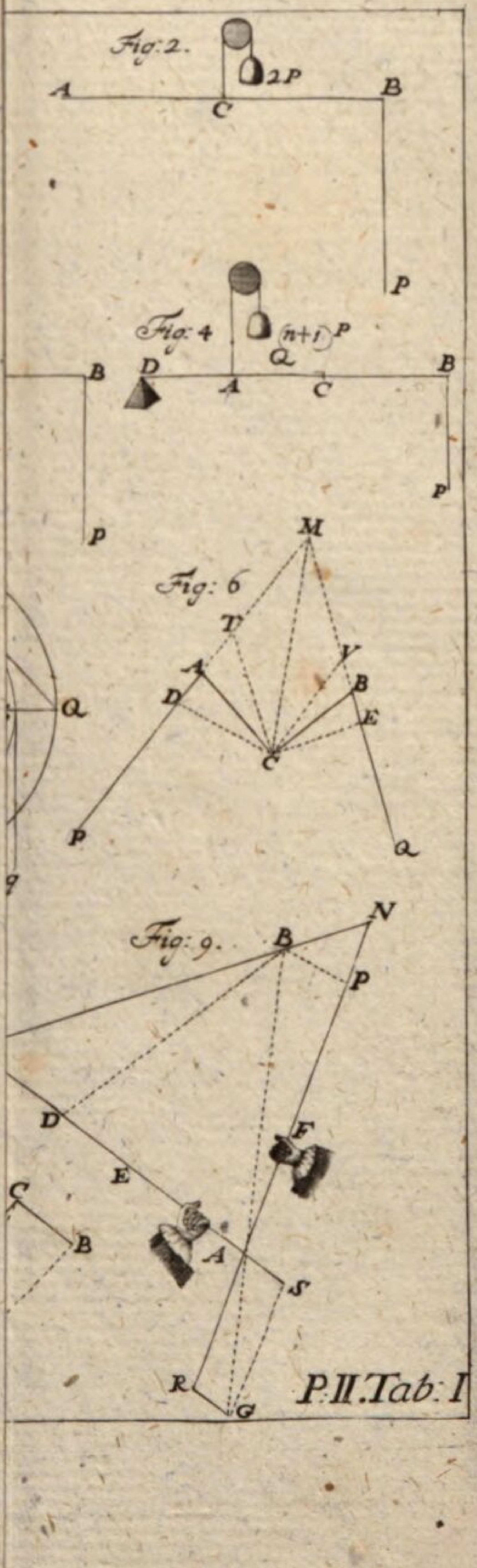
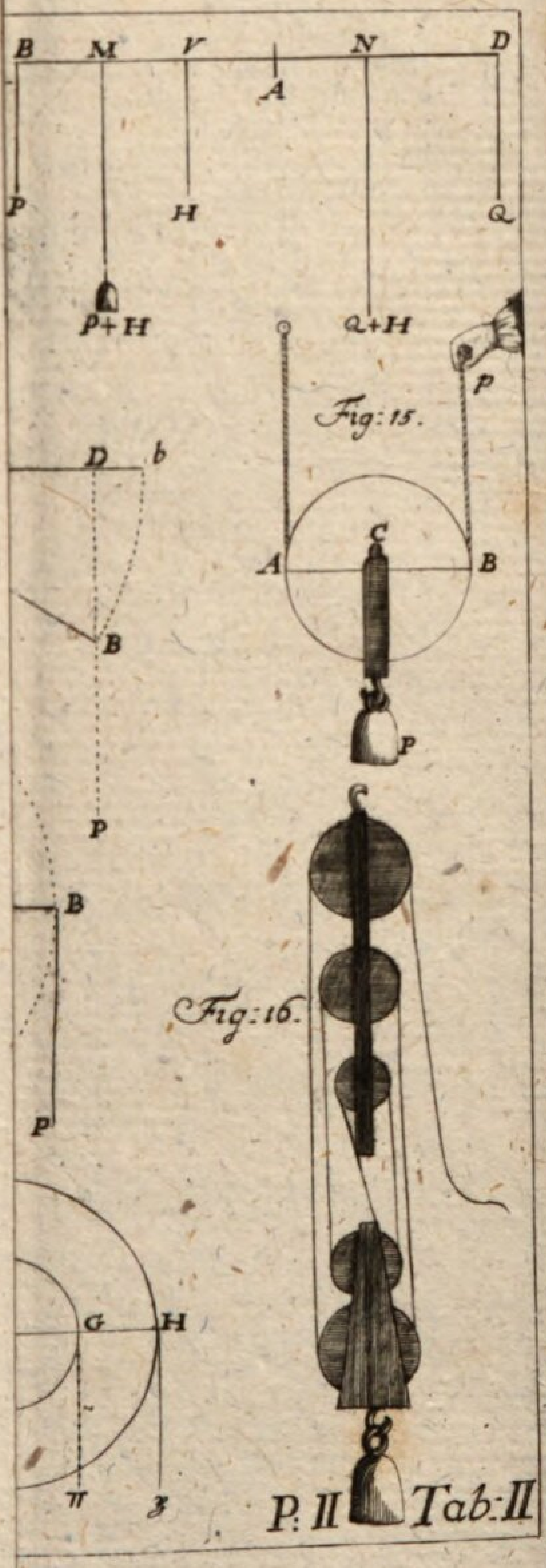
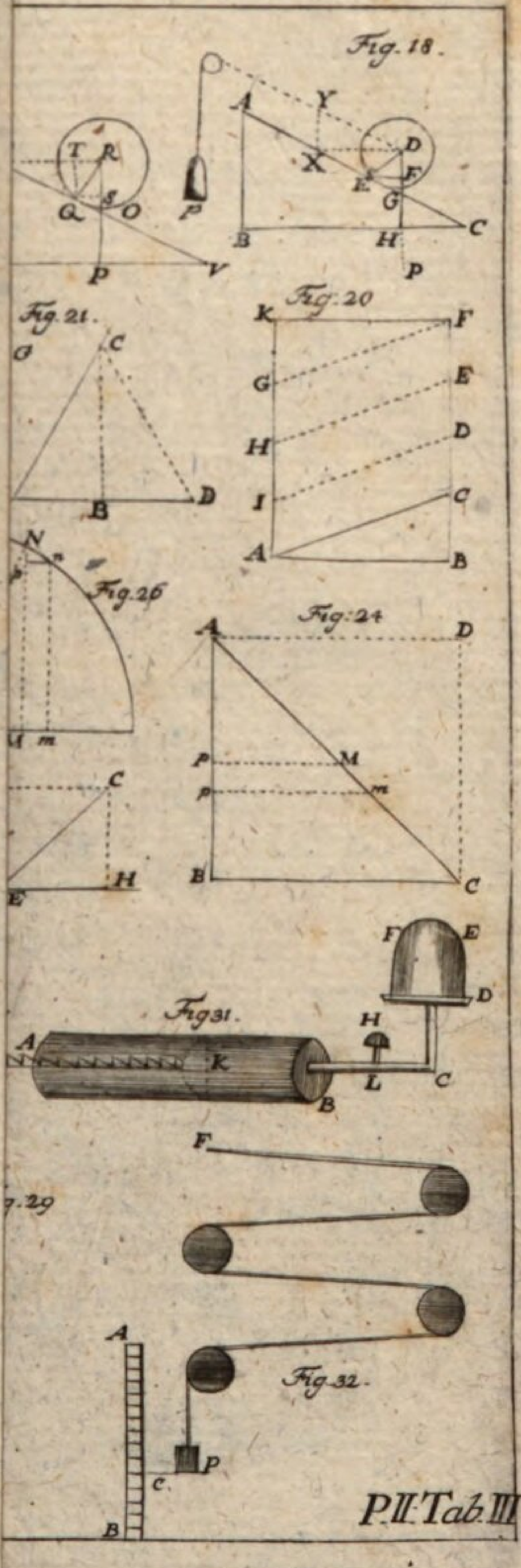
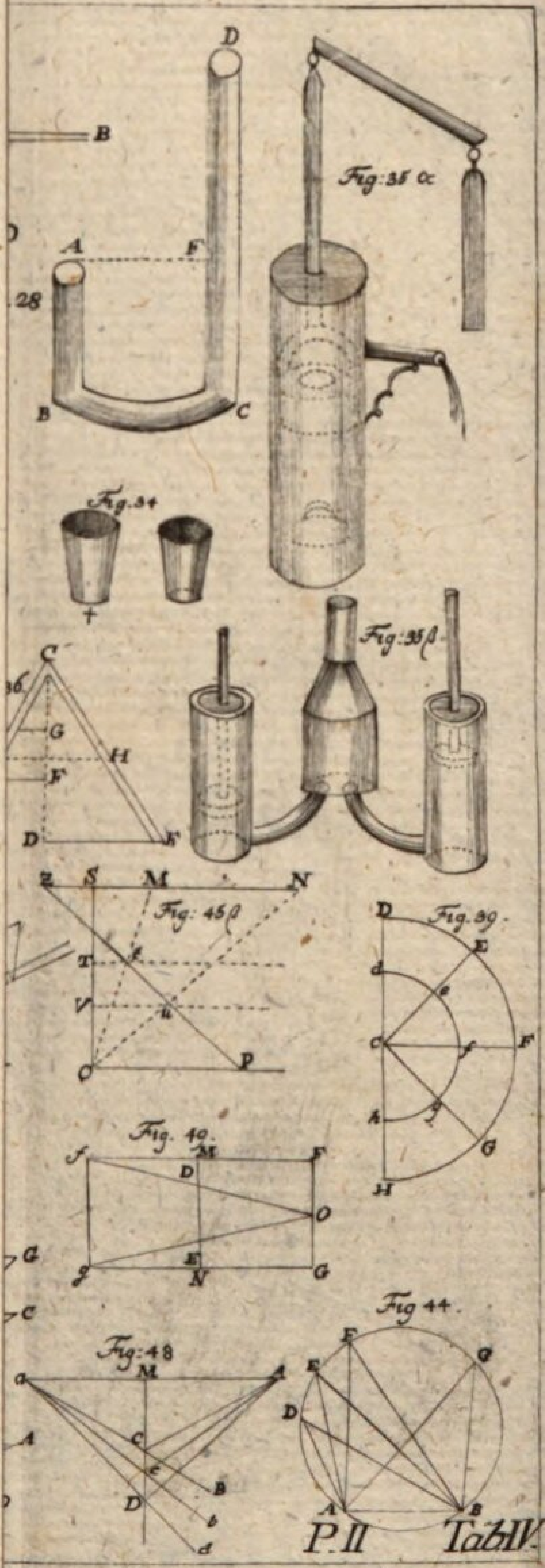


Fig: 2.
2P
A
C
B
P
Fig: 4
(n+1) P
D
B
Q
A
C
B
P
P
Fig: 6
M
T
V
A
B
D
E
C
Q
P
Q
q
Fig: 9.
B
N
P
D
F
E
C
B
A
S
R
G
P.II.Tab: I

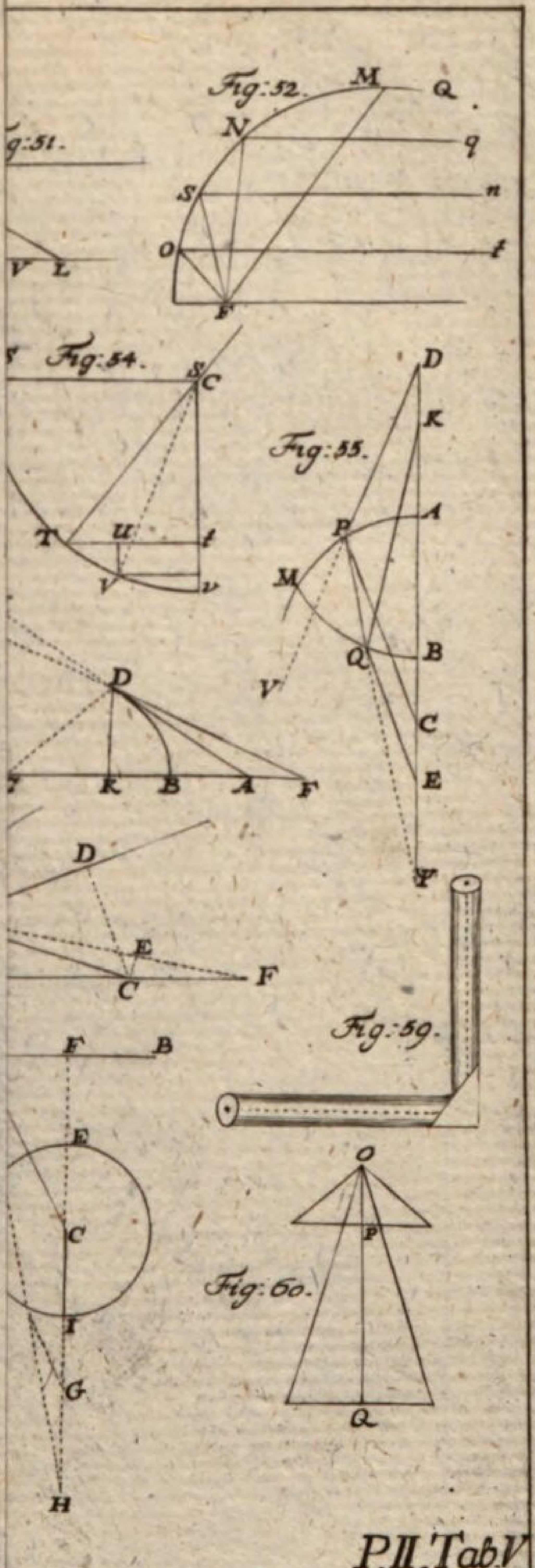

B M V N D
A
P H Q
P+H Q+H
p
Fig: 15.
D b
C
A B
B
P
P
B
Fig: 16.
P
G H
π z
P: II Tab: II



P.II. Tab.III

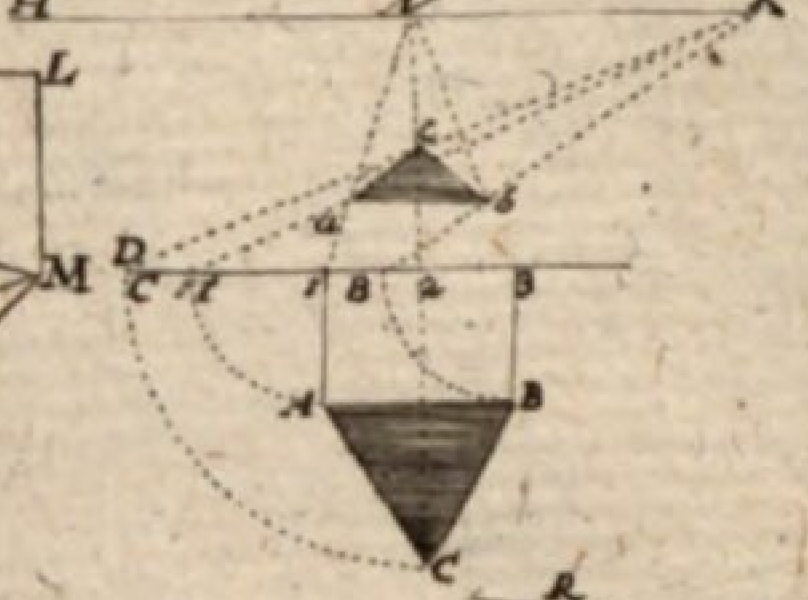


P. II Tab. IV.


g:51.
V L
Fig:52.
M Q
N q
S n
O t
F
Fig:54.
S C
T U t
V v
Fig:55.
D
K
A
P
M
B
Q
V
C
E
Ψ
D
K B A F
D
E
F
C
F B
E
C
I
G
H
Fig:59.
O
P
Fig:60.
Q

P.II. Tab.V

Fig: 64.



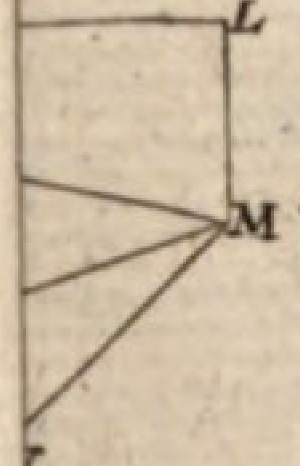


Fig: 66

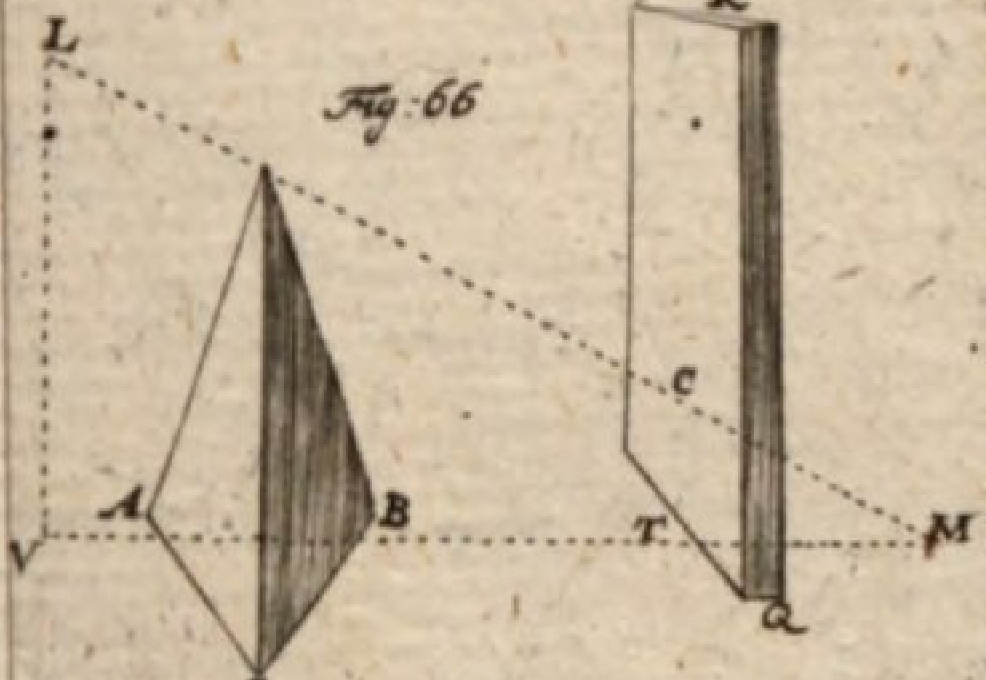


Fig: 67.

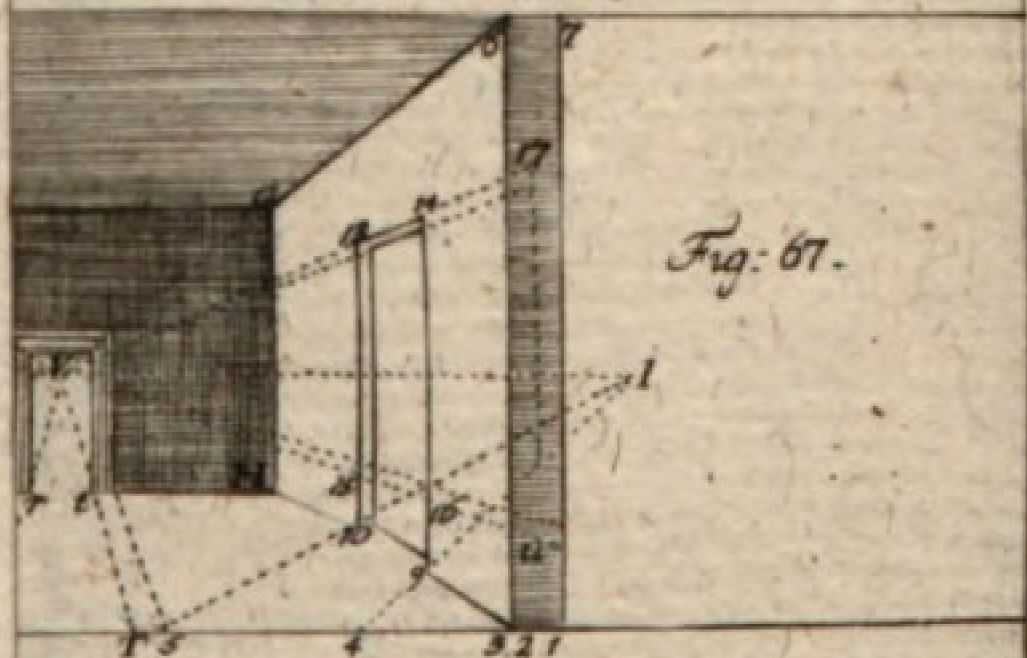


Fig: 69.

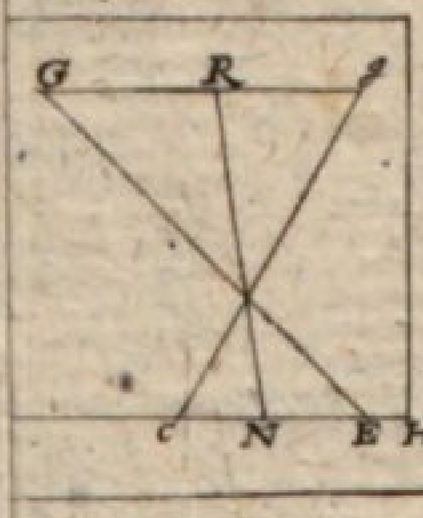
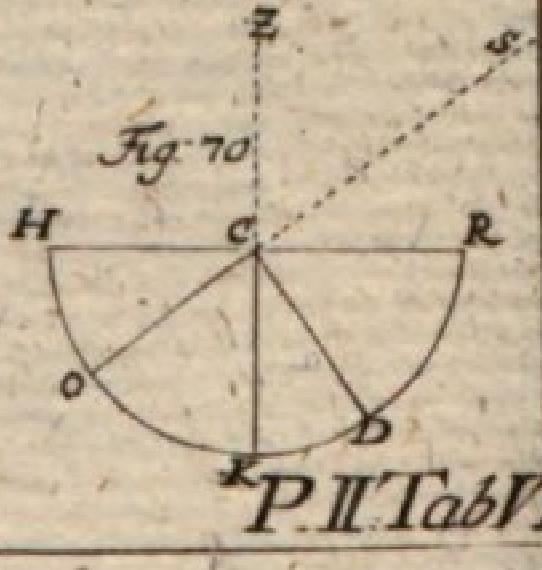


Fig: 70



P. II. Tab VI.

Fig. 72.

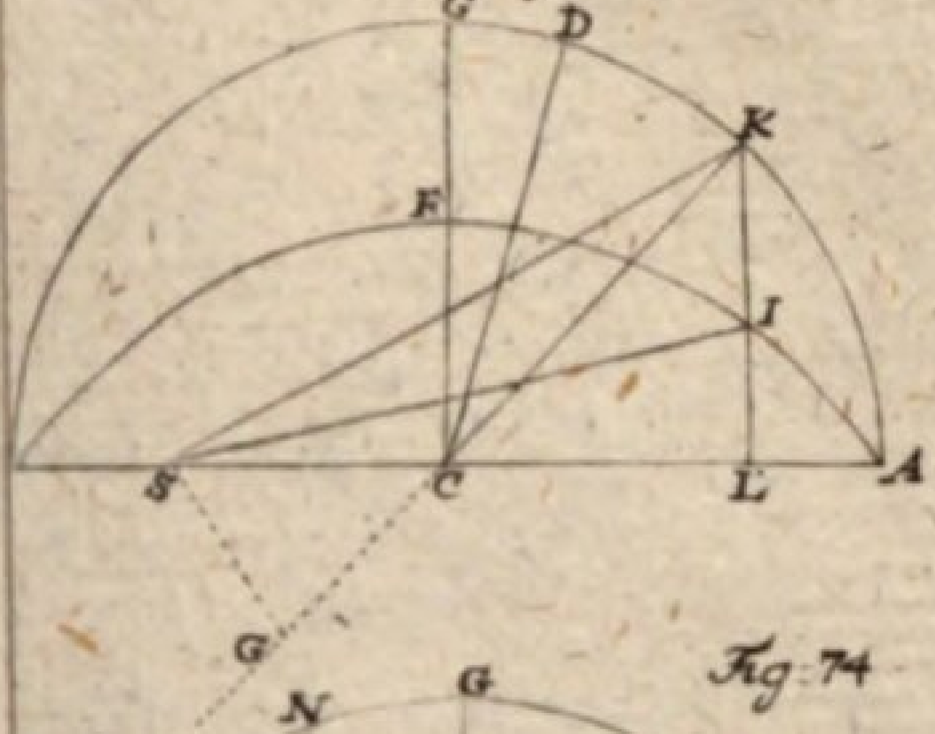
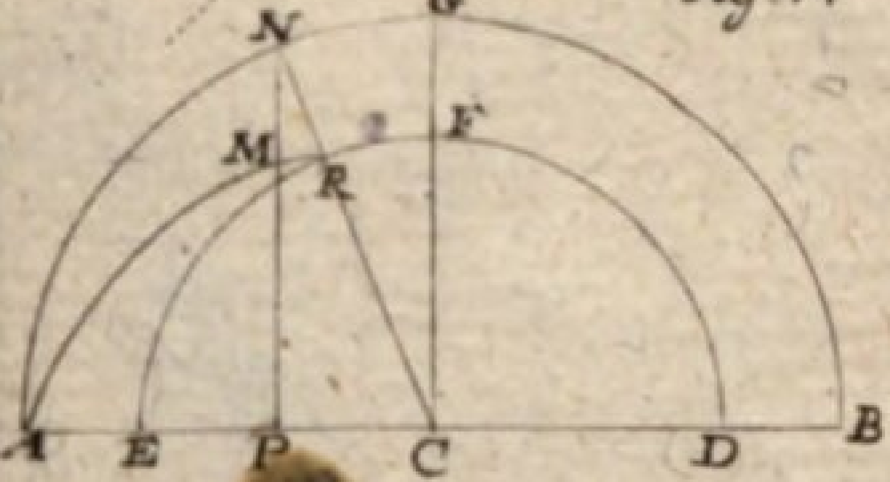
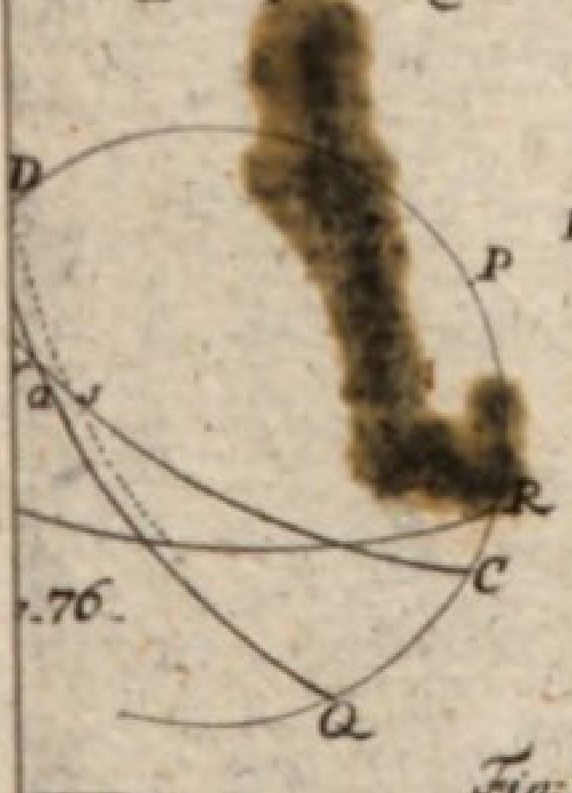


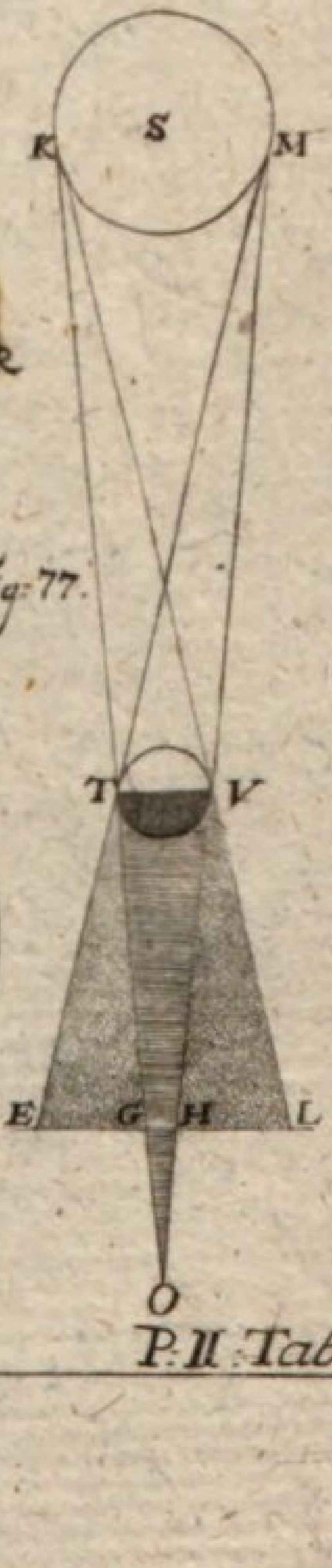
Fig. 74

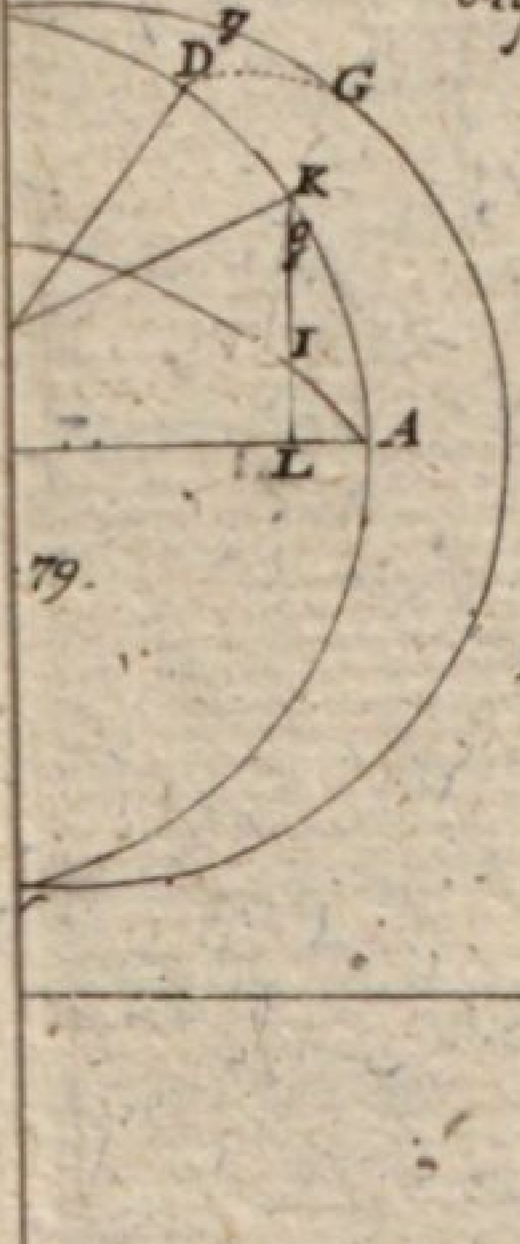




.76.

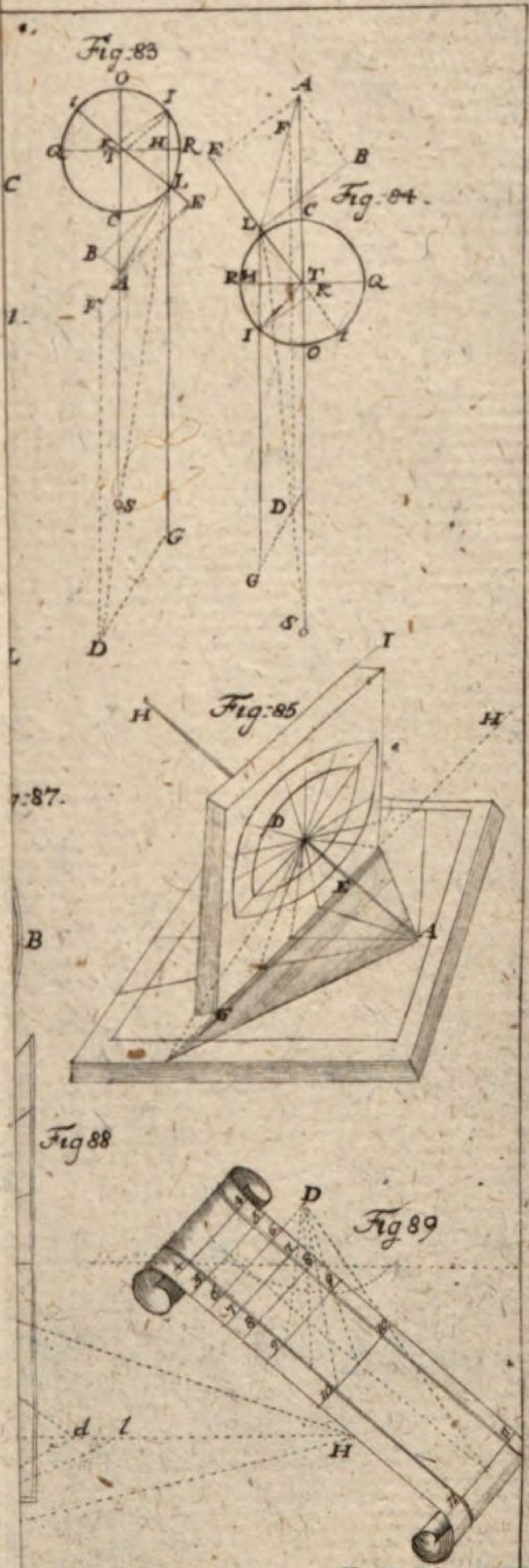
Fig. 77.



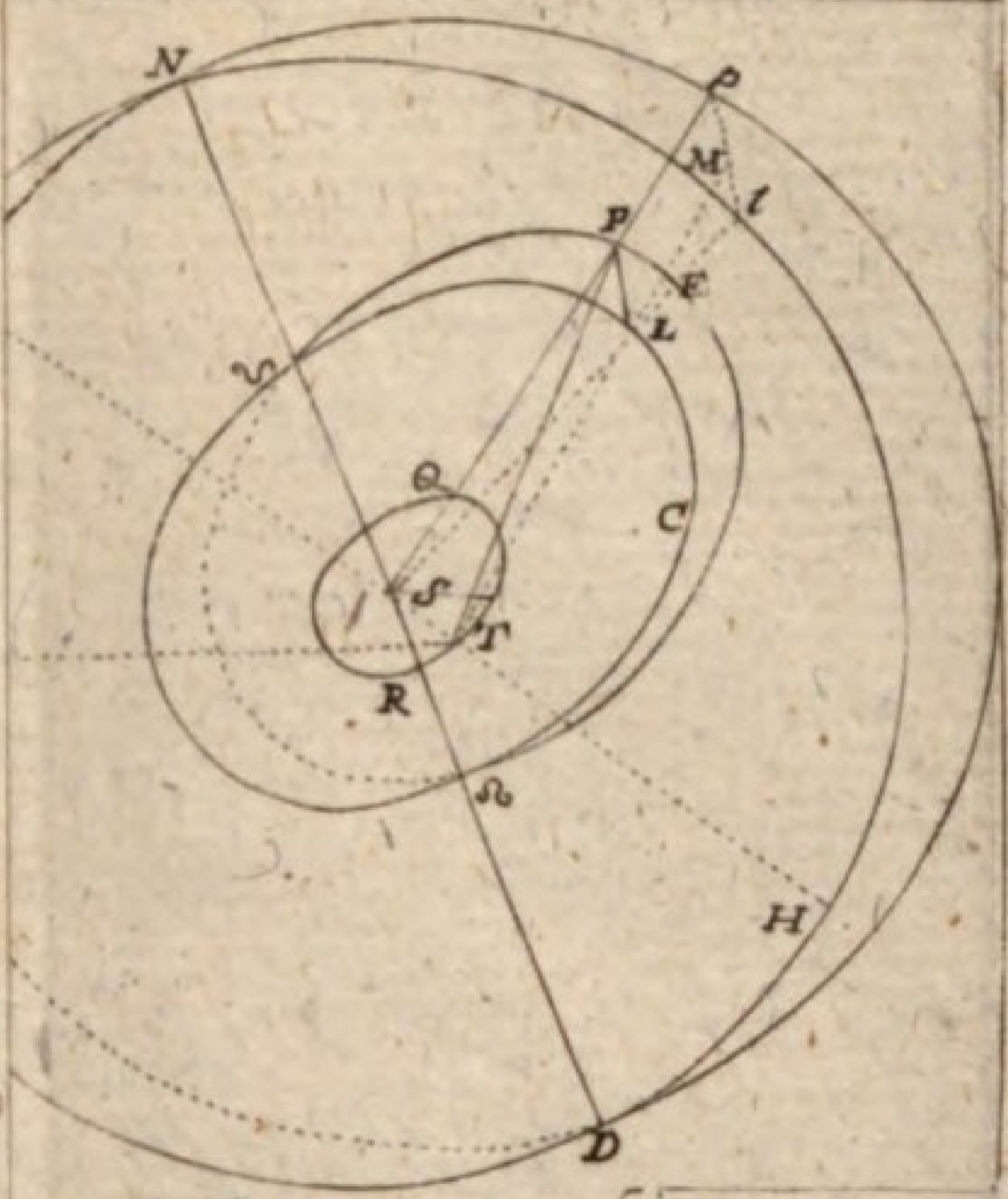


79.

P. II. Tab. VII



P.II: TabVIII



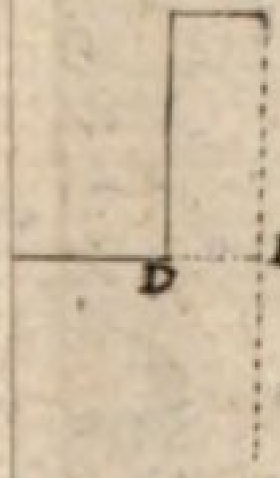
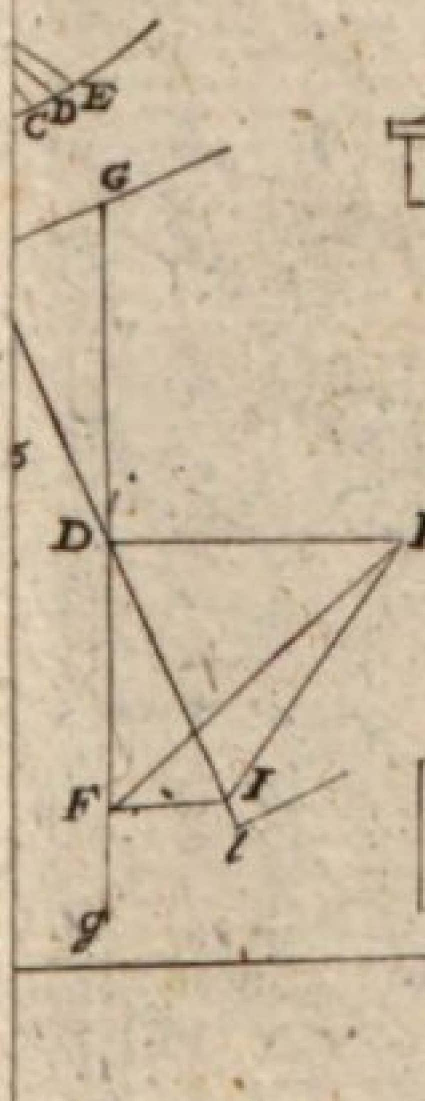


Fig: 94



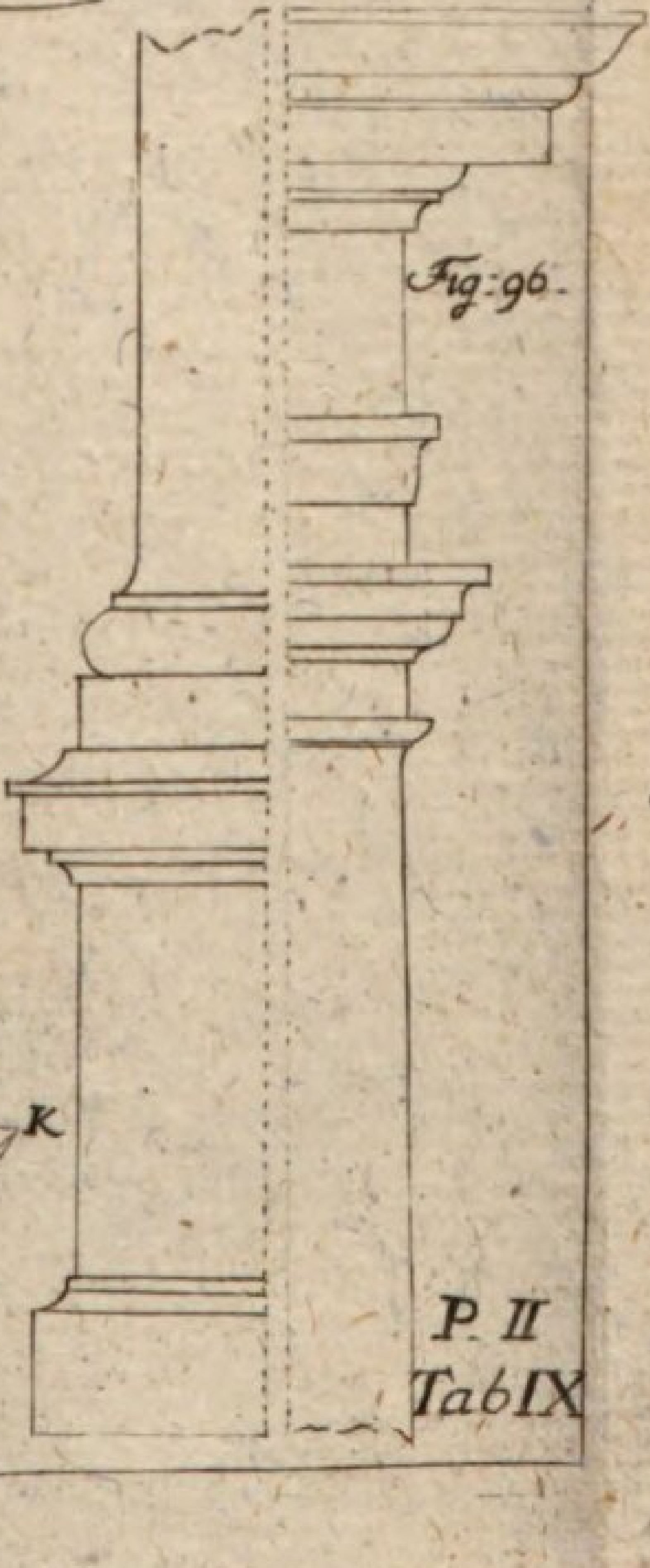


Fig: 96.

P. II
Tab IX

Fig: 100.

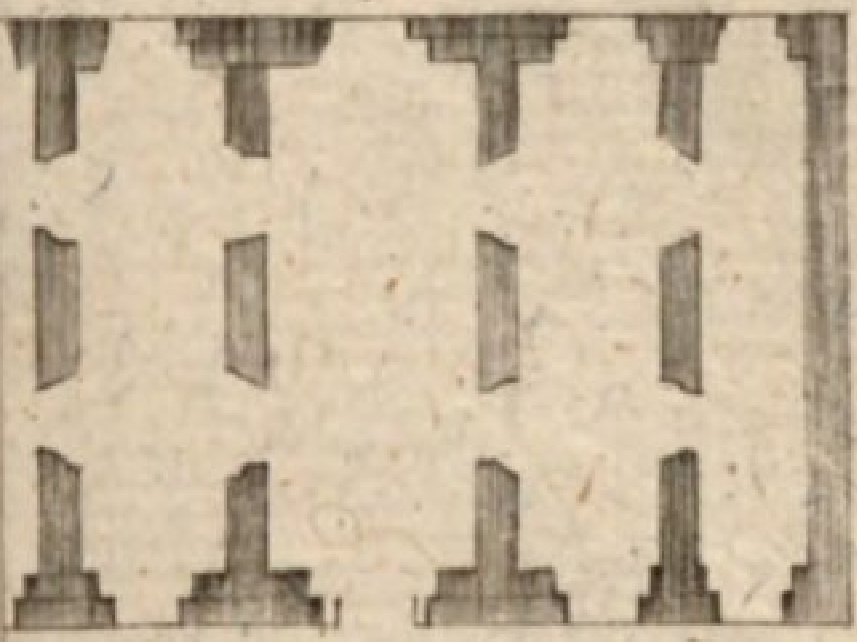
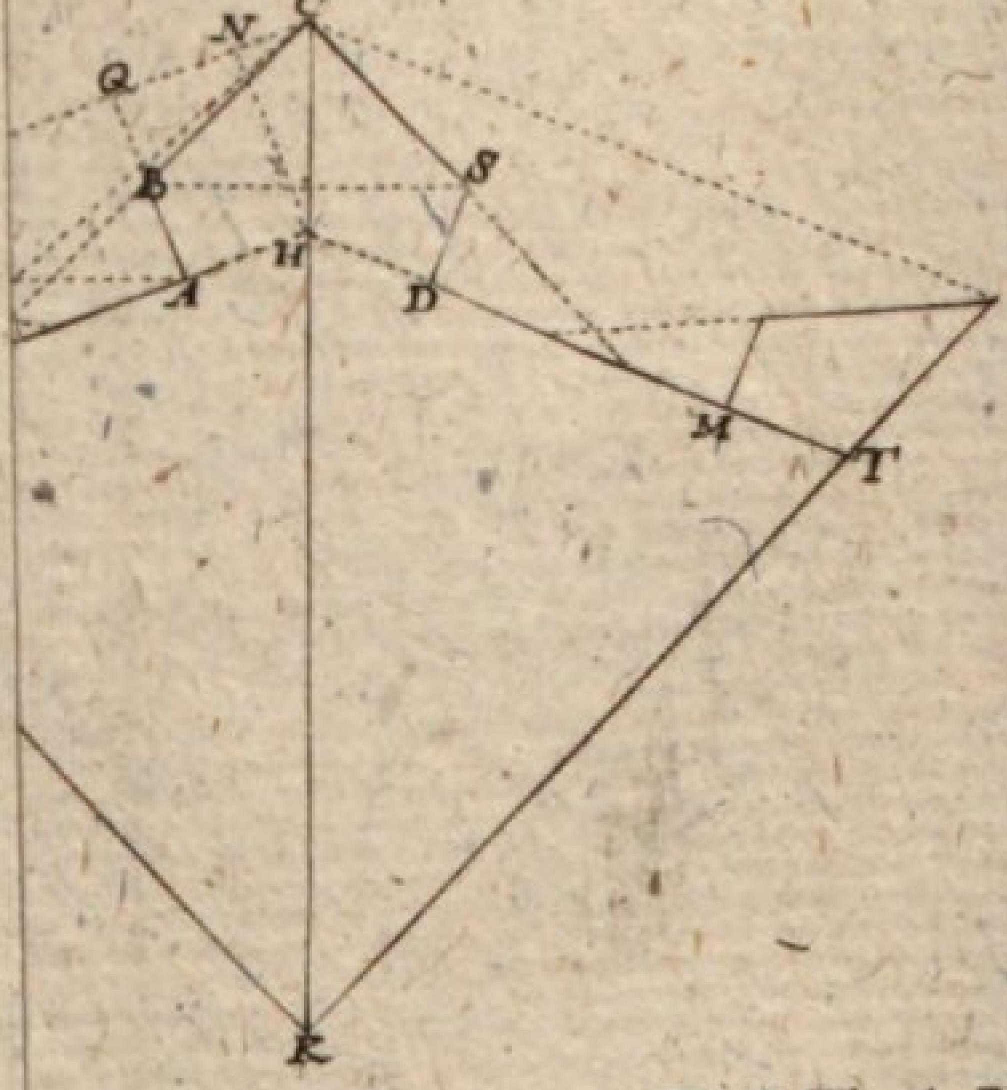


Fig: 104

Fig: 105

Fig: 106.

Fig: 107 α



P. II: Tab: X

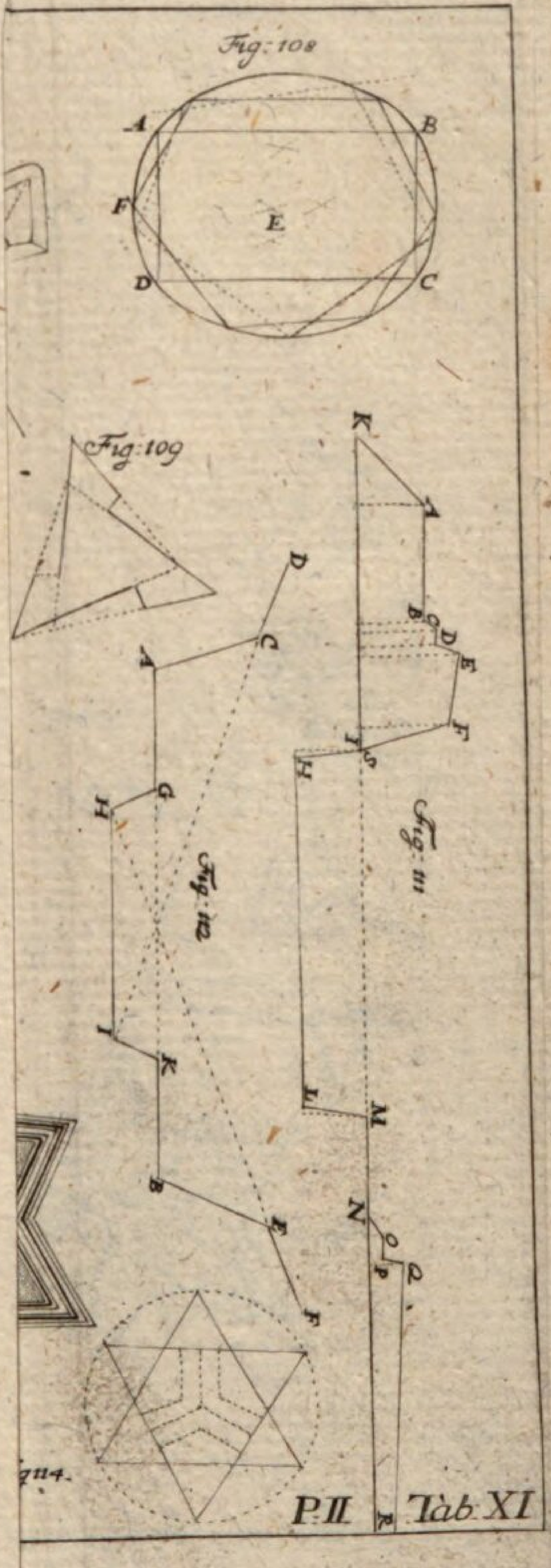


Fig: 108
A
B
F
E
D
C
Fig: 109
Fig: 111
K
A
B
D
E
F
H
L
M
N
O
P
Q
R
Fig: 112
D
C
A
G
H
I
K
B
E
F
P.II
Tab. XI

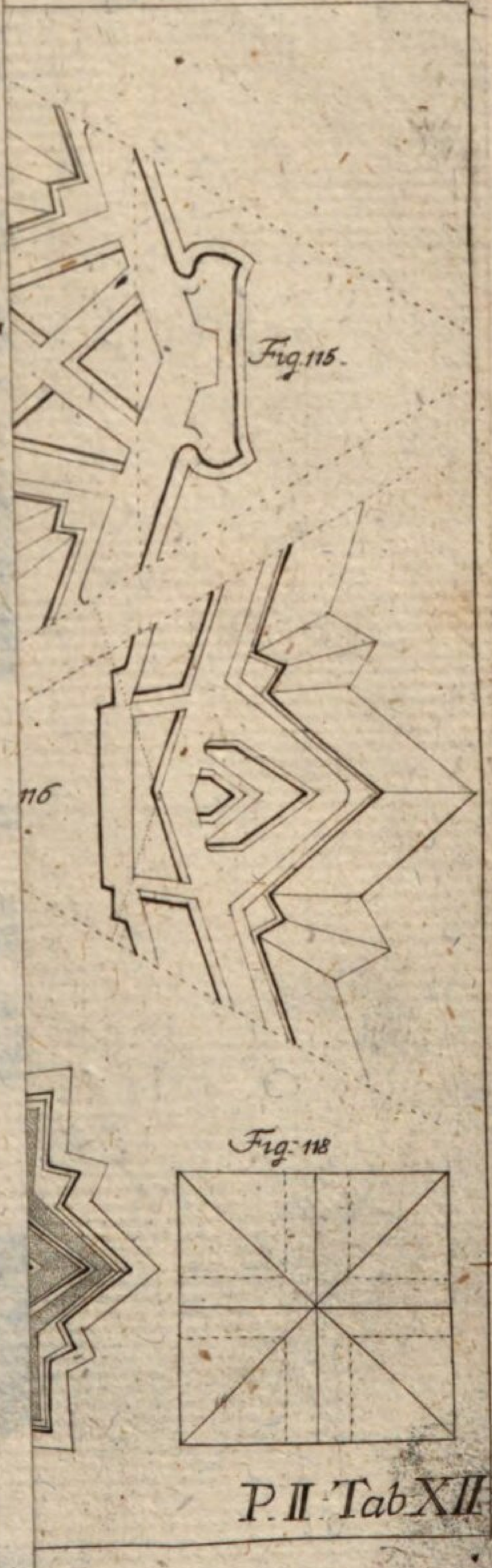


Fig.115.
116
Fig: 118
P. II. Tab XII.

PEDIA.
3
6
ES
2
3
5
6
P. II Tab XIII.

Clemm, Heinrich Wilhelm, / Clemm, Heinrich Wilhelm / Clemm, Heinrich Wilhelm

Heinrich Wilhelm Clemms der Mathematik offentlichen ordentlichen Professors zu Stutgart mathematisches Lehrbuch oder vollständiger Auszug aller so wohl zur reinen als angewandten Mathematik gehörigen Wissenschaften nebst einem Anhang darinnen die Naturgeschichte und

Stutgart 1764

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 137
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267434-5
VD18 12058009-006